附件三

屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：按圖索「畢」

關 鍵 詞：畢氏定理、面積、尺規作圖（最多三個）

編號：A1024

製作說明：

1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。

2.編號：**自報名系統報名完取得作品編號後，先填寫回作品封面上，再存成 docx 及 pdf 檔後再上存。**

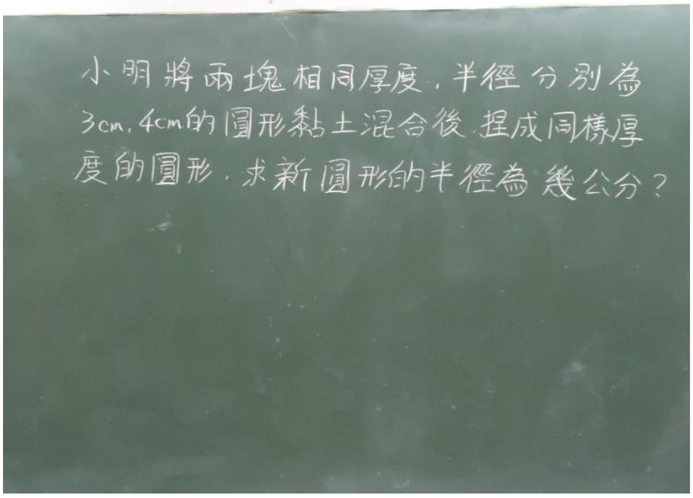
3.封面編排由參展作者自行設計。

按圖索「畢」

摘要

在六年級的數學學習當中，學生會接觸到圓周率的認識及圓面積的計算。此次研究主要是以圓面積的結合為出發點，讓學生尋找畢氏定理的正整數解。再以畢氏定理為基礎，進行相關圖形的尺規作圖。希望透過這樣的研究，學生對於畢氏定理能有初略的發現及了解，並熟悉尺規作圖的步驟。

壹、研究動機



(老師當初布題之情況)

我們在學習面積的當中，老師出了上面的題目，以訓練我們的思考。在了解圓周率的大概概念後，透過計算的過程，我們發現到一件有趣的事情，就是同樣都是正整數的圓形半徑，在合成之後，竟然又是一個正整數的圓形半徑，當下我們對於這樣的合成，有點百思不解。在老師的說明下，我們才知道這就是數學史上赫赫有名的畢氏定理(直角三角形中，兩股長 a，b，斜邊長 c，必存在$a^2+b^2 = c^2$的關係)。當我們了解來龍去脈後，一個問題又浮上了心頭：是否還有存在其他的正整數，也符合這樣的關係？於是在老師的指導下，我們試著找出更多符合這項關係的正整數解，希望能從中找出規律所在，並對畢氏定理的脈絡有更清楚的認識。

貳、研究目的

一、在正整數 1~100 中，找出直角三角形三邊長皆不小於 1，不大於 100，且符合畢式定理

的正整數解。

二、在已知直角三角形的兩邊長度的情況下，利用尺規作圖找出第三邊。

三、在找出第三邊的情況下，利用尺規作圖，作出已知其中兩邊長所形成的圓形、正三角形及正方形的面積和或差，用第三邊來呈現相關圖形。

參、研究設備及器材

紙、筆、計算機、GSP 軟體

肆、研究過程或方法

一、研究方法

網路上討論畢氏定理的概念及證明不在少數，但對於如何找到正整數解的方式，似乎較少著墨。由於國小階段尚未討論到根號的概念，藉由討論畢氏定理的正整數解，不但可以複習學生在五年級所學的因數概念外，更可以對畢氏定理的面貌有所認識。為配合學生的學習及方便計算，我們設定以下限制，希望能找出符合條件的答案。

(一)我們限定此直角三角形的三邊邊長除了必須是正整數外，三邊邊長的範圍皆在1~100 之間，避免操作上的不易。

(二)在給定其中兩邊的情況下，以畢氏定理為基礎，利用尺規作圖找出第三邊。

二、研究過程

在決定好上述限制後，我們將以此為基礎，分別找出

(一)所有在 1~100 之間的正整數中，符合畢氏定理的正整數解的相關規律。

(二)在已知其中兩邊長度的情況下，透過畢氏定理找出第三邊後，利用尺規作圖，作出已知其中兩邊長所形成的圓形、正三角形及正方形的面積和或差，將數值以圖形呈現。

希望透過實作與討論，找出畢氏定理中正整數解的規律關係，進而活用到尺規作圖上，以對畢氏定理有更多的認識。

伍、研究結果

一、尋找畢氏定理正整數解

在畢氏定理的式子呈現中(直角三角形中，兩股長 a，b，斜邊長 c，必存在$a^2+b^2 = c^2$的

關係)，由於有三個未知數，這對代數概念尚未清楚掌握的小學生來說，會是一個很大的障礙，於是我們將採以下方式進行，試著讓學生結合國中小的數學概念，進而找到相關正整數解。方式如下：

