

屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：步步為「贏」

關 鍵 詞：倍數、四則運算

編號：A1025

製作說明：

- 1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
- 2.編號：自報名系統報名完取得作品編號後，先填寫回作品封面上，再存成 docx 及 pdf 檔後再上傳。
- 3.封面編排由參展作者自行設計。

作品名稱：步步為「贏」

摘要

甲、乙兩人輪流挑選數字的遊戲，規則說明：甲先選，遊戲者必須輪流從2~5中選擇一數，但不可重複對方剛選的數，而且和對方選的數字和不能等於7(2+5)。如此下去，將兩人所選的數字累加起來，當累加至一個給定的正整數20者算贏（動彈不得或故意讓累加的數字超過20者算輸）。下表是甲、乙兩人玩這遊戲的過程：

- ① 甲選2；剩下數字為18 ② 乙選4；剩下數字為14
③ 甲選2；剩下數字為12 ④ 乙選3；剩下數字為9
⑤ 甲選2；剩下數字為7 ⑥ 乙選4；剩下數字為3
⑦ 甲選2；剩下數字為1，故甲贏。

20	2	3	4	5	剩下數字
甲	●				18
乙			●		14
甲	●				12
乙		●			9
甲	●				7
乙			●		3
甲	●				1(贏)

試問：甲或乙有必勝的策略？甲或乙有必勝策略的數字為哪些？

若將選數範圍從2~5，改為2~6、2~7、2~8、2~9、2~10，其餘遊戲規則不變，試問：甲或乙有必勝的策略？甲或乙有必勝策略的數字分別為哪些？是否可以找出規律而推論出數學式子？

壹、研究動機

在學數學的過程中，數學免不了給人的感覺就是除了要算還是要算，這是我們對於學數學的刻板印象與模式，難道數學就只侷限於計算解題嗎？有沒有更好玩的學習內容呢？而不是單純只是算數學而已。於是我們就去請教老師，老師也就丟給我們一個數學遊戲題目：如同摘要陳述，而老師也說：「在屏東縣第58屆中小學科學展覽會已有作品：「奇」善之家-制敵機先，該作品選數範圍是從1開始：1~5、1~6、1~7，分別找出規律並且推論出數學式子。這次我們的選數範圍不是從1開始，選數範圍如下：2~5、2~6、2~7、2~8、2~9、2~10，其餘規則不變，試問：甲或乙有必勝的策略？甲或乙有必勝策略的數字分別為哪些？是否可以找出規律而推論出數學式子？而且你們在109學年度上學期已學過南一版數學第七冊（四上），第一單元：一億以內的數、第二單元：乘法、第八單元：整數四則，相信就你們所學的，可以試試看。」也因此展開我們的數學研究之旅。

貳、研究目的

- 一、選數範圍為2~5，每次雙方選的數字和分別不能等於7(2+5)，結果如何？是否可以找出規律而推論出數學式子？
- 二、選數範圍為2~6，每次雙方選的數字和分別不能等於8(2+6)，結果如何？是否可以找出規律而推論出數學式子？

- 三、選數範圍為 2~7，每次雙方選的數字和分別不能等於 9(2+7)，結果如何？是否可以找出規律而推論出數學式子？
- 四、選數範圍為 2~8，每次雙方選的數字和分別不能等於 10(2+8)，結果如何？是否可以找出規律而推論出數學式子？
- 五、選數範圍為 2~9，每次雙方選的數字和分別不能等於 11(2+9)，結果如何？是否可以找出規律而推論出數學式子？
- 六、選數範圍為 2~10，每次雙方選的數字和分別不能等於 12(2+10)，結果如何？是否可以找出規律而推論出數學式子？

參、 研究設備及器材

紙、筆。

肆、 研究過程或方法

- 一、問題一：選數範圍為 2~5，每次雙方選的數字和分別不能等於 7(2+5)，結果如何？是否可以找出規律而推論出數學式子？

分析如下：

- (一)數字 2, 3, 4, 5，顯然都是甲會贏。
- (二)數字 6, 7，甲會贏（甲須選取 5，甲就贏了）。
- (三)數字 8, 9, 10，甲會贏（甲須選取 2，甲就贏了）。
- (四)數字 11, 12, 13，甲會贏（甲須選取 2 或 5 時，甲就會贏了）。
- (五)接下來的數字 14~18，甲都會贏。甲要贏，一開始可以選擇情形，說明如下：

