裝
訂
線

屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：**東湊西湊不是亂湊_以單位分數湊成 1**

關 鍵 詞：單位分數、標準分解式、因數與倍數

裝
訂
線

編號： B1032

東湊西湊不是亂湊

以單位分數湊成 1

關鍵詞：單位分數、標準分解式、因數與倍數

摘要

此研究主要是在尋找單位分數湊成 1 的各種方法，利用在學校習得的知識，包括加法、減法、乘法、因數和倍數以及標準分解式…等數學基本觀念，來探討如何用一些不同的單位分數加起來可以湊成 1。研究發現「湊成 1」這個問題目前沒有一個通解，只能針對不同的題目需求，用不同的解法，在此我們盡最大的努力用所學過的解題方式將之全部呈現出來。

壹、 研究動機

我們從國立臺灣科學教育館出版的『科學研習月刊』中的『森棚教官的數學題』專欄看到了『湊成 1』這個有趣的問題。問題的原文如下（擷取自科學研習月刊第 57 卷第 9 期）

> 分子是 1 分母為正整數的分數叫做單位分數。用一些不同的單位分數加起來可以湊成 1，比如：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$
>
> 如果分母只能用奇數 3,5,7,...，那其中的一個湊法（還有很多的湊法）是：
>
> $$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}=1$$
>
> 1.如果分母只能用偶數 2,4,6,…，要湊成 1 要怎麼湊？最少需要幾項？
>
> 2.如果分母只能用 2,5,8,11,14,17,...（即形如 3k+2 的數），要湊成 1 要怎麼湊？最少需要幾項？

看似簡單的數字組合卻有著讓人驚奇的結果，我們希望從中找出不同的例子並能夠歸納出不同的湊法，解開以單位分數湊成 1 的奧秘。研究過程中我們運用以往習得的分

數四則運算技巧和因數、倍數的關係以及拆開標準分解式…等方法來探討如何用一些不同的單位分數加起來可以湊成 1。

貳、 研究目的

根據研究動機，我們嘗試探討以下五個問題：

一、基本方法及發現

二、探討湊成 1 需要的最少單位分數個數

三、探討以單位分數的分母全為奇數湊成 1 和單位分數分母全為偶數湊成 1 的情形

四、討論單位分數的分母分別為偶數、$3k+0$、$3k+2$、$3k+1$的情形

五、討論有哪些方法可以將不同的單位分數湊成 1

（一）貪婪演算法的原理

（二）加減法的原理

（三）利用拆解標準分解式的方法原理

（四）分數乘法的原理

1. 樹狀圖
2. 單位分數進一步的分解

（五）以因數倍數的關係探討

六、個別詳細討論研究動機所提月刊上的待答問題

參、 研究設備及器材

筆記本、筆、電腦、文書處理軟體 Word2007、方程式編輯軟體 MathType6.9。

肆、 研究過程或方法

研究的方法和步驟主要分成四個部分：

首先我們先從月刊上的範例 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ 出發，觀察討論後，我們發現它有三種不同的方法切入，（1）以因數倍數的關係探討、（2）以分數乘法探討、（3）以加減法探討。另外我們也參閱了網路上的二種方法，貪婪演算法和如何將單位分數進一步拆開的方法。第二部份我

們探討湊成 1 需要的最少單位分數的個數和分母若全為奇數和全為偶數的情形。第三部份我們嘗試利用以上所提的各種方法解開期刊上所提的待答問題。第四部份我們利用因數和倍數的關係仔細的觀察並討論了正整數1到200的情形。

一、基本方法及發現：

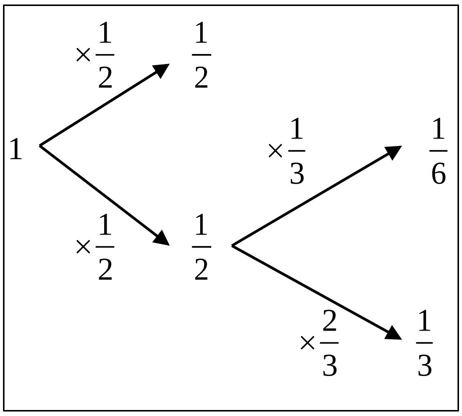
我們首先從$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$出發討論，發現有以下幾種方法

（一）以因數倍數的關係原理探討：

3 、 2 、1為 6 的因數，6 為3 、 2 、1的倍數

$6=3+2+1 \Rightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

（二）以分數乘法原理探討：



$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

（三）以加減法原理探討：

取連續單位分數$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ ，$1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