(一)固定 a 值，由 1~100 代入。

(二)配合國中會教到的平方差公式，可得$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b) \times (c+b)$。

(三)由於 a、b、c 皆為正整數，配合平方差公式及國小學習過的因數概念，我們只要掌握a^2值的正因數進行測試，再解聯立方程式，就有機會得到相關答案。

經過進行測試後，我們可以找到的畢氏定理正整數解(1~100 之間)有以下解答：

(a、b 為兩股長，c 為斜邊長，a、b 值調換算同一組)

a^2值	c-b 值	c+b 值	c 值	b 值	(a，b，c)
3^2	1	9	5	4	(3，4，5)
4^2	2	8	5	3	已有
5^2	1	25	13	12	(5，12，13)
6^2	2	18	10	8	(6，8，10)
7^2	1	49	25	24	(7，24，25)
8^2	2	32	17	15	(8，15，17)
	4	16	10	6	已有
9^2	1	81	41	40	(9，40，41)
	3	27	15	12	(9，12，15)
10^2	2	50	26	24	(10，24，26)
11^2	1	121	61	60	(11，60，61)
12^2	2	72	37	35	(12，35，37)
	4	36	20	16	(12，16，20)
	6	24	15	9	已有
	8	18	13	5	已有
13^2	1	169	85	84	(13，84，85)

14^2	2	98	50	48	(14，48，50)
15^2	3	75	39	36	(15，36，39)
15^2	5	45	25	20	(15，20，25)
	9	25	17	8	已有
16^2	2	128	65	63	(16，63，65)
	4	64	34	30	(16，30，34)
	8	32	20	12	已有
18^2	2	162	82	80	(18，80，82)
	6	54	30	24	(18，24，30)
20^2	4	100	52	48	(20，48，52)
	8	50	29	21	(20，21，29)
	10	40	25	15	已有
21^2	3	147	75	72	(21，72，75)
	7	63	35	28	(21，28，35)
	9	49	29	20	已有
24^2	4	144	74	70	(24，70，74)
	6	96	51	45	(24，45，51)
	8	72	40	32	(24，32，40)
	12	48	30	18	已有
	16	36	26	10	已有
	18	32	25	7	已有
25^2	5	125	65	60	(25，60，65)
27^2	9	81	45	36	(27，36，45)
28^2	4	196	100	96	(28，96，100)
	8	98	53	45	(28，45，53)

	14	56	35	21	已有
30^2	6	150	78	72	(30，72，78)
	10	90	50	40	(30，40，50)
	18	50	34	16	已有
32^2	8	128	68	60	(32，60，68)
	16	64	40	24	已有
33^2	9	121	65	56	(33，56，65)
	11	99	55	44	(33，44，55)
35^2	7	175	91	84	(35，84，91)
36^2	8	162	85	77	(36，77，85)
	12	108	60	48	(36，48，60)
	18	72	45	27	已有
	24	54	39	15	已有
39^2	9	169	89	80	(39，80，89)
	13	117	65	52	(39，52，65)
40^2	10	160	85	75	(40，75，85)
	16	100	58	42	(40，42，58)
	20	80	50	30	已有
	32	50	41	9	已有
42^2	14	126	70	56	(42，56，70)
	18	98	58	40	已有
44^2	22	88	55	33	已有
45^2	15	135	75	60	(45，60，75)
	25	81	53	28	已有
	27	75	51	24	已有
	16	144	80	64	(48，64，80)

48^2	18	128	73	55	(48，55，73)
	24	96	60	36	已有
	32	72	52	20	已有
	36	64	50	14	已有
51^2	17	153	85	68	(51，68，85)
52^2	26	104	65	39	已有
54^2	18	162	90	72	(54，72，90)
55^2	25	121	73	48	已有
56^2	28	112	70	42	已有
	32	98	65	33	已有
57^2	19	171	95	76	(57，76，95)
60^2	20	180	100	80	(60，80，100)
	24	150	87	63	(60，63，87)
	30	120	75	45	已有
	36	100	68	32	已有
	40	90	65	25	已有
	50	72	61	11	已有
63^2	27	147	87	60	已有
	49	81	65	16	已有
64^2	32	128	80	48	已有
65^2	25	169	97	72	(65，72，97)
68^2	34	136	85	51	已有
70^2	50	98	74	24	已有
	32	162	97	65	已有
	36	144	90	54	已有

72^2	48	108	78	30	已有
	54	96	75	21	已有
75^2	45	125	85	40	已有
76^2	38	152	95	57	已有
77^2	49	121	85	36	已有
80^2	40	160	100	60	已有
	50	128	89	39	已有
	64	100	82	18	已有
84^2	56	126	91	35	已有
	72	98	85	13	已有
96^2	72	128	100	28	已有

