屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別： 數學科

組　　別： 國中組

作品名稱： 通往海奧華的道路

關 鍵 詞： 數列與級數、階梯

編號：B1037

作品名稱：通往海奧華的道路

摘要

本研究運用數列和級數的概念來探討踩階梯的遊戲。走在校園左右對稱的石頭步道，隨著左右腳步的先後及次數的改變，探討踩階梯的走法數。研究過程中，依照程序以圖示把走法記錄下來，觀察走法排列中隱藏的數學規律，再藉由所發現的關聯性，推論不可見的延伸圖形，並以數學歸納法去驗證所猜測的走法數。研究結果得到：

一、當左右兩排階梯數各為 n=m，踩左腳的次數 L=k 時，則踩右腳的次數為 m-k。

二、踩左腳的次數 $L=k-1$，則 $y_{k-1}=1$；$L=k$，則 $z_k=1$，

當左右兩排階梯數各為 n=m 時，左腳的走法數中存在著關聯性

$z_m = y_{m-1} + z_{m-1}$,（$m \geq k$）。

三、當踩左腳的次數 L=k，左右兩排階梯數 n=m 時，其中 $z_k=1$，

左腳的走法數 $z_m = \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots[m-(k-1)]}{1\times2\times3\times\cdots\times k}$，

（$m \geq k$）；同理可證右腳的走法數。

壹、研究動機

在我們的兒時記憶裡，有一種踩階梯的遊戲，而隨著時光的推進我們也逐漸成熟，便漸漸地忘了童年的美好與創意。在下課時分，當我們孤單一人漫步在嘈雜的校園中，便有一種「結廬在人境，而無車馬喧。」的感覺，這時看到校園裡的石頭步道，便不禁讓人想起童年的種種回憶與那充斥著我們童年的踩階梯遊戲。為了使原本的遊戲增添更多的趣味，於是我們決定增加一些限制條件以提高難度。首先，我們想到如果限制左腳只能踩一步的話那會如何？那如果踩兩步呢？則三步又會如何？那假設換成是右腳的話呢？這些有趣的問題，激發我們研究的好奇心，同時，也幻想著這是一條通往海奧華的道路，踩著階梯能進入奇幻不思議的旅程。因此，我們試圖以數列和級數的概念，開始觀察並思考這個踩階梯遊戲，找出其中所隱含的數學意義。

貳、研究目的

為了使原本的遊戲增添更多的趣味，於是我們決定增加一些限制條件以提高難度，首先我們想到如果限制左腳只能採一步的話那會如何？那如果採兩步呢？則三步又會如何？那假設換成是右腳的話呢？我們試圖以數列和級數的概念，探討這個踩階梯遊戲。因此，我們的研究目的為下列三項：

一、探討左腳步數和右腳步數之間的相關性。

二、觀察左右腳步的先後及次數的改變，走法數之關係式。

三、探討左右腳步的先後及次數的改變，走法數之公式。

参、研究設備與器材

方格紙、筆、筆記型電腦、國中課本、高中課本。

肆、研究過程與方法

一、研究一：探討左右腳步的先後及次數的改變，踩階梯的走法數。因為左腳和右腳踩階梯的情形是一樣的，所以只要討論左腳，就可以知道右腳。為了找出左右兩排各有 n 個階梯中，左腳的走法數隨著左腳所踩次數 L 的改變，走法數之規律及關聯性。首先，我們將按照程序把左腳的走法以圖示記錄下來，再統計其走法數，用數列表示。假設踩左腳的次數為 L，左右兩排各有 n 個階梯。隨著 L 值增加，以數列來表示左腳的走法數。

L / n	1	2	3	4	5	6	…	k-1	k
1	a_1								
2	a_2	b_2							
3	a_3	b_3	c_3						
4	a_4	b_4	c_4	d_4			…		
5	a_5	b_5	c_5	d_5	e_5				
6	a_6	b_6	c_6	d_6	e_6	f_6			
…									
k-1	a_{k-1}	b_{k-1}	c_{k-1}	d_{k-1}	e_{k-1}	f_{k-1}	…	y_{k-1}	
k	a_k	b_k	c_k	d_k	e_k	f_k		y_k	z_k
…									
m	a_m	b_m	c_m	d_m	e_m	f_m	…	y_m	z_m
m+1	a_{m+1}	b_{m+1}	c_{m+1}	d_{m+1}	e_{m+1}	f_{m+1}		y_{m+1}	z_{m+1}