（四）以貪婪演算法原理探討：

$1=\frac{1}{1}$ ，$1\div1=1$餘0 ，$1-\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$（重複）

$2\div1=2$餘0 ，$\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}=\frac{1}{6}$

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

二、貪婪演算法的原理：

這是我們在網路上找到的方法：**貪婪演算法**（greedy algorithm）

（一）方法使用：

可將較難分解的真分數以最少個數的單位分數分解

（二）方法說明：

步驟 1：一真分數 $r=\frac{a}{b}$，找出僅小於 $r=\frac{a}{b}$ 的最大單位分數

（如果沒有餘數，則 r 已是單位分數）

這個分母的的計算方式是用 b 除以 a，捨去餘數，再加 1。

步驟 2：把 r 減去單位分數，以這個新的、更小的 r 重複步驟 1。

（三）方法解釋：

一真分數 $r=\frac{a}{b}=\frac{a}{ax+A}<\frac{1}{x}$,（$r$ 、 a 、 b 、 x 皆為正整數, $A\geq 0$ ）。

此時有兩種可能：

1. $A<a$ 時，$\frac{a}{b}>\frac{1}{x+1}$ 。

2. $A=0$ 時，$\frac{a}{b}=\frac{1}{x}$ 已是單位分數。

三、探討湊成 1 需要的最少單位分數個數：

（一）將 1 分成 2 個相異單位分數的和：

假設 $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 兩個相異單位分數的和。

設 $a>b$，則 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{2}{b}>1\Rightarrow 2>b$，所以 $b=1$。

但 $\frac{1}{a}=0$，所以不成立。

因此 1 無法拆成 2 個相異單位分數的和。

（二）將 1 分成 3 個相異單位分數的和：

假設 $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 三個相異單位分數的和。

設 $a>b>c$，則 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}\Rightarrow\frac{3}{c}>1\Rightarrow 3>c$，所以 $c=2$。

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$ ，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{2}{b}>\frac{1}{2}\Rightarrow 4>b$ ，所以 $b=3$ 。

$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

因此當1拆成 n 個相異單位分數的和時，最少可以拆成3項，為 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ 。

四、探討單位分數的分母全為奇數湊成 1 和單位分數的分母全為偶數湊成 1：

（一）分母全為奇數湊成 1：

由奇數+奇數=偶數，奇數+偶數=奇數，奇數×奇數=奇數。

令 a_1 ，a_2 ，a_3 ，a_4 為正奇數。

當 $n=3$ ，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=\frac{a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3}{a_1a_2a_3}\Rightarrow\frac{奇數}{奇數}$ 。

當 $n=4$ ，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=\frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_1a_4}{a_1a_2a_3a_4}\Rightarrow\frac{偶數}{奇數}$ 。

所以當1分解成 n 個相異單位分數的和時，且分母全為奇數，n 一定要是奇數個才有可能湊成 1。

（二）分母全為偶數湊成 1：

偶數+偶數=偶數，偶數×偶數=偶數。

令 a_1 ，a_2 ，a_3 ，a_4 為正偶數。

當 $n=3$ ，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=\frac{a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3}{a_1a_2a_3}\Rightarrow\frac{偶數}{偶數}$ 。

當 $n=4$ ，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=\frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_1a_4}{a_1a_2a_3a_4}\Rightarrow\frac{偶數}{偶數}$ 。

所以當1分解成 n 個相異單位分數的和時，且分母全為偶數，n 為偶數個和奇數個都有可能湊成 1。

五、討論單位分數的分母分別為偶數、$3k+0$ 、$3k+2$ 、$3k+1$ 的情形

（一）用分母只能為偶數湊成 1：

已知 1 最少可以拆成 3 個相異單位分數的和，為 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ 。

運用 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ 分解 $\frac{1}{3}$ 。

得到$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ 。（此為最少個數）

因此當 1 拆成 4 個相異單位分數的和時，且分母為偶數，最少可以拆成 4 項，

為$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ 。

（二）用分母只能為$3k+0$湊成 1：

1.利用加減法探討

取較大的幾項$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{21}+\frac{1}{24}+\frac{1}{27}+\frac{1}{30}=\frac{7381}{7560}$

