屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：怎麼都除不盡！——循環小數探秘

關 鍵 詞：循環小數、純循環小數、混循環小數

編號：A1033

目　　錄

摘　　要

一、分數化為小數的種類有 2 種，一種為有限小數，如：$\frac{1}{5}$＝0.2……等等可以整除的小數；另一種為循環小數，如：$\frac{1}{3}$＝$0.\overline{3}$、$\frac{1}{6}$＝$0.1\overline{6}$……等等除不盡的小數。

二、循環小數是一個具有循環規則而除不盡的小數，它可能在小數後面幾個位數或甚至全部位數都具有循環的特性，循環小數因除不盡，為表示方便，所以在小數具有循環特性的位數上，作上記號表示之，稱為「循環節」，有三種表示方式，分別是：$0.\overline{3}$、$0.\dot{3}$、0.｛3｝。

三、循環小數有 2 種，一種是純循環小數，另一種是混循環小數。純循環小數是指小數全部位數都具有循環的特性，例如：$\frac{1}{3}$＝0.3333333……，記作 $0.\overline{3}$。混循環小數是指分數化為小數，分子÷分母的計算中，會有不是一開始就出現循環小數，而是後來才出現循環的小數，例如：$\frac{1}{6}$＝0.166666……，記作 $0.1\overline{6}$。

四、循環小數的特性：

(一)最簡分數 $\frac{q}{p}$ 化成循環小數時，其循環節的位數必不多於(p－1)位。例如：$\frac{1}{7}$＝$0.\overline{142857}$，循環節有(7－1)＝6 位。

(二)混循環小數未循環的位數與分母的質因數 2 和 5 的多寡有關，分母含有質因數 2 或 5，又含有其他質因數時，這個分數一定可以化為混循環小數，而且不循環部分的位數等於分母的質因數 2 與 5 中個數較多的那個數的個數。

五、要將循環小數化為分數，方式可分為純循環小數化為分數與混循環小數化為分數 2 種。

(一)純循環小數化為分數，分子是循環節的數字，分母則為 9，例如：$0.\overline{3}$＝$\frac{3}{9}$＝$\frac{1}{3}$。

(二)混循環小數化為分數，分子是小數點後面第一個數字到第一個循環節的末位數字組成的數，與不循環部分數字所組成之數的差，分母的前幾位是 9，後幾位為 0，其中 9 的個數等於循環節的位數，0 的個數等於不循環部分的位數，最後將所得的分數化為最簡分數。例如：$2.12\overline{54}$＝$2\frac{1242}{9900}$＝$2\frac{69}{550}$，分子是 1254－12＝1242，分母是 9900。

壹、 研究動機

老師在檢討暑假作業時，老師教我們把 1÷3 化為分數等於 $\frac{1}{3}$ ，老師突然問我們會不會把 $\frac{1}{3}$ 化為小數，我們都說不會，老師就教我們用直式去除(1÷3)，這題很好算，答案是 0.33……，但這一題是除不盡的，如果一直除下去，3 會一直重複，老師說這種除不盡的小數叫做循環小數，什麼是循環小數？這個問題在一直在我的腦海裡縈繞，下課忍不住去問老師什麼是循環小數，老師問我想不想探究，我立即邀好友一起來研究。

在這個研究當中，我們想了解什麼是循環小數，再則是學習如何把循環小數化為分數，老師說我們的想法很好，可以試試看，於是我們展開有關循環小數的研究之旅。

貳、研究目的

一、分數化為小數的種類。

二、了解循環小數的意義。

三、了解循環小數的種類。

四、了解循環小數的特性。

五、了解如何將循環小數化為分數。

參、研究設備及器材

數學課本(康軒版五下)、計算紙、筆、電腦、網際網路參考資料⋯。

肆、研究過程及方法

一、分數化為小數的種類

任何一個分數都能化成小數，一種是有限小數，當最簡分數 $\frac{a}{b}$ 的分母除了 2 和 5 之外，沒有其他質因數時，$\frac{a}{b}$ 就能化成一個有限小數，如：$\frac{1}{5}=0.2$、$\frac{1}{10}=\frac{1}{2\times5}=0.1$、$\frac{1}{2}=0.5$……。