1.甲選 2，乙只能選 3 或 4：

- (1)甲選 2，乙選 3，扣掉第一輪的數字和 5，剩下 9、10、11、12、13，接著甲只要選 2，甲就會贏了（由肆之一之(三)、(四)知道，甲會贏）。

所以給定的數字為 14、15、16、17、18，甲會贏。

- (2)甲選 2，乙選 4，扣掉第一輪的數字和 6，剩下 8、9、10、11、12、13，接著甲只要選 2，甲就會贏了（由肆之一之(三)、(四)知道，甲會贏）。

所以給定的數字為 14、15、16、17、18、19，甲會贏。

2.甲選 5，乙只能選 3 或 4：

- (1)甲選 5，乙選 3，扣掉第一輪的數字和 8，

①剩下 6、7，接著甲只要選 5，甲就會贏了（由肆之一之(二)知道，甲會贏）。

所以給定的數字為 14、15，甲會贏。

②剩下 8、9、10、11、12、13，接著甲只要選 2，甲就會贏了（由肆之一之(三)、(四)知道，甲會贏）。所以給定的數字為 16、17、18、19、20、21，甲會贏。

- (2)甲選 5，乙選 4，扣掉第一輪的數字和 9，

①剩下 5、6、7，接著甲只要選 5，甲就會贏了（由肆之一之(一)、(二)知道，甲會贏）。所以給定的數字為 14、15、16，甲會贏。

②剩下 8、9、10、11、12、13，接著甲只要選 2，甲就會贏了（由肆之一之(三)、(四)知道，甲會贏）。所以給定的數字為 17、18、19、20、21、22，甲會贏。

將上述的結果整理為如下的表格

數字	2~18
誰會贏	甲

接下來的 19~23、……，也都可以按照肆之一之(五)的討論來分析，而且最主要是因為甲贏的數字(2~18)都是連續整數，乙沒有可以贏的數字，依此下去分析，可以得到的推論：選數範圍為 2~5，不可重複對方剛選的數，而且和對方選的數字和不能等於 7(2+5)，結果為除了 1 以外的任何數字，甲都會贏。

二、問題二：選數範圍為 2~6，每次雙方選的數字和分別不能等於 8(2+6)，結果如何？是否可以找出規律而推論出數學式子？

分析如下：

(一)數字 2, 3, 4, 5, 6，顯然都是甲會贏。

(二)數字 7, 8，甲會贏（甲須選取 6，甲就贏了）。

(三)數字 9, 10, 11, 12，甲會贏（甲須選取 2，甲就贏了）。

(四)數字 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23，甲會贏（甲須選取 2 或 6 時，甲就會贏了）。