$1-\frac{7381}{7560}=\frac{179}{7560}<\frac{1}{33}$

小於$\frac{179}{7560}$的最小$\frac{1}{3k+0}$為$\frac{1}{45}$

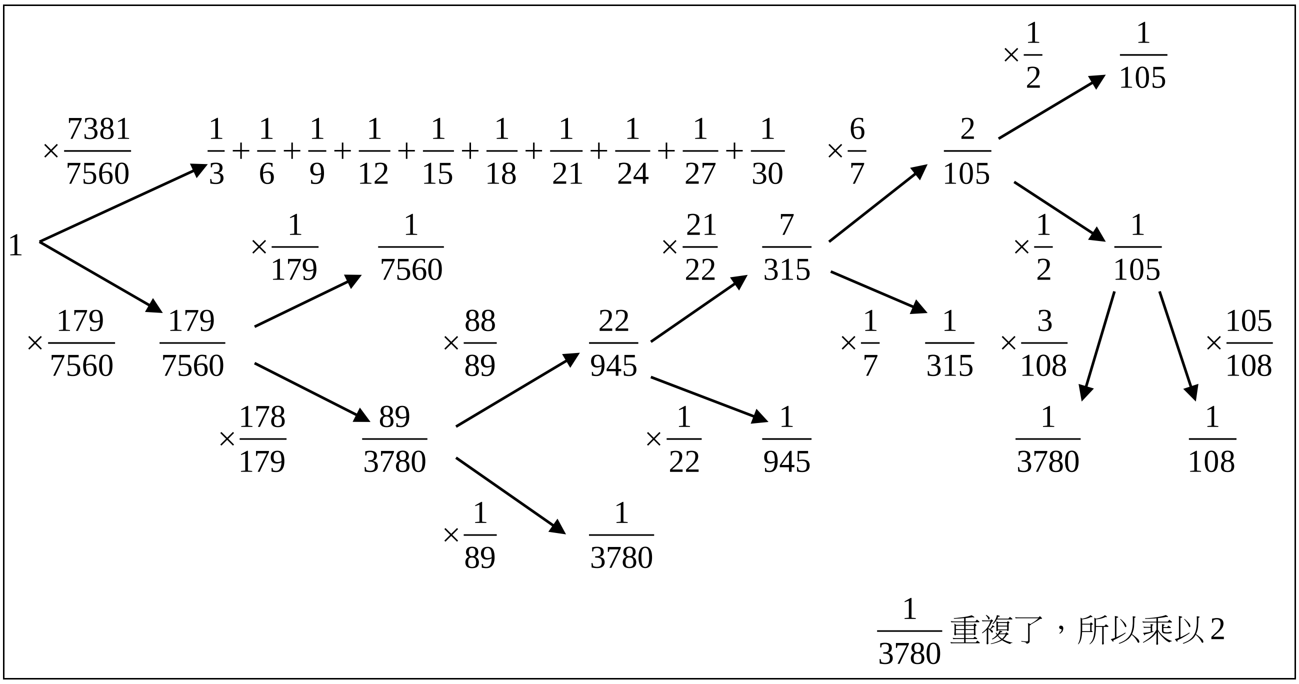
$\frac{179}{7560}-\frac{1}{45}=\frac{11}{7560}$

小於$\frac{11}{7560}$的最小$\frac{1}{3k+0}$為$\frac{1}{690}$

$\frac{11}{7560}-\frac{1}{690}=\frac{1}{173880}$

$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{21}+\frac{1}{24}+\frac{1}{27}+\frac{1}{30}+\frac{1}{45}+\frac{1}{690}+\frac{1}{173880}$

2.利用分數乘法探討



$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{21}+\frac{1}{24}+\frac{1}{27}+\frac{1}{30}+\frac{1}{105}+\frac{1}{108}+\frac{1}{315}+\frac{1}{945}+\frac{2}{3780}+\frac{1}{7560}$$

$$\Rightarrow 1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{21}+\frac{1}{24}+\frac{1}{27}+\frac{1}{30}+\frac{1}{105}+\frac{1}{108}+\frac{1}{315}+\frac{1}{945}+\frac{1}{1890}+\frac{1}{7560}$$

（三）用分母只能為$3k+2$湊成 1：

1.運用加減法：

取較大的$\frac{1}{3k+2}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{33}{40}$。

取$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{5}$的公倍數$\frac{1}{20}$，$\frac{33}{40}+\frac{1}{20}=\frac{7}{8}$。