將上表說明如下：

1.當左腳所踩的次數 L=1 時，隨著左右兩排的階梯數 n 的改變，以數列<a_i>表示左腳的走法數，$i \geq 1$，其中$a_1 = 1$。

2.當左腳所踩的次數 L=2 時，隨著左右兩排的階梯數 n 的改變，以數列<b_i>表示左腳的走法數，$i \geq 2$ ，其中$b_2 = 1$。

3.當左腳所踩的次數 L=3 時，隨著左右兩排的階梯數 n 的改變，以數列<c_i>表示左腳的走法數，$i \geq 3$，其中$c_3 = 1$。

4.當左腳所踩的次數 L=4 時，隨著左右兩排的階梯數 n 的改變，以數列<d_i>表示左腳的走法數，$i \ge 4$，其中 $d_4 = 1$。

5.當左腳所踩的次數 L=5 時，隨著左右兩排的階梯數 n 的改變，以數列<e_i>表示左腳的走法數，$i \ge 5$，其中 $e_5 = 1$。

6.當左腳所踩的次數 L=6 時，隨著左右兩排的階梯數 n 的改變，以數列<f_i>表示左腳的走法數，$i \ge 6$，其中 $f_6 = 1$。

7.以此類推，當左腳所踩的次數 L=k-1 時，隨著左右兩排的階梯數 n 的改變，以數列<y_i>表示左腳的走法數，$i \ge k-1$，其中 $y_{k-1} = 1$;當左腳所踩的次數 L=k 時，以數列<z_i>表示左腳的走法數，$i \ge k$，其中 $z_k = 1$.

二、研究二：當左腳所踩的次數 L=1，在左右兩排各有階梯數為 n 時，左腳的走法數。

(一)觀察：(見圖一)

當 n=1、2、3、4、5、6、…、m 時，

左腳的走法數分別有 1、2、3、4、5、6、…、m 種，

即 a_1=1、a_2=2、a_3=3、a_4=4、a_5=5、a_6=6、…、a_m=m.

(二)發現：

1.當踩左腳的次數 L=1，在左右兩排各有 n=m 個階梯時，

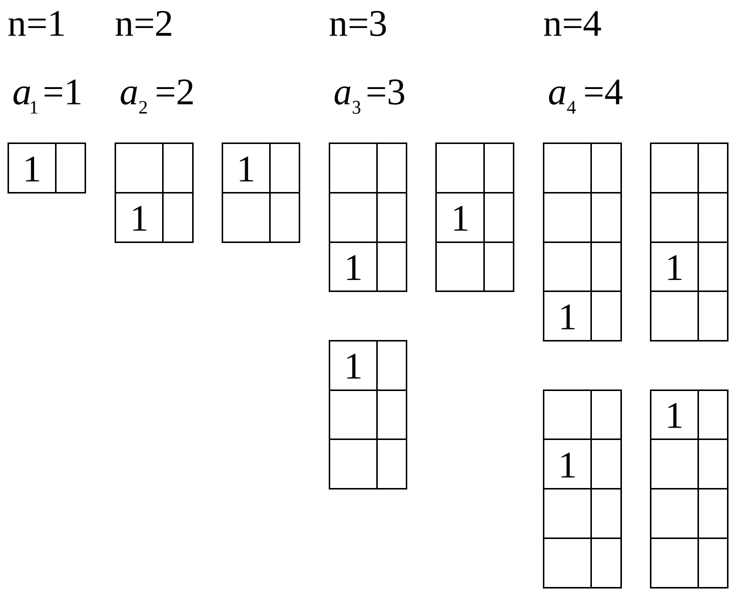
左腳的走法數有 m 種，即 a_m=m.

2.在左右兩排各有 n=m 個階梯時，

左腳所踩的次數+右腳所踩的次數=m

n	L=1	右腳所踩的次數
1	a_1=1	0
2	a_2=2	1
3	a_3=3	2
4	a_4=4	3
5	a_5=5	4
6	a_6=6	5
…		
m	a_m=m	m-1

圖一



三、研究三：當踩左腳的次數 L=2，在左右兩排各有階梯數為 n 時，左腳的走法數。

(一)觀察：(見圖二)

1.當 n=2 時，左腳的走法數有 1 種，則b_2=1.