另一種為循環小數，當最簡分數 $\frac{a}{b}$ 的分母除了 2 或 5 之外，還含有其他質因數時，$\frac{a}{b}$ 就能化成一個循環小數，如：$\frac{1}{3}=0.\overline{3}$、$\frac{1}{11}=0.\overline{09}$、$\frac{7}{30}=\frac{7}{2\times5\times3}=0.2\overline{3}$……。

二、循環小數的意義

循環小數是一個具有循環規則而除不盡的小數，它可能在小數後面幾個位數或全部位數都具有循環的特性。

循環小數因為除不盡，為表示方便，所以我們在小數具有循環特性的位數上，做上記號表示之，稱為「循環節」，有下列三種表示方式：

(一) 使用「上劃線」表示，如：$\frac{1}{3}=0.\overline{3}$

(二) 使用「上點」表示，如：$\frac{1}{3}=0.\dot{3}$

(三) 使用「大括號」表示，如：$\frac{1}{3}=0.\{3\}$

在本研究中，我們將使用上劃線來表示循環小數。

三、循環小數的種類

(一)純循環小數

純循環小數是指小數全部位數都具有循環的特性，例如：$\frac{1}{3}=0.3333333$……，記作 $0.\overline{3}$，3 一直重複出現，循環不已。那什麼狀況會出現純循環小數呢？若最簡分數 $\frac{a}{b}$的分母 b 含有 2 或 5 以外的質因數(即 b 的質因數與 2 或 5 互質)，該分數化為小數就會出現純循環小數，如：$\frac{1}{3}=0.\overline{3}$、$\frac{1}{11}=0.\overline{09}$、$\frac{1}{53}=0.\overline{0188679245283}$。

再如 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、……、$\frac{1}{50}$ 這 49 個分數中，有多少個純循環小數？

解：分母的質因數與 2 或 5 互質的分數即是純循環小數。

分母含有 2 的共有 50÷2=25 個

分母含有 5 的共有 50÷5=10 個

分母同時含有 2 和 5 的共 50÷10=5 個

因此不含 2 和 5 的有 49-25-10+5=19 個。

$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、……、$\frac{1}{50}$ 這 49 個分數中，有 19 個可以化為純循環小數，分別是 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{7}$、$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{11}$、$\frac{1}{13}$、$\frac{1}{17}$、$\frac{1}{19}$、$\frac{1}{21}$、$\frac{1}{23}$、$\frac{1}{27}$、$\frac{1}{29}$、$\frac{1}{31}$、$\frac{1}{33}$、$\frac{1}{37}$、$\frac{1}{39}$、$\frac{1}{41}$、$\frac{1}{43}$、$\frac{1}{47}$、$\frac{1}{49}$。

(二)混循環小數

混循環小數是指分數化小數，分子÷分母的計算中，不是一開始就出現循環小數，而是後來才出現循環的小數，例如：$\frac{61}{495}$＝0.1232323……，記作 $0.1\overline{23}$，剛開始出現 1，接著 2、3 一直重複出現，循環不已。

我們發現分母同時含有 2 或 5 及其他質因數的分數，該分數化成小數就會出現混循環小數，如：$\frac{1}{6}$＝$0.1\bar{6}$，分母 6 有質因數 2、3；$\frac{8}{65}$＝$0.1\overline{230769}$，分母 65 有質因數 5、13；$\frac{71}{150}$＝$0.47\bar{3}$，分母 150 有質因數 2、3 和 5。