(五)接下來的數字，甲都會贏。甲要贏，一開始可以選擇情形，說明如下：

1.甲選 2，乙能選 3 或 4 或 5：

(1)甲選 2，乙選 3，扣掉第一輪的數字和 5，剩下的數字會是 19 以上的數字，接著甲只要選 2 或 6，甲就會贏了（由肆之二之(四)知道，甲會贏）。

(2)甲選 2，乙選 4，扣掉第一輪的數字和 6，剩下的數字會是 18 以上的數字，接著甲只要選 2 或 6，甲就會贏了（由肆之二之(四)知道，甲會贏）。

(3)甲選 2，乙選 5，扣掉第一輪的數字和 7，剩下的數字會是 17 以上的數字，接著甲只要選 2 或 6，甲就會贏了（由肆之二之(四)知道，甲會贏）。

2.甲選 6，乙能選 3 或 4 或 5：

(1)甲選 6，乙選 3，扣掉第一輪的數字和 9，剩下的數字會是 15 以上的數字，接著甲只要選 2 或 6，甲就會贏了（由肆之二之(四)知道，甲會贏）。

(2)甲選 6，乙選 4，扣掉第一輪的數字和 10，剩下的數字會是 14 以上的數字，接著甲只要選 2 或 6，甲就會贏了（由肆之二之(四)知道，甲會贏）。

(3)甲選 6，乙選 5，扣掉第一輪的數字和 11，剩下的數字會是 13 以上的數字，接著甲只要選 2 或 6，甲就會贏了（由肆之二之(四)知道，甲會贏）。

將上述的結果整理為如下的表格

數字	除了 1 以外的任何數字
誰會贏	甲

經由我們的分析，可以得到的推論：

選數範圍為 2~6，不可重複對方剛選的數，而且和對方選的數字和不能等於 8(2+6)，結果為除了 1 以外的任何數字，甲都會贏。

三、問題三：選數範圍為 2~7，每次雙方選的數字和分別不能等於 9(2+7)，結果如何？是否可以找出規律而推論出數學式子？

分析如下：

(一)數字 2, 3, 4, 5, 6, 7，顯然都是甲會贏。

(二)數字 8, 9，甲會贏（甲選取 7，甲就贏了）。

(三)數字 10，甲會贏（甲須選取 2 或 5 時，甲就會贏了）。

(四)數字 11 是乙會贏的第一個數字。說明如下：

1.甲分別選取 7,6,5,4 時，接著乙分別選取 4,5,6,7，乙就贏了。

2.甲選取 3 時，接著乙選取 7，乙就贏了。

3.甲選取 2 時，接著乙選取 4，甲只能選取 3 或 2，乙就選取 2 或 3，乙就贏了。

(五)數字 12 是乙會贏的第二個數字。說明如下：

1.甲分別選取 7,5 時，接著乙分別選取 5,7，乙就贏了。

2.甲選取 6 時，接著乙選取 5，乙就贏了。

3.甲選取 4 時，接著乙選取 7，乙就贏了。

4.甲選取 3 時，接著乙選取 4，甲只能選取 3 或 2，乙就選取 2 或 3，乙就贏了。

5.甲選取 2 時，接著乙選取 5，甲只能選取 3 或 2，乙就選取 2 或 3，乙就贏了。

(六)數字 13，甲須選取 2，接著乙只能選取 6 或 5 或 4 或 3，甲就選取 5 或 6 或 7 或 7，甲就贏了。

(七)數字 14，甲選取 3，甲會贏，說明如下：

1.甲選取 3，接著乙選取 7 或 5 或 4，甲就選取 4 或 6 或 7，甲就贏了。

2.甲選取 3，接著乙選取 2，甲就選取 4，乙只能選取 3 或 2，甲就選取 2 或 3，甲就贏了。

(八)數字 15，甲選取 7 或 4，甲都可以贏，說明如下：

1.甲選取 7，接著乙不管選取 6 或 5 或 4 或 3，甲就選取 2 或 3 或 3 或 5，甲就贏了。

2.甲選取 4，接著乙不管選取 7 或 6 或 3 或 2，甲都會贏。說明如下：

(1)乙選取 7 或 6 或 3，甲就選取 4 或 5 或 7，甲就贏了。

(2)乙選取 2，甲就選取 4，接下來乙只能選取 3 或 2，甲就選取 2 或 3，甲就贏了。

(九)數字 16，甲選取 4，甲會贏，說明如下：

1.甲選取 4，接著乙選取 7 或 6 或 3，甲就選取 5 或 5 或 7，甲就贏了。

2.甲選取 4，接著乙選取 2，甲就選取 5，乙只能選取 3 或 2，甲就選取 2 或 3，甲就贏了。

(十)數字 17，甲須選取 6，甲會贏，說明如下：

1.甲選取 6，接著乙選取 7 或 5 或 4，甲就選取 4 或 6 或 7，甲就贏了。

2.甲選取 6，接著乙選取 2，甲就選取 4，乙只能選取 3 或 2，甲就選取 2 或 3，甲就贏了。

(十一)數字 18，甲選取 7，接著乙只能選取 6 或 5 或 4 或 3，甲就選取 5 或 6 或 7 或 7，甲就贏了。

(十二)數字 19，甲選取 7，接著乙只能選取 6 或 5 或 4 或 3，甲就選取 5 或 7 或 7 或 7，甲就贏了。

(十三)數字 20，甲選取 7 或 4，甲都可以贏，說明如下：

1.甲選取 7，

(1)接著乙不管選取 6 或 5 或 4，甲都選取 7，甲就贏了。

(2)接著乙選取 3，甲就選取 5，乙只能選取 3 或 2，甲就選取 2 或 3，甲就贏了。

2.甲選取 4，

(1)接著乙選取 7，甲就選取 4，乙只能選取 3 或 2，甲就選取 2 或 3，甲就贏了。

(2)接著乙選取 6，甲就選取 5，乙只能選取 3 或 2，甲就選取 2 或 3，甲就贏了。

(3)接著乙選取 3，甲就選取 2，接下來乙不管選取 6 或 5 或 4 或 3，甲就選取 5 或 6 或 7 或 7，甲就贏了。