根據上述分析，我們可以發現以下性質：

(一)兩股長最短邊超過 13 時，若其數值是質數，則找不到對應的正整數解

(二)限制直角三角形三邊長在 1~100 之間，且為正整數的話，共有 52 種組合，而兩股長最短邊的最大值為 65

(三)52 種組合中，斜邊和其中一股只相差 1 的共有 6 組，分別是(3，4，5)、(5，12，13)、(7，24，25)、(9，40，41)、(11，60，61)、(13，84，85)

(四)當找到一組正整數解後，將其數值各乘以相同的正整數倍，則新做出的組合亦為解答，如(3，4，5)、(6，8，10)(乘以 2 倍)、(9，12，15)(乘以 3 倍)、……。

扣掉有倍數關係的正整數解，我們把剩下的組合歸納如下，又可發現存在以下規律：

a	b	c	a	b	c
3	4	5	16	63	65
5	12	13	20	21	29
7	24	25	28	45	53
8	15	17	33	56	65
9	40	41	36	77	85

11	60	61	39	80	89
12	35	37	48	55	73
13	84	85	65	72	97

(一)在這些正整數解答中，皆呈現三者互質的情況

(二)在各組的組合中，a、b 兩數至少有一數為 3 的倍數

(三)在各組的組合中，a、b 兩數至少有一數為 4 的倍數

(四)在各組的組合中，a、b、c 三數至少有一數為 5 的倍數

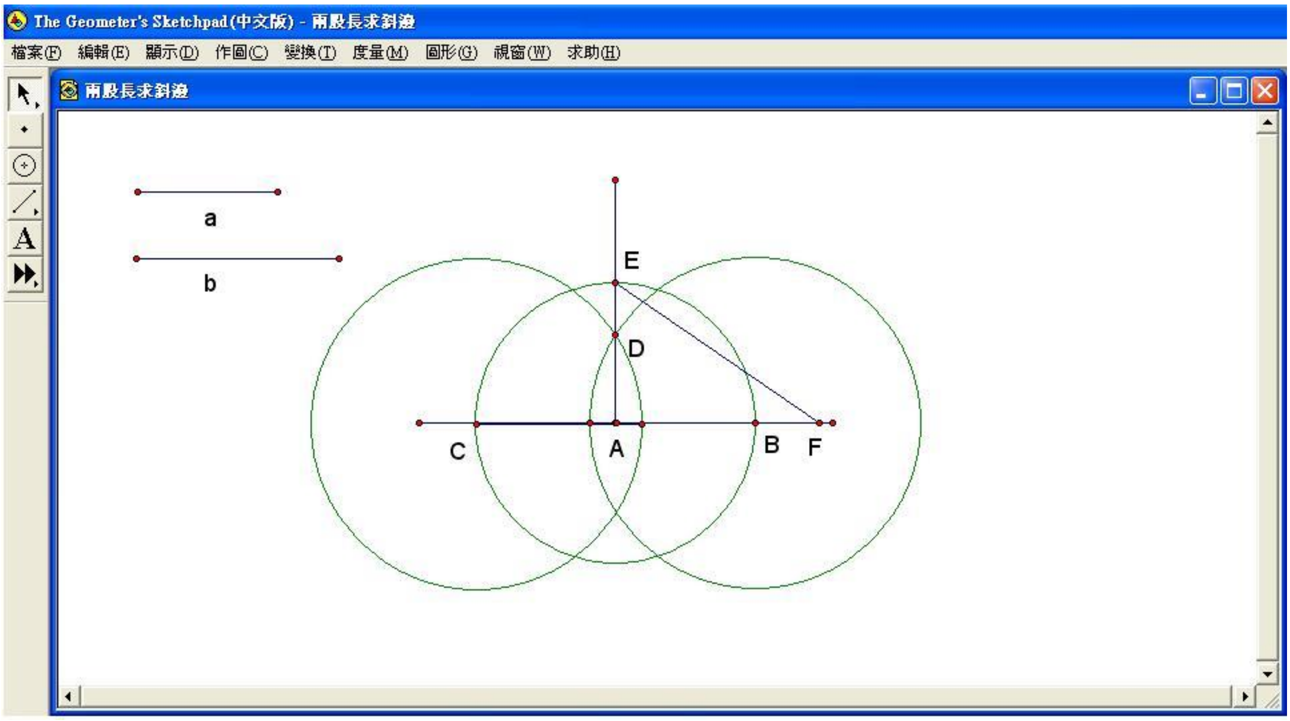
以上為此階段討論的情形。

二、利用畢式定理找出第三邊(尺規作圖)

利用數值及公式計算找出第三邊，是個單純的計算問題，一旦牽涉到尺規作圖，難度就會變高許多。這次的尺規作圖，將以垂直平分線的概念來進行，以建立學生對畢氏定理的具體概念。