四、循環小數的特性

(一)最簡分數 $\frac{q}{p}$ 化成循環小數時，其循環節的位數必不多於(p−1)位

對任意分數 $\frac{q}{p}$ 作除法時，我們必然會遇到早先出現過的一個餘數，餘數只可能是 1，2，3……，p−1。0 不包括在餘數中，因為它的出現就表示除法已經結束，而且小數是有限的，現在由於餘數只可能有 $p-1$ 個數字，那麼在第 p 步或更早些，就會開始重複。所以 $\frac{q}{p}$ 的小數展開式是循環的，並且它的循環節至多是 $p-1$ 位。例如：$\frac{1}{7}$ ＝$0.\overline{142857}$ ，循環節是 6 位(7−1)。我們將分子是 1，分母從 3 到 49 會產生循環小數的分數作成下表。

分數	循環小數	循環節的數字	循環節位數
$\frac{1}{3}$	$0.\overline{3}$	3	1
$\frac{1}{7}$	$0.\overline{142857}$	142857	6
$\frac{1}{9}$	$0.\overline{1}$	1	1
$\frac{1}{11}$	$0.\overline{09}$	09	2
$\frac{1}{13}$	$0.\overline{076923}$	076923	6
$\frac{1}{17}$	$0.\overline{0588235294117647}$	0588235294117647	16
$\frac{1}{19}$	$0.\overline{052631578947368421}$	052631578947368421	18
$\frac{1}{21}$	$0.\overline{047619}$	047619	6
$\frac{1}{23}$	$0.\overline{0434782608695652173913}$	0434782608695652173913	22
$\frac{1}{27}$	$0.\overline{037}$	037	3
$\frac{1}{29}$	$0.\overline{0344827586206896551724137931}$	0344827586206896551724137931	28
$\frac{1}{31}$	$0.\overline{032258064516129}$	032258064516129	15
$\frac{1}{33}$	$0.\overline{03}$	03	2
$\frac{1}{37}$	$0.\overline{027}$	027	3
$\frac{1}{39}$	$0.\overline{025641}$	025641	6
$\frac{1}{41}$	$0.\overline{02439}$	02439	5
$\frac{1}{43}$	$0.\overline{023255813953488372093}$	023255813953488372093	21
$\frac{1}{47}$	A	B	46
$\frac{1}{49}$	C	D	42

A＝$0.\overline{0212765957446808510638297872340425531914893617}$

B＝0212765957446808510638297872340425531914893617

C＝$0.\overline{020408163265306122448979591836734693877551}$

D＝0204081632653061224489795918367346938775551

我們發現真的是如上所述：當最簡分數 $\frac{a}{b}$ 化成循環小數時，其循環節的位數必不多於(b－1)位。我們以 $\frac{1}{7}$ 為例，發現它的餘數依序為 3、2、6、4、5、1，餘數為 1 到 6，即循環節為 7－1＝6 位；我們再以 $\frac{1}{17}$ 為例，發現它的餘數依序為 10、15、14、4、6、9、5、16、7、2、3、13、11、8、12、1，餘數為 1 到 16，即循環節為 17－1＝16 位。

分數	循環小數	循環節位數	各循環節的餘數
$\frac{1}{3}$	$0.\overline{3}$	1	1
$\frac{1}{7}$	$0.\overline{142857}$	6	3、2、6、4、5、1
$\frac{1}{9}$	$0.\overline{1}$	1	1
$\frac{1}{11}$	$0.\overline{09}$	2	10、1
$\frac{1}{13}$	$0.\overline{076923}$	6	10、9、12、3、4、1
$\frac{1}{17}$	$0.\overline{0588235294117647}$	16	10、15、14、4、6、9、5、16、7、2、3、13、11、8、12、1
$\frac{1}{19}$	$0.\overline{052631578947368421}$	18	10、5、12、6、3、11、15、17、18、9、14、7、13、16、8、4、2、1
$\frac{1}{21}$	$0.\overline{047619}$	6	10、16、13、4、19、1
$\frac{1}{23}$	$0.\overline{0434782608695652173913}$	22	10、8、11、18、19、6、14、2、20、16、22、13、15、12、5、4、17、9、21、3、7、1
$\frac{1}{27}$	$0.\overline{037}$	3	10、19、1
$\frac{1}{29}$	$0.\overline{0344827586206896551724137931}$	28	10、13、14、24、8、22、17、25、18、6、2、20、26、28、19、16、15、5、21、7、12、4、11、23、27、9、3、1