(4)接著乙選取 2，甲就選取 3，接下來乙不管選取 7 或 5 或 4 或 2，甲都會贏，說明如下：

①乙選取 7 或 5 或 4，甲就選取 4 或 6 或 7，甲就贏了。

②乙選取 2，甲就選取 4，接下來乙只能選取 3 或 2，甲就選取 2 或 3，甲就贏了。

(十四)數字 21，甲選取 5，甲會贏，說明如下：

1.甲選取 5，接著乙選取 7，換甲選取 4，接下來乙只能選取 3 或 2，甲就選取 2 或 3，甲就贏了。

2.甲選取 5，接著乙選取 6，換甲選取 5，接下來乙只能選取 3 或 2，甲就選取 2 或 3，甲就贏了。

3.甲選取 5，接著乙選取 3，換甲選取 2，接下來乙選取 6 或 5 或 4 或 3，甲就選取 5 或 6 或 7 或 7，甲就贏了。

4.甲選取 5，接著乙選取 2，換甲選取 3，

(1)接下來乙選取 7 或 5 或 4，甲就選取 4 或 6 或 7，甲就贏了。

(2)接下來乙選取 2，換甲只能選取 4 或 3，乙也就只能選取 3 或 4，最後甲都選 2，就贏了。

(十五)數字 22 是乙會贏的第三個數字。說明如下：

1.甲選取 7 或 6 時，接著乙都選取 4，扣掉第一輪的數字和 11 或 10，剩下 11 或 12，乙就贏了（由肆之三之(四)、(五)知道，乙會贏）。

2.甲選取 5 時，接著乙就選取 6，扣掉第一輪的數字和 11，剩下 11，乙就贏了（由肆之三之(四)知道，乙會贏）。

3.甲選取 4 時，接著乙就選取 7，扣掉第一輪的數字和 11，剩下 11，乙就贏了（由肆之三之(四)知道，乙會贏）。

4.甲選取 3 時，接著乙就選取 7，扣掉第一輪的數字和 10，剩下 12，乙就贏了（由肆之三之(五)知道，乙會贏）。

5.甲選取 2 時，乙就選取 4，接下來不管甲選取 7 或 6 或 3 或 2，乙都會贏了。說明如下：

(1)接下來甲選取 7，乙只能選取 4，接著甲不管選取 3 或 2，乙就選取 2 或 3，乙就贏了。

(2)接下來甲選取 6，乙能選取 5 或 2，乙都會贏。說明如下：

①乙選取 5，接著甲不管選取 3 或 2，乙就選取 2 或 3，乙就贏了。

②乙選取 2，接著甲不管選取 6 或 5 或 4 或 3，乙就選取 2 或 3 或 3 或 5，乙就贏了。

(3)接下來甲選取 3，乙只能選取 2，接著甲不管選取 6 或 5 或 4 或 3，乙就選取 5 或 6 或 7 或 7，乙就贏了。

(4)接下來甲選取 2，乙只能選取 3，接著甲不管選取 7 或 5 或 4 或 2，乙都會贏。說明如下：

①接著甲選取 7 或 5 或 4，乙就選取 4 或 6 或 7，乙就贏了。

②接著甲選取 2，乙只能選取 4，接下來甲不管選取 3 或 2，乙就選取 2 或 3，乙就贏了。

(十六)數字 23 是乙會贏的第四個數字。說明如下：

- 1.甲選取 7 時，接著乙可以選取 5 或 4，扣掉第一輪的數字和 12 或 11，剩下 11 或 12，乙就贏了（由肆之三之(四)、(五)知道，乙會贏）。
- 2.甲選取 6 時，接著乙就選取 5，扣掉第一輪的數字和 11，剩下 12，乙就贏了（由肆之三之(五)知道，乙會贏）。
- 3.甲選取 5 時，接著乙可以選取 7 或 6，扣掉第一輪的數字和 12 或 11，剩下 11 或 12，乙就贏了（由肆之三之(四)、(五)知道，乙會贏）。
- 4.甲選取 4 時，接著乙就選取 7，扣掉第一輪的數字和 11，剩下 12，乙就贏了（由肆之三之(五)知道，乙會贏）。
- 5.甲選取 3 時，乙就選取 4，接下來不管甲選取 7 或 6 或 3 或 2，乙都會贏。說明如下：
 - (1)接下來甲選取 7，乙選取 4，接著甲不管選取 3 或 2，乙就選取 2 或 3，乙就贏了。
 - (2)接下來甲選取 6，乙可以選取 5 或 2，乙都會贏。說明如下：
 - ①乙選取 5，接著甲不管選取 3 或 2，乙就選取 2 或 3，乙就贏了。
 - ②乙選取 2，接著甲不管選取 6 或 5 或 4 或 3，乙就選取 2 或 3 或 3(或 2)或 5，乙就贏了。
 - (3)接下來甲選取 3，乙選取 2，接著甲不管選取 6 或 5 或 4 或 3，乙就選取 5 或 6 或 7 或 7，乙就贏了。
 - (4)接下來甲選取 2，乙只要選取 3，接著甲不管選取 7 或 5 或 4 或 2，乙就選取 4 或 6 或 7 或 7，乙就贏了。
- 6.甲選取 2 時，乙就選取 5，接下來不管甲選取 7 或 6 或 3 或 2，乙都會贏了。說明如下：
 - (1)接下來甲選取 7，乙須選取 4，接著甲不管選取 3 或 2，乙就選取 2 或 3，乙就贏了。
 - (2)接下來甲選取 6，乙須選取 5，接著甲不管選取 3 或 2，乙就選取 2 或 3，乙就贏了。
 - (3)接下來甲選取 3，乙須選取 2，接著甲不管選取 6 或 5 或 4 或 3，乙就選取 5 或 6 或 7 或 7，乙就贏了。
 - (4)接下來甲選取 2，乙須選取 3，接著甲不管選取 7 或 5 或 4 或 2，乙都會贏。說明如下：
 - ①甲選取 7 或 5 或 4，乙就選取 4 或 6 或 7，乙就贏了。
 - ②甲選取 2，乙須選取 4，接著甲不管選取 3 或 2，乙就選取 2 或 3，乙就贏了。