取較大、較好計算的單位分數$\frac{1}{14}$、$\frac{1}{32}$，$\frac{7}{8}+\frac{1}{14}+\frac{1}{32}=\frac{219}{224}$。

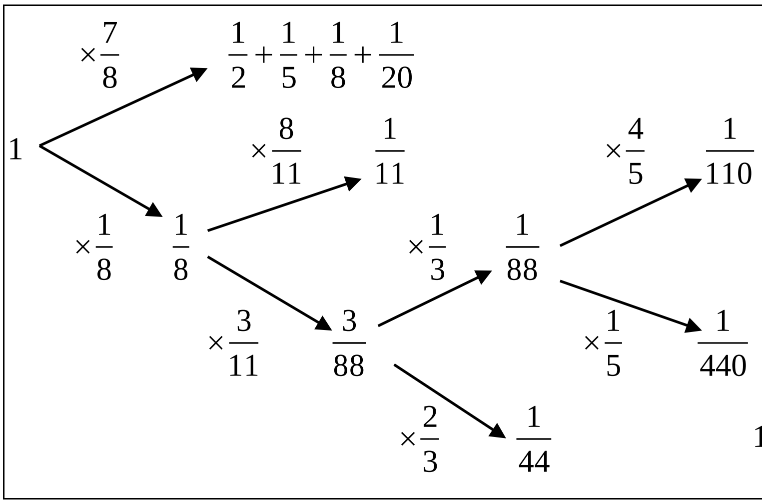
再取$\frac{1}{224}$，$\frac{219}{224}+\frac{1}{224}=\frac{55}{56}$，最後取$\frac{1}{56}$。

得到$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{32}+\frac{1}{56}+\frac{1}{224}$（最少個數）。

2.運用分數乘法：

取較大的$\frac{1}{3k+2}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{33}{40}$。

取$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{5}$的公倍數$\frac{1}{20}$，$\frac{33}{40}+\frac{1}{20}=\frac{7}{8}$。



$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{44}+\frac{1}{110}+\frac{1}{440}$$

（四）用分母只能為$3k+1$湊成 1：

取較大的幾項$\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}+\frac{1}{16}+\frac{1}{19}+\frac{1}{22}+\frac{1}{25}+\frac{1}{28}+\frac{1}{31}+\frac{1}{34}+\frac{1}{37}+\frac{1}{40}\cdots$

以我們的能力無法找到連續的$\frac{1}{3k+1}$何時會超過1

於是我們決定換個思路，我們想到了另一個方法

1.方法說明：

（1）基礎觀念

$$(3k_1+1)(3k_2+2)=9k_1k_2+6k_1+3k_2+2=3(3k_1k_2+2k_1+1k_2)+2$$

$$(3k_3+1)(3k_3+1)=9k_3^2+6k_3+1=3(3k_3^2+2k_3)+1$$

$$(3k_4+2)(3k_4+2)=9k_4^2+12k_4+4=3(3k_4^2+4k_4+1)+1$$

（2）說明

$$1=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}$$

$$1=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3k+2}\text{相加之合為}1)+(\frac{1}{3k+1}\text{相加之合為}\frac{1}{2})$$

2.實際例子：

$$1=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow1=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{32}+\frac{1}{56}+\frac{1}{224})+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{140}$$

$$\frac{1}{140}\text{利用}\left[\frac{1}{\mathrm{b}}=\left(\frac{x}{b}+1\right)\times\frac{1}{b+x}\text{，前提是}x\text{為}b\text{的因數}\right]\text{分解}$$

$$\text{因為}\frac{1}{140+\mathrm{x}}\left(\frac{x}{140}+1\right)\text{為兩個}\frac{1}{3k+1}\text{相加，所以}\frac{1}{140+\mathrm{x}}\times1\text{也是}\frac{1}{3k+1}$$

$$\text{取}x=2\text{，}\frac{1}{142}\left(\frac{2}{140}+1\right)=\frac{1}{9940}+\frac{1}{142}$$

$$\Rightarrow1=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{32}+\frac{1}{56}+\frac{1}{224})+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{142}+\frac{1}{9940}$$

$$\text{但是}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\text{重複了}$$

$$\text{因為}\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}=\frac{35}{40}=\frac{7}{8}$$

$$\text{我們決定尋找5組利用}\frac{1}{3k+2}\text{湊成的}\frac{1}{8}$$

第 1 組：$\frac{1}{8}=\frac{1}{14}+\frac{1}{32}+\frac{1}{56}+\frac{1}{224}$

第 2 組：$\frac{1}{8}=\frac{1}{11}+\frac{1}{44}+\frac{1}{110}+\frac{1}{440}$

第 3 組：$\frac{1}{8}=\frac{1}{17}+\frac{1}{23}+\frac{1}{68}+\frac{1}{128}+\frac{1}{6260}+\frac{1}{50048}+\frac{1}{9790640}$