2.當 n=3 時，左腳的走法數$b_3=(3-1)+(3-2)=2+1=1+2$.

3.當 n=4 時，左腳的走法數

$$b_4=(4-1)+(4-2)+(4-3)=3+2+1=1+2+3$$

4.當 n=5 時，左腳的走法數

$$b_5=(5-1)+(5-2)+(5-3)+(5-4)=4+3+2+1=1+2+3+4$$

5.當 n=6 時，左腳的走法數

$$b_6=(6-1)+(6-2)+(6-3)+(6-4)+(6-5)=5+4+3+2+1=1+2+3+4+5$$

(二)猜測：當 n=m 時，左腳的走法數

$$b_m=1+2+3+\dots+(m-1)=\sum_{n=1}^{m-1}n=\frac{(m-1)[(m-1)+1]}{2}=\frac{m(m-1)}{2}$$

(三)驗證：

當踩左腳的次數 L=2，左右兩排階梯數各為 n=m 時，其中 $b_2=1$，

左腳的走法數 $b_m=\sum_{n=1}^{m-1}N=\frac{m(m-1)}{2}=\frac{m(m-1)}{1\times 2}$,$(m\geq 2)$。

證明：1.當 n=2 時，$b_2=\frac{2(2-1)}{2}=\frac{2\times 1}{2}=1$，猜測是正確的。

2.設 n=m 時猜測正確，即 $b_m=\frac{m(m-1)}{1\times 2}$

則當 n=m+1 時，

$$b_{m+1}=b_m+\left[(m+1)-1\right]=\frac{m(m-1)}{2}+m==\frac{\left[(m-1)+2\right]\times m}{2}$$

$$=\frac{(m+1)\times m}{2}=\frac{(m+1)\left[(m+1)-1\right]}{2}$$

可知猜測是正確的。

故由數學歸納法可知：我們的猜測是正確的，

即對於所有正整數 m，$b_m=\frac{m(m-1)}{2}=\frac{m(m-1)}{1\times 2}$ ，$m\geq 2$

小結：

1.當踩左腳的次數 L=2，左右兩排階梯數各為 n=m 時，其中 $b_2=1$，左腳的走法數 $b_m=\sum_{n=1}^{m-1}n=\frac{m(m-1)}{2}=\frac{m(m-1)}{1\times 2}$,$(m\geq 2)$。

2.在左右兩排各有 n=m 個階梯時，

左腳所踩的次數+右腳所踩的次數=m

圖二

n=2

$b_2 = 1$

2	
1	

n=3

$b_3 = 3$

2	
1	

2	
1	

2	
1	

n=4

$b_4 = 6$

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

n=5 $b_5 = 10$

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

n=6 $b_6 = 15$

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

2	
1	

四、研究四：當踩左腳的次數 L=3，左右兩排階梯數各為 n 時，左腳的走法數。

(一)觀察.(見圖三)：

藉由記錄的圖示察覺列每一項數列所走法存在規律性，可得關係式：

1.$c_4 = b_3 + c_3$

2.$c_5 = b_4 + c_4$

3.$c_6 = b_5 + c_5$

4.同理可得：$c_m = b_{m-1} + c_{m-1}$

(二)分析

1.當 n=3 時，走法數 $c_3 = 1 = \dfrac{1\times 2}{2}$

2.當 n=4 時，走法數 $c_4 = 4 = b_3 + c_3 = \dfrac{2\times 3}{2} + \dfrac{1\times 2}{2}$

3.當 n=5 時，走法數 $c_5 = 10 = b_4 + c_4 = \dfrac{3\times 4}{2} + \dfrac{2\times 3}{2} + \dfrac{1\times 2}{2}$

4.當 n=6 時，走法數 $c_6 = 20 = b_5 + c_5 = \dfrac{4\times 5}{2} + \dfrac{3\times 4}{2} + \dfrac{2\times 3}{2} + \dfrac{1\times 2}{2}$

(三)猜測

當 n=m 時，左腳的走法數

$$c_m = b_{m-1} + c_{m-1} = \frac{(m-1)(m-2)}{2} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} + \ldots + \frac{4\times 3}{2} + \frac{3\times 2}{2} + \frac{2\times 1}{2}$$
$$= \sum_{n=1}^{m-2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m-2} n(n+1) = \frac{(m-2)(m-1)m}{6} = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$$