(十七)數字 24，甲選取 2，接下來乙不管選取 6 或 5 或 4 或 3，甲都會贏了。說明如下：

- 1.乙選取 6 時，扣掉第一輪的數字和 8，剩下 16，甲就贏了（由肆之三之(九)知道，甲會贏）。
- 2.乙選取 5 時，扣掉第一輪的數字和 7，剩下 17，甲就贏了（由肆之三之(十)知道，甲會贏）。
- 3.乙選取 4 時，扣掉第一輪的數字和 6，剩下 18，甲就贏了（由肆之三之(十一)知道，甲會贏）。
- 4.乙選取 3 時，扣掉第一輪的數字和 5，剩下 19，甲就贏了（由肆之三之(十二)知道，甲會贏）。

(十八)數字 25，甲選取 3，接下來乙不管選取 7 或 5 或 4 或 2，甲都會贏了。說明如下：

- 1.乙選取 7 時，扣掉第一輪的數字和 10，剩下 15，甲就贏了（由肆之三之(八)知道，甲會贏）。
- 2.乙選取 5 時，扣掉第一輪的數字和 8，剩下 17，甲就贏了（由肆之三之(十)知道，甲會贏）。
- 3.乙選取 4 時，扣掉第一輪的數字和 7，剩下 18，甲就贏了（由肆之三之(十一)知道，甲會贏）。
- 4.乙選取 2 時，扣掉第一輪的數字和 5，剩下 20，甲就贏了（由肆之三之(十三)知道，甲會贏）。

：
：
：

將上述的結果整理為如下的表格

數字	2,3,4,5,6,7,8,9,10	11	12	13,14,15,16,17,18,19,20,21	22	23	24,25	……
誰會贏	甲	乙	乙	甲	乙	乙	甲	……

根據表格中所呈現的規律而得到的推論：

選數範圍為 2~7，不可重複對方剛選的數，而且和對方選的數字和不能等於 9(2+7)，

結果為 {

- 若數字 = $11x_n$ 、 $11x_n+1$ ，乙會贏的數字。
- 若數字 $\neq 11x_n$ 、 $11x_n+1$ ，則是甲會贏的數字。

四、問題四：選數範圍為 2~8，每次雙方選的數字和分別不能等於 10(2+8)，結果如何？是否可以找出規律而推論出數學式子？

分析如下：

- (一)數字 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8，顯然都是甲會贏。
- (二)數字 9, 10，甲會贏（甲須選取 8，甲就贏了）。
- (三)數字 11, 12，甲須選取 2，甲就會贏。說明如下：
甲選取 2，剩下的數字會是 9, 10，根據肆之四之(二)知道：乙須選取 8，乙才會贏，但是乙又無法選取 8(2+8=10)，所以甲會贏。
- (四)數字 13, 14，甲須選取 2，甲就會贏。說明如下：
甲選取 2，剩下的數字會是 11, 12，根據肆之四之(三)知道：乙須選取 2，乙才會贏，但是乙又無法選取 2，所以甲會贏。
- (五)以此類推，接下來的數字，甲都會贏。