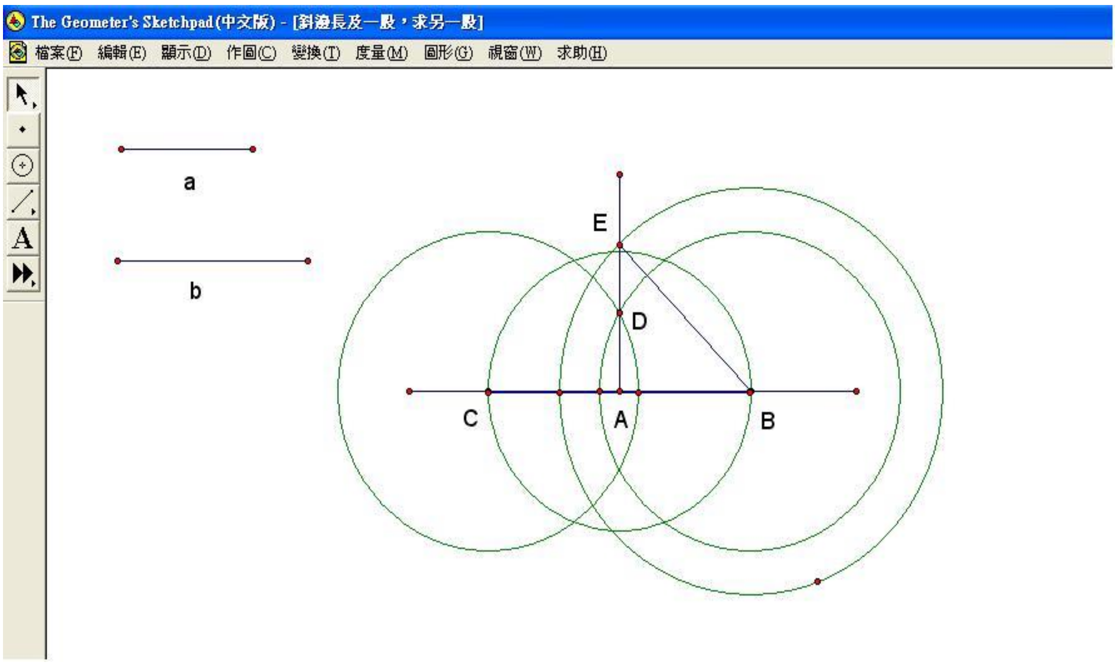
(一)已知兩股長度，求斜邊長之作法................(基本 1)

1. 以尺畫出一線段，並取一點為 A
2. 以 A 為圓心，a 為半徑畫圓，交線段於 B、C 兩點，使得 AB = AC =a
3. 分別以相同半徑，以 B、C 為圓心畫圓(a <半徑<2a)，則此兩圓相交於 A 點上方於 D 點
4. 連接 AD(此時 AD 為中垂線)，並作延長交一開始的圓於 E 點，則 AE =a
5. 以 A 為圓心，b 為半徑畫圓，交線段於 F 點，使得 AF = b
6. 連接 EF，則其長度即為所求



(二)已知斜邊長及其中一股長，求另一股長之作法…………….(基本 2)

1. 以尺畫出一線段，並取一點為 A
2. 以 A 為圓心，a 為半徑畫圓，交線段於 B、C 兩點，使得 AB = AC =a
3. 分別以相同半徑，以 B、C 為圓心畫圓(a <半徑<2a)，則此兩圓相交於 A 點上方於 D 點
4. 連接 AD(此時 AD 為中垂線)，並作延長
5. 以 B 為圓心，b 為半徑畫圓，交 AD 延長線於 E 點，使得 BE = b，則 AE 即為所求



三、利用已知兩邊及畢氏定理，作出面積和或差的相對應圖形

在學會利用畢式定理及已知的兩邊，進而找出第三邊後，接下來我們要挑戰的是將數值圖形化。在老師的說明下，我們知道有幾個圖形的面積公式，可和畢式定理產生連結，分別如下：