(四)驗證：當踩左腳的次數 L=3，左右兩排階梯數各為 n=m 時，

其中 $c_3 = 1$， $c_m = b_{m-1} + c_{m-1}$ $(m \geq 3)$，

左腳的走法數

$$c_m = \sum_{n=1}^{m-2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{m(m-1)(m-2)}{6} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}$$

證明：1.當 n=3 時，$c_3=\dfrac{3(3-1)(3-2)}{6}=\dfrac{3\times 2\times 1}{6}=1$，猜測是正確的。

2.設 n=m 時猜測正確，即 $c_m=\dfrac{m(m-1)(m-2)}{6}$

則當 n=m+1 時，

$$c_{m+1}=b_m+c_m=\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{6}=\frac{(m+1)m(m-1)}{6}$$
$$=\frac{(m+1)\left[(m+1)-1\right]\left[(m+1)-2\right]}{6}$$

可知猜測是正確的。

故由數學歸納法可知：我們的猜測是正確的，

即對於所有正整數 m，

$$c_m=\frac{m(m-1)(m-2)}{6}=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}\text{，}m\geq 3$$

小結：

1.當踩左腳的次數 L=3，左右兩排階梯數各為 n=m 時，

其中 $c_3=1$，$c_m=b_{m-1}+c_{m-1}$（$m\geq 3$），

左腳的走法數 $c_m=\sum_{n=1}^{m-2}\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{m(m-1)(m-2)}{6}=\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}$