$\frac{1}{31}$	$0.\overline{032258064516129}$	15	10、7、8、18、25、2、20、14、16、5、19、4、9、28、1
$\frac{1}{33}$	$0.\overline{03}$	2	10、1
$\frac{1}{37}$	$0.\overline{027}$	3	10、26、1
$\frac{1}{39}$	$0.\overline{025641}$	6	10、22、25、16、4、1
$\frac{1}{41}$	$0.\overline{02439}$	5	10、18、16、37、1
$\frac{1}{43}$	$0.\overline{023255813953488372093}$	21	10、14、11、24、25、35、6、17、41、23、15、21、38、36、16、31、9、4、40、13、1
$\frac{1}{47}$	A	46	10、6、13、36、31、28、45、27、35、21、22、32、38、4、40、24、5、3、30、18、39、14、46、37、41、34、11、16、19、2、20、12、26、25、15、9、43、7、23、42、44、17、29、8、33、1
$\frac{1}{49}$	B	42	10、2、20、4、40、8、31、16、13、32、26、15、3、30、6、11、12、22、24、44、48、39、47、29、45、9、41、18、33、36、17、23、34、46、19、43、38、37、27、25、5、1

A＝$0.\overline{0212765957446808510638297872340425531914893617}$

B＝$0.\overline{020408163265306122448979591836734693877551}$

(二)混循環小數未循環的位數與分母的質因數 2 和 5 的多寡有關

老師要我們以 1 當分子，3 當分母，再逐次加入 2 和 5 到分母中，看看會有什麼變化，我們分組計算，結果如下表。

分母 2 和 5 的多寡	分數	循環小數
1 個 2	$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{6}$	$0.1\overline{6}$
2 個 2	$\frac{1}{2\times2\times3}=\frac{1}{12}$	$0.08\overline{3}$
3 個 2	$\frac{1}{2\times2\times2\times3}=\frac{1}{24}$	$0.041\overline{6}$
4 個 2	$\frac{1}{2\times2\times2\times2\times3}=\frac{1}{48}$	$0.0208\overline{3}$
5 個 2	$\frac{1}{2\times2\times2\times2\times2\times3}=\frac{1}{96}$	$0.01041\overline{6}$
1 個 5	$\frac{1}{5\times3}=\frac{1}{15}$	$0.0\overline{6}$
2 個 5	$\frac{1}{5\times5\times3}=\frac{1}{75}$	$0.01\overline{3}$
3 個 5	$\frac{1}{5\times5\times5\times3}=\frac{1}{375}$	$0.002\overline{6}$
4 個 5	$\frac{1}{5\times5\times5\times5\times3}=\frac{1}{1875}$	$0.0005\overline{3}$
5 個 5	$\frac{1}{5\times5\times5\times5\times5\times3}=\frac{1}{9375}$	$0.00010\overline{6}$
2 個 2，1 個 5	$\frac{1}{2\times2\times5\times3}=\frac{1}{60}$	$0.01\overline{6}$
2 個 5，1 個 2	$\frac{1}{5\times5\times2\times3}=\frac{1}{150}$	$0.00\overline{6}$
3 個 2，2 個 5	$\frac{1}{2\times2\times2\times5\times5\times3}=\frac{1}{600}$	$0.001\overline{6}$
3 個 5，2 個 2	$\frac{1}{5\times5\times5\times2\times2\times3}=\frac{1}{1500}$	$0.000\overline{6}$
1 個 2，1 個 5	$\frac{1}{2\times5\times3}=\frac{1}{30}$	$0.0\overline{3}$
2 個 2，2 個 5	$\frac{1}{2\times2\times5\times5\times3}=\frac{1}{300}$	$0.00\overline{3}$
3 個 2，3 個 5	$\frac{1}{2\times2\times2\times5\times5\times5\times3}=\frac{1}{3000}$	$0.000\overline{3}$