將上述的結果整理為如下的表格

數字	除了 1 以外的任何數字
誰會贏	甲

經由我們的分析，可以得到的推論：

選數範圍為 2~8，不可重複對方剛選的數，而且和對方選的數字和不能等於 10(2+8)，結果為除了 1 以外的任何數字，甲都會贏。

五、問題五：選數範圍為 2~9，每次雙方選的數字和分別不能等於 11(2+9)，結果如何？是否可以找出規律而推論出數學式子？

分析如下：

(一)數字 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9，顯然都是甲會贏。

(二)數字 10, 11，甲會贏（甲選取 9，甲就贏了）。

(三)數字 12，甲會贏（甲須選取 2 或 6 時，甲就會贏了）。

(四)數字 13 是乙會贏的第一個數字。說明如下：

1.甲分別選取 9,8,7,6,5,4 時，接著乙分別選取 4,5,6,7,8,9，乙就贏了。

2.甲選取 3 時，接著乙選取 9，乙就贏了。

3.甲選取 2 時，接著乙須選取 5，甲只能選取 4 或 3 或 2，乙就選取 2 或 2 或 4，乙就贏了。

(五)數字 14 是乙會贏的第二個數字。說明如下：

1.甲分別選取 9,8,7,6,5,4 時，接著乙分別選取 5,6,6,8,9,9，乙就贏了。

2.甲選取 3 時，接著乙選取 9，乙就贏了。

3.甲選取 2 時，接著乙須選取 6，甲只能選取 4 或 3 或 2，乙就選取 2 或 2 或 4，乙就贏了。

(六)數字 15，甲須選取 2，接下來乙不管選取 8 或 7 或 6 或 5 或 4 或 3，甲就選取 5 或 6 或 7 或 8 或 9 或 9，甲就贏了。

(七)數字 16，甲選取 3 或 2，甲都會贏，說明如下：

1.甲選取 3，

(1)接著乙選取 9 或 7 或 6 或 5 或 4，甲就選取 4 或 6 或 7 或 8 或 9，甲就贏了。

(2)接著乙選取 2，甲就選取 5，乙只能選取 4 或 3 或 2，甲就選取 2 或 2 或 4，甲就贏了。

2.甲選取 2，接下來乙不管選取 8 或 7 或 6 或 5 或 4 或 3，甲就選取 6 或 6 或 8 或 9 或 9，甲就贏了。

(八)數字 17，甲選取 4 或 3 或 2，甲都可以贏，說明如下：

1.甲選取 4，剩下的數字會是 13，根據肆之五之(四)知道：因為接下來換乙選取，所以是甲會贏。

2.甲選取 3，剩下的數字會是 14，根據肆之五之(五)知道：因為接下來換乙選取，所以是甲會贏。

3.甲選取 2，剩下的數字會是 15，根據肆之五之(六)知道：因為接下來換乙選取，而且乙又不能選取 2，所以是甲會贏。

(九)數字 18，甲選取 5 或 4，甲都可以贏，說明如下：

1.甲選取 5，剩下的數字會是 13，根據肆之五之(四)知道：因為接下來換乙選取，所以是甲會贏。

2.甲選取 4，剩下的數字會是 14，根據肆之五之(五)知道：因為接下來換乙選取，所以是甲會贏。

(十)數字 19，甲選取 9 或 6 或 5，甲都可以贏，說明如下：

- 1.甲選取 9，剩下的數字會是 10，根據肆之五之(二)知道：因為接下來換乙選取，而且乙又不能選取 9，所以是甲會贏。
- 2.甲選取 6，剩下的數字會是 13，根據肆之五之(四)知道：因為接下來換乙選取，所以是甲會贏。
- 3.甲選取 5，剩下的數字會是 14，根據肆之五之(五)知道：因為接下來換乙選取，所以是甲會贏。

(十一)數字 20，甲選取 9 或 7 或 6，甲都可以贏，說明如下：

- 1.甲選取 9，剩下的數字會是 11，根據肆之五之(二)知道：因為接下來換乙選取，而且乙又不能選取 9，所以是甲會贏。
- 2.甲選取 7，剩下的數字會是 13，根據肆之五之(四)知道：因為接下來換乙選取，所以是甲會贏。
- 3.甲選取 6，剩下的數字會是 14，根據肆之五之(五)知道：因為接下來換乙選取，所以是甲會贏。

(十二)數字 21，甲選取 8 或 7，甲都可以贏，說明如下：

- 1.甲選取 8，剩下的數字會是 13，根據肆之五之(四)知道：因為接下來換乙選取，所以是甲會贏。
- 2.甲選取 7，剩下的數字會是 14，根據肆之五之(五)知道：因為接下來換乙選取，所以是甲會贏。

(十三)數字 22，甲選取 9 或 8，甲都可以贏，說明如下：

- 1.甲選取 9，剩下的數字會是 13，根據肆之五之(四)知道：因為接下來換乙選取，所以是甲會贏。
- 2.甲選取 8，剩下的數字會是 14，根據肆之五之(五)知道：因為接下來換乙選取，所以是甲會贏。