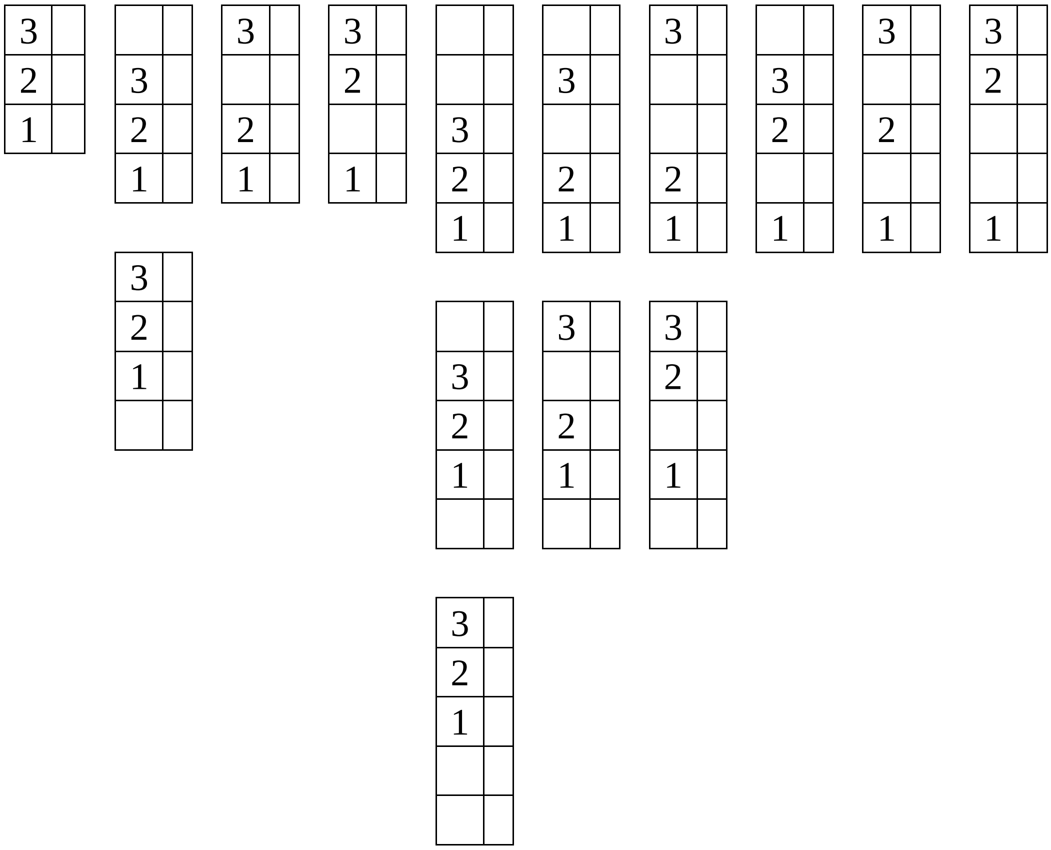
2.在左右兩排各有 n=m 個階梯時，

左腳所踩的次數+右腳所踩的次數=m

圖三

n=3　　n=4　　n=5

$c_3=1$　　$c_4=4$　　$c_5=10$



五、研究五：踩左腳的次數 L=4，左右兩排階梯數各為 n=m 時，左腳的走法數。

(一)觀察.(見圖四)：

每一項數列所記錄的走法存在規律性，可得關係式：

1. $d_5 = c_4 + d_4$

2. $d_6 = c_5 + d_5$

3.同理可得： $d_{\mathrm{m}} = c_{m-1} + d_{m-1}$

(二)分析

1.當 n=4 時，走法數 $d_4 = 1$

2.當 n=5 時，走法數 $d_5 = c_4 + d_4 = \frac{4\times3\times2}{6} + 1 = \frac{4\times3\times2}{6} + \frac{3\times2\times1}{6}$

3.當 n=6 時，走法數$c_6=c_5+d_5=\frac{5\times4\times3}{6}+\frac{4\times3\times2}{6}+\frac{3\times2\times1}{6}$

(三)猜測

當 n=m 時，可推得走法數

$$
\begin{aligned}
d_{\mathrm{m}} &= c_{m-1}+d_{m-1}\\
&=\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}+\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{6}+\ldots+\frac{5\times4\times3}{6}+\frac{4\times3\times2}{6}+\frac{3\times2\times1}{6}\\
&=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{m-3}n(n+1)(n+2)=\frac{1}{6}\times\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}\\
&=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\times2\times3\times4}
\end{aligned}
$$

(四)驗證：當踩左腳的次數為 L=4，左右兩排階梯數各為 n=m 時，

其中$d_4=1$， $d_{\mathrm{m}}=c_{m-1}+d_{m-1}$ （$m\geq4$），走法數

$$d_{\mathrm{m}}=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{m-3}n(n+1)(n+2)=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\times2\times3\times4}$$

證明：1.當 n=4 時，$d_4=\frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{24}=\frac{4\times3\times2\times1}{24}=1$，猜測是正確的。

2.設 n=m 時猜測正確，即$d_m=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}$

則當 n=m+1 時，

$$
\begin{aligned}
d_{m+1} &= c_m+d_m=\frac{m(m-1)(m-2)}{6}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}\\
&=\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{24}\\
&=\frac{(m+1)[(m+1)-1][(m+1)-2][(m+1)-3]}{1\times2\times3\times4}
\end{aligned}
$$

可知猜測是正確的。

故由數學歸納法可知：我們的猜測是正確的，

即對於所有正整數 m，

$$d_m=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\times2\times3\times4}\text{ ，}m\geq4$$

圖四

n=4 $d_4=1$

4	
3	
2	
1	

n=5 $d_5=5$

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

n=6 $d_6=15$

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

4	
3	
2	
1	

小結：

1.當踩左腳的次數為 L=4，左右兩排階梯數各為 n=m 時，

其中 $d_4=1$， $d_{\mathrm{m}}=c_{m-1}+d_{m-1}$（$m\geq 4$），

左腳的走法數

$$d_{\mathrm{m}}=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{m-3}n(n+1)(n+2)=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}$$

$$=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\times 2\times 3\times 4}$$

2.在左右兩排各有 n=m 個階梯時，

左腳所踩的次數+右腳所踩的次數=m

六、研究六：根據以上所的結果，做分析、猜測及驗證。

(一)分析：左右兩排階梯數各為 n 時，左腳的走法數隨著左腳所踩次數 L 的改變，左腳的走法數之規律及關聯性，整理成下表。

踩左腳的次數	左腳的走法數
L=1	$a_m = m = \frac{m}{1}$
L=2	$b_m = a_{m-1} + b_{m-1} = \frac{m(m-1)}{1\times 2}$
L=3	$c_m = b_{m-1} + c_{m-1} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}$
L=4	$d_{\mathrm{m}} = c_{m-1} + d_{m-1} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\times 2\times 3\times 4}$