我們發現，混循環小數未循環的位數與分母的質因數 2 和 5 的多寡有關，根據上表，當分子與分母互質，且分母有 1 個 2 或 1 個 5，混循環小數未循環的位數就有一位，例如：$\frac{1}{2\times3}=0.1\overline{6}$，$\frac{1}{5\times3}=0.0\overline{6}$；當分子與分母互質，且分母有 2 個 2 或 2 個 5，混循環小數未循環的位數就有二位，例如：$\frac{1}{2\times2\times3}=0.08\overline{3}$，$\frac{1}{5\times5\times3}=0.01\overline{3}$；當分子與分母互質，且分母有 3 個

2 或 3 個 5，混循環小數未循環的位數就有三位，例如：$\frac{1}{2\times2\times2\times3}$＝$0.041\bar{6}$，$\frac{1}{5\times5\times5\times3}$＝$0.002\bar{6}$……。

當分子與分母互質，且分母分別有質因數 2 和 5 時，就看 2 比較多，還是 5 比較多，哪一個多，未循環的位數就以那一個數字為準，當分子與分母互質，分母有質因數 2 個 2 及 1 個 5，或者分母是 1 個 2 及 2 個 5，混循環小數未循環的位數就有二位，例如：$\frac{1}{2\times2\times5\times3}$＝$0.01\bar{6}$，$\frac{1}{5\times5\times2\times3}$＝$0.00\bar{6}$；當分子與分母互質，分母有質因數 3 個 2 及 2 個 5，或者是 2 個 2 及 3 個 5，混循環小數未循環的位數就有三位，例如：$\frac{1}{2\times2\times2\times5\times5\times3}$＝$0.001\bar{3}$，$\frac{1}{5\times5\times5\times2\times2\times3}$＝$0.001\bar{3}$，……。

當分子與分母互質，且分母有同個數的質因數 2 和 5，混循環小數未循環的位數就有幾位，例如：$\frac{1}{2\times5\times3}$＝$0.0\bar{3}$，分母有 1 個 2 和 1 個 5，未循環的位數有 1 位；$\frac{1}{2\times2\times5\times5\times3}$＝$0.00\bar{3}$，分母有 2 個 2 和 2 個 5，未循環的位數有 2 位；$\frac{1}{2\times2\times2\times5\times5\times5\times3}$＝$0.000\bar{3}$，……。其實，當分母有同個數的質因數 2 和 5，就是 10 的倍數，有 1 個 2 和 1 個 5，就是 10，小數位數就多 1 位；有 2 個 2 和 2 個 5，就是 100，小數位數就多 2 位；有 3 個 2 和 3 個 5，就是 1000，小數位數就多 3 位，……。

五、循環小數化為分數

老師告訴我們，將循環小數化為分數的秘訣就是用擴倍法將循環節的小數去掉，方式有二種：

(一)純循環小數

令$x \ =0.\overline{a_1a_2a_3\cdots a_n}$

則$10^nx=a_1a_2a_3\ldots a_n.\overline{a_1a_2a_3\cdots a_n}$

$10^nx-x \ =a_1a_2a_3\ldots a_n.\overline{a_1a_2a_3\cdots a_n}-0.\overline{a_1a_2a_3\cdots a_n}$

$x \ =\frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{999\ldots9}$

(二)混循環小數

令$x=0.a_1a_2a_3\cdots a_n\overline{b_1b_2b_3\cdots b_m}$。

則$10^n x=a_1a_2a_3\cdots a_n.\overline{b_1b_2b_3\cdots b_m}$——①式。

$10^{n+m}x=a_1a_2a_3\cdots a_nb_1b_2b_3\cdots b_m.\overline{b_1b_2b_3\cdots b_m}$——②式。