(一)正方形面積相加(或減)形成新正方形：$a^2+b^2 = c^2$

(二)圓形面積相加(或減)形成新圓形：$a^2 x \pi + b^2 x \pi = c^2 x \pi$

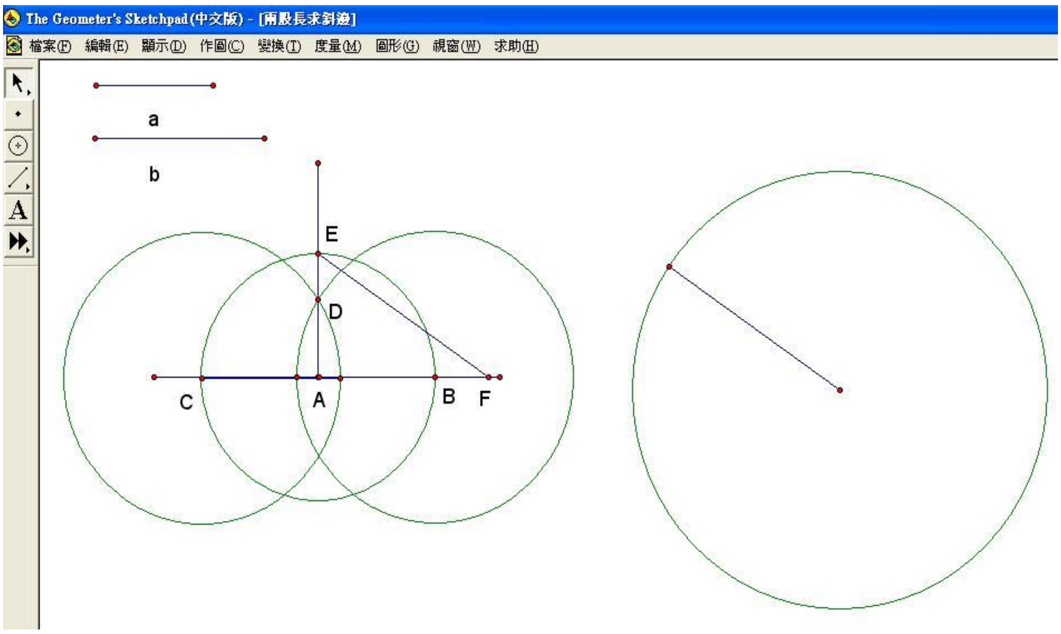
(三)正三角形面積相加(或減)形成新正三角形：$\frac{\sqrt{3}}{4} x a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} x b^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} x c^2$

這些公式光計算還沒太大問題，但如何將其具體圖象化，就夠我們攪盡腦汁了。在老師的指導下，我們將再以垂直平分線的概念進行，以完成相關尺規作圖。以下是作圖情況：

1. 已知兩股長，求以斜邊長為半徑的圓

   (1) 請先按基本 1 步驟，完成斜邊線段

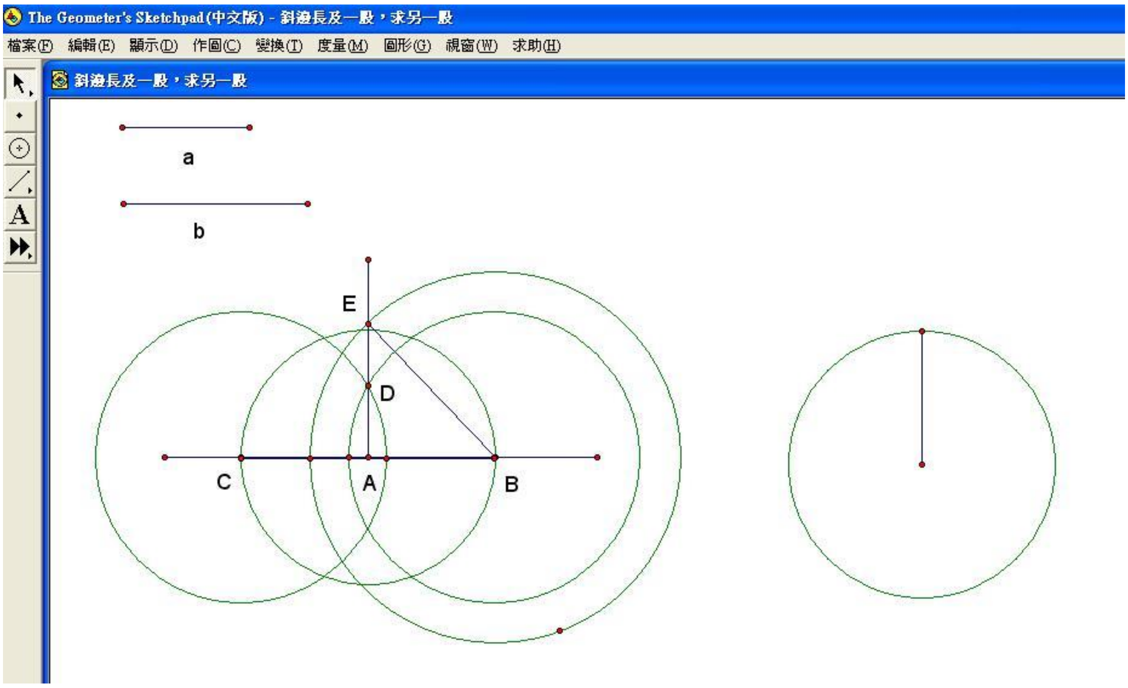
   (2) 以一點為圓心，EF 為半徑畫圓，則該圓即為分別以 a、b 線段為半徑所畫出的圓的面積總和