(十四)數字 23，甲須選取 9，剩下的數字會是 14，根據肆之五之(五)知道：因為接下來換乙選取，所以是甲會贏。

(十五)數字 24，甲須選取 9，剩下的數字會是 15，根據肆之五之(六)知道：因為接下來換乙選取，而且乙又不能選取 $2(9+2=11)$ ，所以是甲會贏。

(十六)數字 25，甲須選取 2，剩下的數字會是 23，根據肆之五之(十四)知道：因為接下來換乙選取，而且乙又不能選取 $9(2+9=11)$ ，所以是甲會贏。

(十七)數字 26，甲須選取 2，剩下的數字會是 24，根據肆之五之(十五)知道：因為接下來換乙選取，而且乙又不能選取 $9(2+9=11)$ ，所以是甲會贏。

(十八)數字 27，甲須選取 2，剩下的數字會是 25，根據肆之五之(十六)知道：因為接下來換乙選取，而且乙又不能選取 2，所以是甲會贏。

(十九)數字 28，甲須選取 2，剩下的數字會是 26，根據肆之五之(十七)知道：因為接下來換乙選取，而且乙又不能選取 2，所以是甲會贏。

(二十)數字 29，甲須選取 2，剩下的數字會是 27，根據肆之五之(十八)知道：因為接下來換乙選取，而且乙又不能選取 2，所以是甲會贏。

(二十一)數字 30，甲須選取 2，剩下的數字會是 28，根據肆之五之(十九)知道：因為接下來換乙選取，而且乙又不能選取 2，所以是甲會贏。

(二十二)以此類推，接下來的數字，甲都會贏。

將上述的結果整理為如下的表格

數字	2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12	13	14	15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30	……
誰會贏	甲	乙	乙	甲	……