(二)猜測：依照程序把走法記錄下來，發現存在規律性：

當 L=k 時， $z_{\mathrm{k}} = 1,\ z_{\mathrm{m}} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots[m-(k-1)]}{1\times 2\times 3\times\cdots\times k}$

(三)驗證：當踩左腳的次數為 L=k，左右兩排階梯數各為 n=m 時，

其中 $z_{\mathrm{k}} = 1$， $z_{\mathrm{m}} = y_{m-1} + z_{m-1}$ $(m \geq \mathrm{k})$，

以數學歸納法可得左腳的走法數

$$z_{\mathrm{m}} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots[m-(k-1)]}{1\times 2\times 3\times\cdots\times k}$$

證明：1.當 n=k 時，

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{k}} &= \frac{\mathrm{k(k-1)(k-2)}\cdots[k-(k-2)][\mathrm{k-(k-1)}]}{1\times 2\times\cdots\times \mathrm{k}} \\ &= \frac{\mathrm{k(k-1)(k-2)}\cdots\times 2\times 1}{1\times 2\times\cdots\times(k-1)\times k} = 1 \end{aligned},$$

猜測是正確的。

2.設 n=m 時猜測正確，即 $z_{\mathrm{m}} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(k-1)]}{1\times 2\times\cdots\times k}$

則當 n=m+1 時，

$$
\begin{aligned}
z_{m+1} &= y_m + z_m \\
&= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(k-2)]}{1\times 2\times\cdots\times(k-1)} + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(k-1)]}{1\times 2\times\cdots\times k} \\
&= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(k-2)][m-(k-1)+k]}{1\times 2\times\cdots\times k} \\
&= \frac{m(m-1)\cdots[m-(k-2)](m+1)}{1\times 2\times\cdots\times k} \\
&= \frac{(m+1)[(m+1)-1][(m+1)-2]\cdots[(m+1)-(k-1)]}{1\times 2\times\cdots\times k}
\end{aligned}
$$

可知猜測是正確的。

故由數學歸納法可知：我們的猜測是正確的，

即對於所有正整數 m，$z_{\mathrm{m}} = \dfrac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(k-1)]}{1\times 2\times\cdots\times k}$，$m \ge k$

小結

當踩左腳的次數 L=k，左右兩排階梯數各為 n=m 時，

其中 $z_{\mathrm{k}} = 1$，$z_{\mathrm{m}} = y_{m-1} + z_{m-1}$（$m \ge \mathrm{k}$），

左腳的走法數 $z_{\mathrm{m}} = \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots[m-(k-1)]}{1\times 2\times 3\times\cdots\times k}$

伍、研究結果

一、當左右兩排階梯數 n=m，當踩左腳的次數 L=k 時，則踩右腳的次數為 m-k。左腳和右腳踩階梯的情形是一樣的，所以只要討論左腳，就可以知道右腳。

二、當踩左腳的次數 L=1，左右兩排階梯數各為 n=m 時，左腳的走法數有 m 種，即 a_{m} =m.

三、當踩左腳的次數 L=2，左右兩排階梯數各為 n=m 時，其中 $b_2 = 1$，左腳的走法數

$$b_m = \sum_{n=1}^{m-1} n = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{1\times 2} \quad ,(m \geq 2)。$$

四、當踩左腳的次數 L=3，左右兩排階梯數各為 n=m 時，

其中 $c_3 = 1$，$c_m = b_{m-1} + c_{m-1} \quad (m \geq 3)$，左腳的走法數

$$c_m = \sum_{\mathrm{n}=1}^{m-2} \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2} = \frac{m(m-1)(m-2)}{6} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}$$

五、當踩左腳的次數為 L=4，左右兩排階梯數各為 n=m 時，其中 $d_4 = 1$，

$d_{\mathrm{m}} = c_{m-1} + d_{m-1} \quad (m \geq 4)$，左腳的走法數

$$d_{\mathrm{m}} = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{m-3} n(n+1)(n+2) = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}$$
$$= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\times 2\times 3\times 4}$$

六、當踩左腳的次數為 L=k，左右兩排階梯數各為 n=m 時，其中 $z_{\mathrm{k}} = 1$，

$z_{\mathrm{m}} = y_{m-1} + z_{m-1} \quad (m \geq \mathrm{k})$，左腳的走法數

$$z_{\mathrm{m}} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots[m-(k-1)]}{1\times 2\times 3\times \cdots \times k}$$