2.已知斜邊長及其中一股長，求以另一股為半徑的圓

(1)請先按基本 2 步驟，完成另一股線段

(2)以一點為圓心，AE 為半徑畫圓，則該圓即為分別以 a、b 線段為半徑所畫出的圓的面積相差



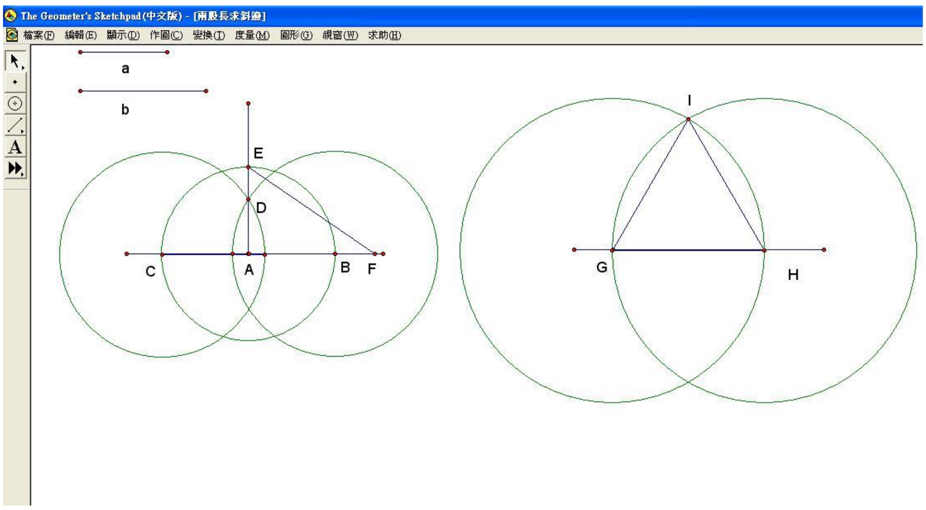
3.已知兩股長，求以斜邊長為邊長的正三角形

(1)請先按基本 1 步驟，完成斜邊線段

(2)用尺畫出一直線，並取一點 G

(3)以 G 為圓心，EF 為半徑畫圓，交直線於 H 點

(4)以 H 為圓心，EF 為半徑畫圓，交圓於 I 點，則三角形 GHI 即為分別以 a、b 線段為邊長所畫出的正三角形的面積總和，其亦是正三角形



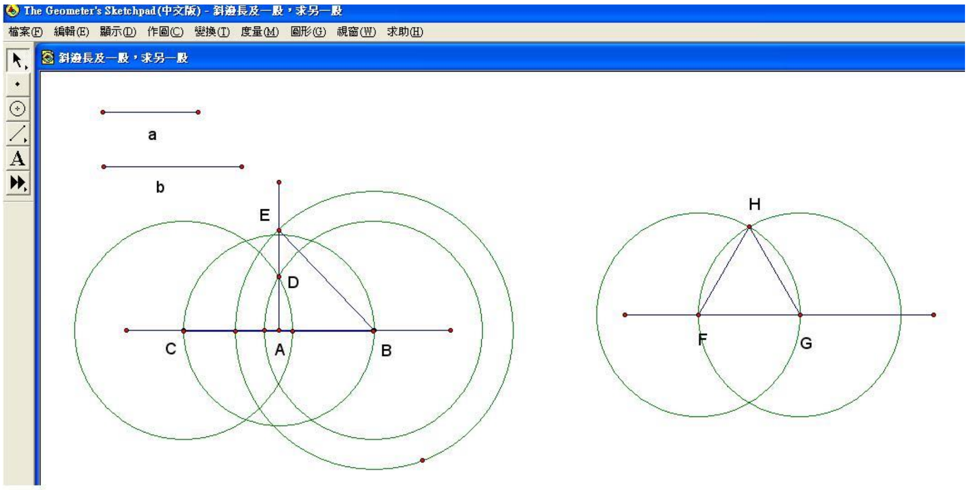
4.已知斜邊長及其中一股長，求以另一股為邊長的正三角形

(1)請先按基本 2 步驟，完成另一股線段

(2)用尺畫出一直線，並取一點 F

(3)以 F 為圓心，AE 為半徑畫圓，交直線於 G 點

(4)以 G 為圓心，AE 為半徑畫圓，交圓於 H 點，則三角形 FGH 即為分別以 a、b 線段為邊長所畫出的正三角形的面積相差，其亦是正三角形



5.已知兩股長，求以斜邊長為邊長的正方形

(1)請先按基本 1 步驟，完成斜邊線段

(2)用尺畫出一直線，並取一點 G

(3)以 G 為圓心，EF 為半徑畫圓，交直線於 H 點

(4)分別以 G、H 為圓心，相同半徑畫圓($\frac{1}{2}$x GH <半徑<GH)，則此兩圓各相交於 1 點。連接此兩點，交線段 GH 於 I 點，則 GI = IH = $\frac{1}{2}$x GH