②−①⇒

$\left(10^{n+m}-10^n\right)x=a_1a_2a_3\cdots a_nb_1b_2b_3\cdots b_m-a_1a_2a_3\cdots a_n$。

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{a_1a_2a_3\cdots a_nb_1b_2b_3\cdots b_m-a_1a_2a_3\cdots a_n}{10^{n+m}-10^n}\\
&=\frac{a_1a_2a_3\cdots a_nb_1b_2b_3\cdots b_m-a_1a_2a_3\cdots a_n}{10^n\left(10^m-1\right)}\\
&=\frac{a_1a_2a_3\cdots a_nb_1b_2b_3\cdots b_m-a_1a_2a_3\cdots a_n}{\underbrace{1000\cdots0}_{n}\times\underbrace{999\cdots9}_{m}}\\
&=\frac{a_1a_2a_3\cdots a_nb_1b_2b_3\cdots b_m-a_1a_2a_3\cdots a_n}{\underbrace{999\cdots9}_{m}\underbrace{000\cdots0}_{n}}
\end{aligned}
$$

經由老師的指導，我們了解純循環小數化為分數，分子是循環節的數字，分母則為 9，例如：$0.\overline{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，$3.\overline{45}=3\frac{45}{99}=3\frac{5}{11}$。如果是混循環小數化為分數，分子是小數點後面第一個數字到第一個循環節的末位數字組成的數，與不循環部分數字所組成之數的差，分母的前幾位是 9，後幾位為 0，其中 9 的個數等於循環節的位數，0 的個數等於不循環部分的位數，最後將所得的分數化為最簡分數。例如：$0.0\overline{3}=\frac{3-0}{90}=\frac{3}{90}=\frac{1}{30}$。$2.12\overline{54}=2\frac{1254-12}{9900}=2\frac{1242}{9900}=2\frac{69}{550}$。

伍、研究結果

經由老師的指導，我們知道：

一、分數化為小數的種類有 2 種，一種為有限小數，如：0.2、0.3、0.5……等等可以整除的小數；另一種為循環小數，如：$0.\overline{3}$、$0.\overline{09}$、$0.2\overline{3}$……等等除不盡的小數。

二、循環小數是一個具有循環規則而除不盡的小數，它可能在小數後面幾個位數或甚至全部位數都具有循環的特性，循環小數因除不盡，為表示方便，所以在小數具有循環特性的位數上，作上記號表示之，稱為「循環節」，如：0.3333……＝$0.\overline{3}$，在 3 的上面畫一橫線表示循環節。

三、循環小數有 2 種，一種是純循環小數，另一種是混循環小數。純循環小數是指小數全部位數都具有循環的特性，例如：$\frac{1}{3}$＝0.3333333……，記作 $0.\overline{3}$，3 一直重複出現，循環不已。混循環小數是指分數化小數，分子÷分母的計算中，會有不是一開始就出現循環小數，而是後來才出現循環的小數，例如：$\frac{61}{495}$＝0.1232323……，記作 $0.1\overline{23}$，剛開始出現 1，接著 2、3 一直重複出現，循環不已。

四、循環小數的特性：

(一)最簡分數 $\frac{q}{p}$ 成循環小數時，其循環節的位數必不多於(P－1)位。例如：$\frac{1}{7}$＝$0.\overline{142857}$，循環節有(7－1)＝6 位。

(二)混循環小數未循環的位數與分母的質因數 2 和 5 的多寡有關，分母既含有質因數 2 或 5，又含有其他質因數時，這個分數一定可以化為混循環小數，並且不循環部分的位數等於分母的質因數 2 與 5 中個數較多的那個數的個數。