根據表格中所呈現的規律而得到的推論：

選數範圍為 2~9，不可重複對方剛選的數，而且和對方選的數字和不能等於 11(2+9)，

結果為 {

- 若數字 = 13、14，乙會贏的數字。
- 若數字 ≠ 13、14，則是甲會贏的數字。

六、問題六：選數範圍為 2~10，每次雙方選的數字和分別不能等於 12(2+10)，結果如何？
是否可以找出規律而推論出數學式子？

分析如下：

(一)數字 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10，顯然都是甲會贏。

(二)數字 11, 12，甲會贏（甲須選取 10，甲就贏了）。

(三)數字 13, 14，甲須選取 2，甲就會贏。說明如下：

甲選取 2，剩下的數字會是 11, 12，根據肆之六之(二)知道：乙須選取 10，乙才會贏，但是乙又無法選取 10(2+10=12)，所以甲會贏。

(四)數字 15, 16，甲須選取 2，甲就會贏。說明如下：

甲選取 2，剩下的數字會是 13, 14，根據肆之六之(三)知道：乙須選取 2，乙才會贏，但是乙又無法選取 2，所以甲會贏。

(五)以此類推，接下來的數字，甲都會贏。

將上述的結果整理為如下的表格

數字	除了 1 以外的任何數字
誰會贏	甲

經由我們的分析，可以得到的推論：

選數範圍為 2~10，不可重複對方剛選的數，而且和對方選的數字和不能等於 12(2+10)，結果為除了 1 以外的任何數字，甲都會贏。

伍、 研究結果

若將選數範圍從 2~5，改為 2~6、2~7、2~8、2~9、2~10，其餘遊戲規則不變，研究結果整理如下：

一、選數範圍為 2~5，不可重複對方剛選的數，而且和對方選的數字和不能等於 7(2+5)，結果為除了 1 以外的任何數字，甲都會贏。

二、選數範圍為 2~6，不可重複對方剛選的數，而且和對方選的數字和不能等於 8(2+6)，結果為除了 1 以外的任何數字，甲都會贏。

三、選數範圍為 2~7，不可重複對方剛選的數，而且和對方選的數字和不能等於 9(2+7)，

結果為 {
 若數字 = $11x_n, 11x_{n+1}$ ，乙會贏的數字。
 若數字 $\neq 11x_n, 11x_{n+1}$ ，則是甲會贏的數字。

四、選數範圍為 2~8，不可重複對方剛選的數，而且和對方選的數字和不能等於 10(2+8)，結果為除了 1 以外的任何數字，甲都會贏。

五、選數範圍為 2~9，不可重複對方剛選的數，而且和對方選的數字和不能等於 11(2+9)，

結果為 {
 若數字 = 13、14，乙會贏的數字。
 若數字 $\neq 13, 14$ ，則是甲會贏的數字。

六、選數範圍為 2~10，不可重複對方剛選的數，而且和對方選的數字和不能等於 12(2+10)，結果為除了 1 以外的任何數字，甲都會贏。

陸、 討論

一、選數範圍為 2~7，乙才有贏的數字，在研究的過程中發現：雖然給定乙會贏的數字時，乙必須有贏的策略，否則玩到最後有可能會變成甲贏了。乙會贏的策略，說明如下：

(一)、當給定乙會贏的數字為 $11x_n$ ，也就是 11 的倍數時：

1. 甲一開始選取 7 或 6 或 5 或 4，乙就選取 4 或 5 或 6 或 7，扣掉第一輪的數字和 11，剩下的數還是 11 的倍數，根據前面就已分析的結果得知，乙會贏。
2. 甲一開始選取 3，乙就選取 7，扣掉第一輪的數字和 10，剩下的數會是 11 的倍數+1，根據前面就已分析的結果得知，乙會贏。
3. 甲一開始選取 2，乙就選取 4，扣掉第一輪的數字和 6，剩下的數會是 11 的倍數+5，接下來的交手中，只要甲選取的是 3 或 2，乙就選取 2 或 3，否則就按照陸之一之(一)之 1、2 的策略一直玩下去，最後贏的會是乙。

(二)、當給定乙會贏的數字為 $11x_{n+1}$ ，也就是 11 的倍數+1 時：

1. 甲一開始選取 7 或 6 或 5 或 4，乙就選取 4 或 5 或 6 或 7，扣掉第一輪的數字和 11，剩下的數還是 11 的倍數+1，根據前面就已分析的結果得知，乙會贏。
2. 甲一開始選取 3，乙就選取 4，扣掉第一輪的數字和 7，剩下的數會是 11 的倍數+5，接下來的交手中，只要甲選取的是 3 或 2，乙就選取 2 或 3，否則就按照陸之一之(一)之 1、2 的策略一直玩下去，最後贏的會是乙。

3.甲一開始選取 2，乙就選取 5，扣掉第一輪的數字和 7，剩下的數會是 11 的倍數+5，接下來的交手中，只要甲選取的是 3 或 2，乙就選取 2 或 3，否則就按照陸之一之(一)之 1、2 的策略一直玩下去，最後贏的會是乙。

二、選數範圍為 2~9，當找到乙第一個、第二個會贏的數字分別是 13、14 時，心裡就想：乙會贏的數字會不會如同選數範圍為 2~7，只要是這 2 類數字：13 的倍數或者是 13 的倍數+1，乙都會贏？按照肆之五的分析，分析下去發現乙會贏的數字竟然就只有這 2 個數字而已，是這樣的結果，覺得太神奇了。

三、選數範圍的不同，研究發現乙會贏的數字數目：0 個、2 個(有限個)、無限多個，分述如下：

- (一)、選數範圍為 2~5、2~6、2~8、2~10，按照肆之一、二、四、六的分析，會發現乙都沒有會贏的數字。
- (二)、選數範圍為 2~7，按照肆之三的分析，發現只要是這 2 類數字：11 的倍數或者是 11 的倍數+1，乙都會贏。
- (三)、選數範圍為 2~9，乙也有贏的數字：13、14，而且按照肆之五的分析，會發現乙會贏的數字只有這 2 個數字，是有限個數字。

柒、 結論

一、經由伍、研究結果整理如下：

選數範圍	2~5	2~6	2~7	2~8	2~9	2~10
乙贏的數字	/	/	11 的倍數 或者是 11 的倍數+1	/	13、14	/
甲贏的數字	除了 1 以外 的任何數字	除了 1 以外 的任何數字	除了 1、11 的倍數、11 的倍數+1 以外的任何 數字	除了 1 以外 的任何數字	除了 1、13、 14 以外的任 何數字	除了 1 以外 的任何數字

二、在研究的過程中發現：雖然選數範圍：2~5、2~6、2~8、2~10，除了 1 以外的任何數字，甲都會贏，然而甲也必須步步如履薄冰，為的就是最後成為真正的贏家；當選數範圍：2~7、2~9，雖然乙有贏的數字，然而乙也必須步步小心，有贏的策略，為的也是成為最後真正的贏家，否則到最後有可能會變成甲贏了。所以不管甲或乙所下的每一步、每一步，當然都是為了要贏。

三、關於這次科展，除了讓我們見識到數學遊戲的趣味性之外，還發現這麼令人嘖嘖稱奇的規律，期待將來有能力能夠來證明我們的推論是對的。在這次的科展中，我們學到如何找尋規律，也深深為數學著迷，真是受益良多。

捌、 參考資料及其他

- 一、南一版國民小學數學第七冊（四上），109 學年度。
- 二、需要更細微觀察的遊戲，取自：<http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/faoffa/f1.pdf>
- 三、屏東縣第 58 屆國中小學科學展覽會國小組數學科佳作作品：「奇」善之家-制敵機先