(5)以 G 為圓心，GI 為半徑畫圓，交直線於 J 點

(6)分別以 J、I 為圓心，相同半徑畫圓($\frac{1}{2}$x IJ<半徑<IJ)，則此兩圓相交於 G 點上方於 N 點

(7)連接 GN 並作延長，相交於以 G 為圓心，EF 為半徑的圓於 K 點，則 GK = GH

(8)以 H 為圓心，HI 為半徑畫圓，交直線於 L 點

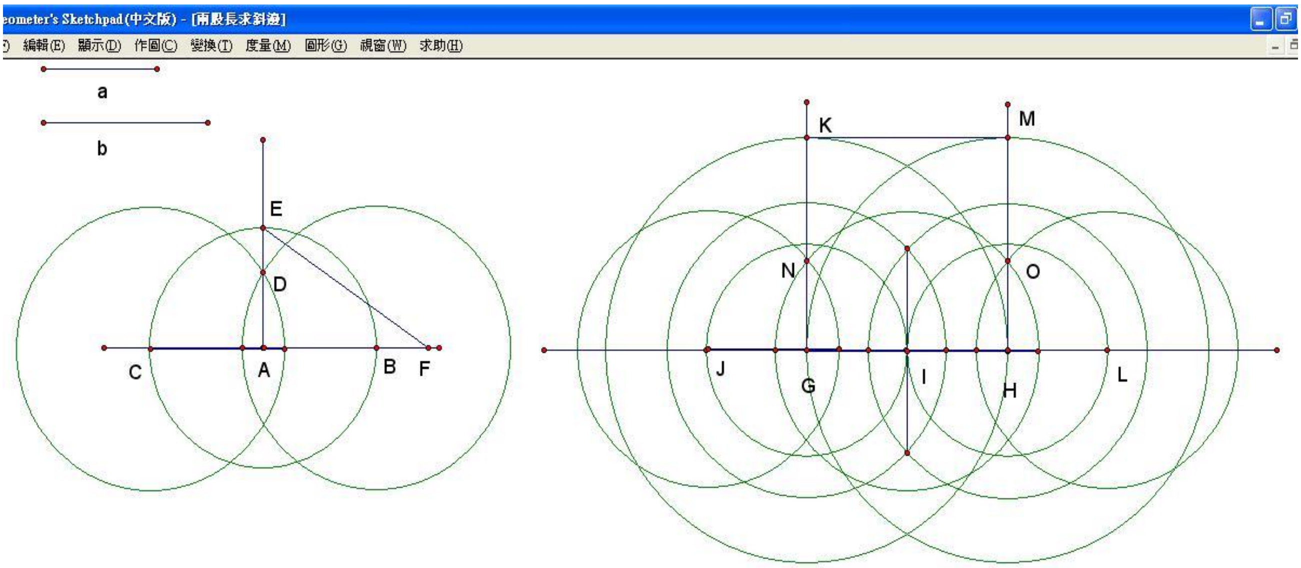
(9)分別以 L、I 為圓心，相同半徑畫圓($\frac{1}{2}$x IL<半徑<IL)，則此兩圓相交於 H 點上方於 O 點

(10)以 H 為圓心，HG 為半徑畫圓

(11)連接 HO 並作延長，相交於以 H 為圓心，HG 為半徑的圓於 M 點，則 HM = GH

(12)連接 K、M，則四邊形 KGHM 即為分別以 a、b 線段為邊長所畫出的正方形的面

積總和，其亦是正方形



6.已知斜邊長及其中一股長，求以另一股為邊長的正方形

(1)請先按基本 2 步驟，完成斜邊線段

(2)用尺畫出一直線，並取一點 F

(3)以 F 為圓心，AE 為半徑畫圓，交直線於 G 點

(4)分別以 F、G 為圓心，相同半徑畫圓($\frac{1}{2}$x FG<半徑<FG)，則此兩圓各相交於 1 點。連接此兩點，交線段 FG 於 H 點，則 FH = HG = $\frac{1}{2}$x FG