陸、討論

研究過程中，由簡單的圖示操作開始，察覺排列的規律，利用數列和級數的概念，推論到不可見的延伸圖形，並以數學符號”$\sum$ ”來精簡算式，從觀察中去發現、猜測，並驗證的方法，探討隨著左右腳步的先後及次數的改變，走法數中所隱含的數學意義。

一、左腳和右腳踩階梯的情形是一樣的，所以只要討論左腳，就可以知道右腳。而且，在左右兩排各有 n=m 個階梯時，左腳所踩的次數+右腳所踩的次數=m

二、圖示的過程必須依照程序，才能完整地記錄所有的走法，容易找出規律性。

以 $b_3 = 3$ 為例

2	
1	

→

2	
1	

→

2	
1	

三、察覺走法數中排列的規律，再藉由發現的規律，推論不可見的延伸圖形。

以 $\langle c_i \rangle$ 為例，各數列間的關聯性：

$a_2 + b_2 = c_3$，$b_3 + c_3 = c_4$，$c_4 + b_4 = c_5$，$c_5 + b_5 = c_6$，$\ldots$

n	L=1	L=2	L=3	L=4
1	$a_1 = 1$			
2	$a_2 = 2$	$b_2 = 1$		
3	$a_3 = 3$	$b_3 = 3$	$c_3 = 1$	
4	$a_4 = 4$	$b_4 = 6$	$c_4 = 4$	$d_4 = 1$
5	$a_5 = 5$	$b_5 = 10$	$c_5 = 10$	$d_5 = 5$
6	$a_6 = 6$	$b_6 = 15$	$c_6 = 20$	$d_6 = 15$

四、應用到的性質

(一)應用連續 2 個自然數乘積和 $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 的性質， 計算

$$c_m = \frac{(m-1)(m-2)}{2} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} + \ldots + \frac{4\times 3}{2} + \frac{3\times 2}{2} + \frac{2\times 1}{2}$$
$$= \sum_{n=1}^{m-2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$$

(二)應用連續 3 個自然數乘積和

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$ 的性質，

計算

$$d_{\mathrm{m}}=c_{m-1}+d_{m-1}$$
$$=\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}+\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{6}+\ldots+\frac{5\times4\times3}{6}+\frac{4\times3\times2}{6}+\frac{3\times2\times1}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{m-3}n(n+1)(n+2)=\frac{1}{6}\times\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}$$

五、根據前面研究得到的結果，做分析、猜測及驗證。

分析當左腳所踩次數 L=k，左右兩排階梯數各為 n=m 時，其中 $z_{\mathrm{k}}=1$, 左腳的走法數之關聯性 $z_{\mathrm{m}}=y_{m-1}+z_{m-1}$，猜測其走法數

$$z_{\mathrm{m}}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots[m-(k-1)]}{1\times2\times3\times\cdots\times k}$$ ，($m\geq\mathrm{k}$)，並以數學歸納法驗證之。

柒、結論

使用數列和級數的概念來探討踩階梯的遊戲，在左右兩排對稱各為 n 階的階梯中，隨著左右腳步的先後及次數的改變，探討踩階梯的走法數。研究發現有下列三項：

一、當左右兩排階梯數各為 n=m，踩左腳的次數 L=k 時，則踩右腳的次數為 m-k。

二、踩左腳的次數 $L=k-1$，則 $y_{\mathrm{k-1}}=1$； $L=k$ ，則 $z_{\mathrm{k}}=1$，

當左右兩排階梯數各為 n=m 時，走法數中存在著關聯性 $z_{\mathrm{m}}=y_{m-1}+z_{m-1}$,($m\geq\mathrm{k}$)。

三、當踩左腳的次數 L=k，左右兩排階梯數各為 n=m 時，其中 $z_{\mathrm{k}}=1$，左腳的走法數

$$z_{\mathrm{m}}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots[m-(k-1)]}{1\times2\times3\times\cdots\times k}$$ ，$m\geq\mathrm{k}$；同理可證右腳的走法數。

捌、參考資料

一、國中數學南一版第四冊第一章數列與級數

二、高中數學龍騰版第二冊第一章數列與級數