五、要將循環小數化為分數，方式可分為純循環小數化為分數與混循環小數化為分數 2 種。

(一)純循環小數化為分數，分子是循環節的數字，分母則為 9，例如：$0.\overline{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，$0.\overline{12}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$。

(二)混循環小數化為分數，循環小數有幾位循環化為分數時的分母就寫幾個 9，小數點後有幾位不循環就寫幾個 0，而分子部份是將循環小數全部寫上去減去不循環的數字，然後化為最簡分數即可。例如：$2.12\overline{54}=2\frac{1254-12}{9900}=2\frac{1242}{9900}=2\frac{69}{550}$。

陸、結論

一、判斷最簡分數$\frac{a}{b}$ 是否為循環小數，方法為當 $\frac{a}{b}$ 的分母 b 如果不能完全拆解成 2 與 5 的乘積，這個分數$\frac{a}{b}$ 就是循環小數，如：$\frac{1}{3}=0.\overline{3}$、$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}=0.1\overline{6}$，$\frac{1}{15}=\frac{1}{5\times3}=0.0\overline{6}$、$\frac{7}{30}=\frac{7}{2\times5\times3}=0.2\overline{3}$……。

二、判斷最簡分數 $\frac{a}{b}$ 是否為純循環小數，方法為當 $\frac{a}{b}$ 的分母 b 是和 2 或 5 互質的數，該分數化為小數就是純循環小數，如：$\frac{1}{3}=0.\overline{3}$、$\frac{1}{11}=0.\overline{09}$。

三、判斷最簡分數 $\frac{a}{b}$ 是否為混循環小數，只要分母 b 同時是 2 或 5 及其他質因數的分數，該分數化成小數就會出現混循環小數，如：$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}=0.1\overline{6}$，分母 6 有質因數 2 和 3，$\frac{1}{15}=\frac{1}{5\times3}=0.0\overline{6}$，分母 15 有質因數 3 和 5，$\frac{1}{30}=\frac{1}{2\times3\times5}=0.0\overline{3}$，分母 30 有質因數 2、3 和 5。

四、最簡分數 $\frac{q}{p}$ 化成循環小數時，其循環節的位數必不多於($P-1$)位。因為 q 除以 p 所得到的餘數 r 一定不會大於除數 p，那麼反覆除法運算所得到的餘數一定是 1 至 p-1 之間的數字，所以循環節的位數必不多於($P-1$)位。。如：$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$，餘數依序為 3、2、6、4、5、1，餘數為 1 到 6，即循環節為 7－1＝6 位。

五、循環小數不循環節長度與 2 或 5 有關：

(一) 分母有一個 2 或一個 5，未循環節長度就+1，如: $\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}=0.1\overline{6}$，$\frac{1}{15}=\frac{1}{5\times3}=0.0\overline{6}$ 未循環節有 1 位。

(二) 分母同時含有 2 的 m 次方或 5 的 n 次方時，未循環節為 max(m，n)，如: $\frac{1}{1500}=\frac{1}{2\times2\times3\times5\times5\times5}=0.000\overline{6}$，未循環節有 3 位。

柒、參考資料

分數化為小數‧檢索日期：110.01.03‧https://edisonx.pixnet.net/blog/post/69611581

巧看循環小數(1)‧ 檢索日期：109.12.26‧取自 http://www.mathland.idv.tw/fun/recurring.htm

國民小學數學第十冊 (2021)‧新北市：康軒文教事業股份有限公司。

陳永高主編(2004)‧*小學數學奧林匹克 1+2 訓練，六年級*‧台北縣：新潮社文化事業有限公司

循環小數化分數 (2016 年 12 月 7 日)‧*文匯報*‧檢索日期：110.02.01‧取自 http://paper.wenweipo.com/2016/12/07/ED1612070041.htm

維基百科‧*循環小數*‧檢索日期：109.12.28。取自：http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%BE%AA%E7%8E%AF%E5%B0%8F%E6%95%B0