(5)以 F 為圓心，FH 為半徑畫圓，交直線於 I 點

(6)分別以 I、H 為圓心，相同半徑畫圓(1/2 xIH<半徑<IH)，則此兩圓相交於 F 點上方

於 K 點

(7)連接 FK 並作延長，相交於以 F 為圓心，AE 為半徑的圓於 J 點，則 FJ = FG

(8)以 G 為圓心，GH 為半徑畫圓，交直線於 L 點

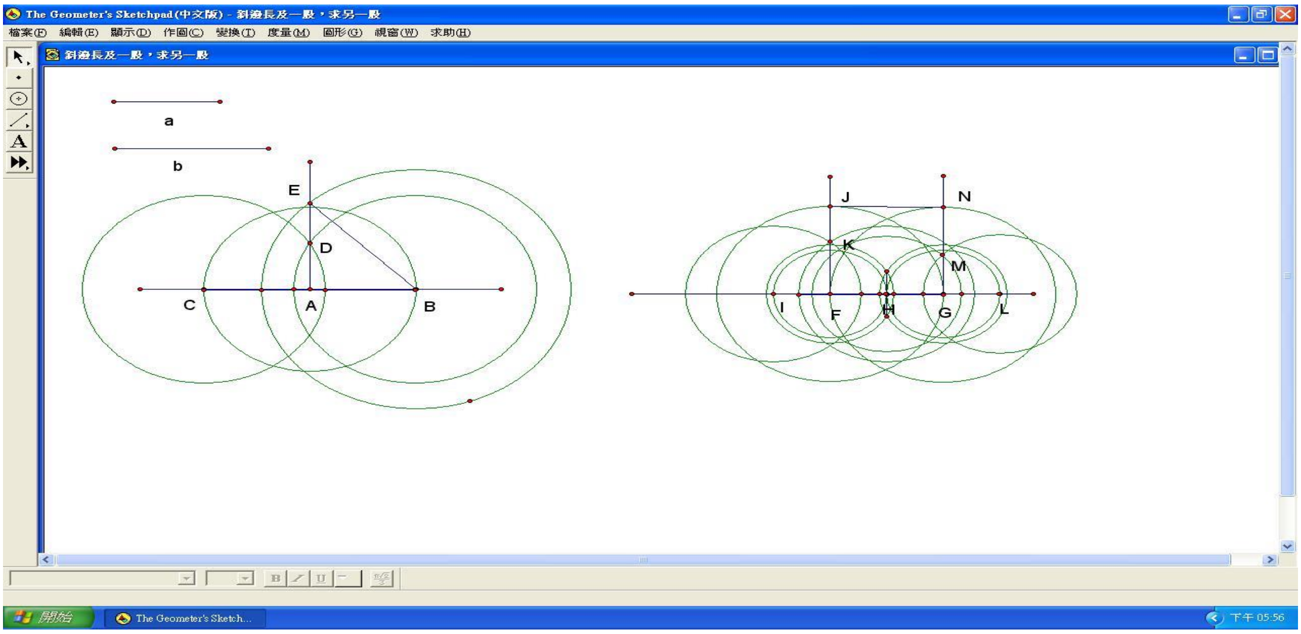
(9)分別以 L、H 為圓心，相同半徑畫圓($\frac{1}{2}$x LH<半徑<LH)，則此兩圓相交於 G 點上方

於 M 點

(10)以 G 為圓心，GF 為半徑畫圓

(11)連接 GM 並作延長，相交於以 G 為圓心，GF 為半徑的圓於 N 點，則 GN = GF

(12)連接 J、N，則四邊形 JFGN 即為分別以 a、b 線段為邊長所畫出的正方形的面積相差，其亦是正方形



陸、討論

(一)在尋找畢氏定理正整數解中，兩股長最短邊超過 13 時，若其數值是質數，則找不到對應的正整數解

(二)限制直角三角形三邊長在 1~100 之間，且為正整數的話，共有 52 種組合，而兩股長最短邊的最大值為 65

(三)52 種組合中，斜邊和其中一股只相差 1 的共有 6 組，分別是(3，4，5)、(5，12，13)、(7，24，25)、(9，40，41)、(11，60，61)、(13，84，85)

(四)當找到一組正整數解後，將其數值各乘以相同的正整數倍，則新做出的組合亦為解答，如(3，4，5)、(6，8，10)(乘以 2 倍)、(9，12，15)(乘以 3 倍)、……。

(五)扣掉有倍數關係的正整數解，剩下的組合歸納後，皆呈現三者互質的情況，且各組的組合中，兩股長至少會有一個是 3 的倍數或 4 的倍數，3 個數字至少會有一個是 5 的倍數。

(六)在已知其中兩邊的情況下，配合中垂線及畢式定理、尺規作圖，可找到第三邊，並以此

為基礎，將圓形、正三角形及正方形的面積和或差，以相對應的圖形呈現

柒、結論

當初選擇找出畢式定理的正整數解時，總以為例子不多，應該是個簡單的工作。沒想到深入討論後，才發覺數量超乎想像，也再次見證了數學總是在看似平凡處，隱藏著不平凡的道理。而在尺規作圖上，雖然是提早接觸到國中的作法，但在老師的說明下，我們也能漸入狀況，掌握其中的關鍵。透過討論與尺規作圖，我們對於畢氏定理的世界，有了更深的了解，這就是我們在這次研究中最大的收穫。

捌、參考資料及其他

康軒版六上數學第九單元-圓面積

康軒版五上數學第二單元-因數與倍數

昌爸工作坊(無日期)。畢氏定理。http://www.mathland.idv.tw/cai/pyth.html