第 4 組：

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{26}+\frac{1}{59}+\frac{1}{92}+\frac{1}{104}+\frac{1}{113}+\frac{1}{299}+\frac{1}{929}+\frac{1}{1196}+\frac{1}{2714}+\frac{1}{6854}+\frac{1}{1638851}+\frac{1}{22467413}+\frac{1}{1579899505067}+\frac{1}{6714572896535}+\frac{1}{22467412\times 22467413}+\frac{1}{6714572896535\times 26858291586139}$$

越後面的數字越難算，所以把第 5 組的$\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}$換成$\frac{1}{3k+1}$的$\frac{1}{16}$並放在括號外

$$\Big[(\frac{1}{14}+\frac{1}{32}+\frac{1}{56}+\frac{1}{224})+(\frac{1}{11}+\frac{1}{44}+\frac{1}{110}+\frac{1}{440})+(\frac{1}{17}+\frac{1}{23}+\frac{1}{68}+\frac{1}{128}+\frac{1}{6260}+\frac{1}{50048}+\frac{1}{9790640})+(\frac{1}{26}+\frac{1}{59}+\frac{1}{92}+\frac{1}{104}+\frac{1}{113}+\frac{1}{299}+\frac{1}{929}+\frac{1}{1196}+\frac{1}{2714}+\frac{1}{6854}+\frac{1}{1638851}+\frac{1}{22467413}+\frac{1}{1579899505067}+\frac{1}{6714572896535}+\frac{1}{22467412\times 22467413}+\frac{1}{6714572896535\times 26858291586139})+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}\Big]\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{142}+\frac{1}{9940}+\frac{1}{16}=1$$

，此為利用分母只能為$3k+1$湊成 1。

（五）由分母只能為$3k+1$湊成 1 轉變成分母只能為$3k+2$湊成 1：

1.方法說明：

利用$(3k_1+1)(3k_2+2)=9k_1k_2+6k_1+3k_2+2=3(3k_1k_2+2k_1+1k_2)+2$

將（利用分母只能為$3k+1$湊成 1）$\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

實例：

$$\Big\{\Big[(\frac{1}{14}+\frac{1}{32}+\frac{1}{56}+\frac{1}{224})+(\frac{1}{11}+\frac{1}{44}+\frac{1}{110}+\frac{1}{440})+(\frac{1}{17}+\frac{1}{23}+\frac{1}{68}+\frac{1}{128}+\frac{1}{6260}+\frac{1}{50048}+\frac{1}{9790640})+(\frac{1}{26}+\frac{1}{59}+\frac{1}{92}+\frac{1}{104}+\frac{1}{113}+\frac{1}{299}+\frac{1}{929}+\frac{1}{1196}+\frac{1}{2714}+\frac{1}{6854}+\frac{1}{1638851}+\frac{1}{22467413}+\frac{1}{1579899505067}+\frac{1}{6714572896535}+\frac{1}{22467412\times 22467413}+\frac{1}{6714572896535\times 26858291586139})+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}\Big]\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{142}+\frac{1}{9940}+\frac{1}{16}\Big\}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

六、探討分母只能用奇數 3、5、7…的湊法：

觀察題目給的範例：

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}=1$$

（一）用加減法探討

3、5、7、9、11、15、35、45、231 的最小公倍數為 3465。

$$3465(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231})=1\times 3465$$

$$\Rightarrow 1155+693+495+385+315+231+99+77+15=3465$$

3465的因數為 1，3，5，7，9，11，15，21，33，35，45，55，63，77，99，105，165，231，315，385，495，693，1155，3465。

取 3，5，7，9，11，15 為基準

$$1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15})=\frac{191}{3465}$$

$$191=165+15+11$$

$$\frac{191}{3465}=\frac{165}{3465}+\frac{15}{3465}+\frac{11}{3465}=\frac{1}{21}+\frac{1}{231}+\frac{1}{315}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{231}+\frac{1}{315}=1$$

$$3465=3^2\times 5\times 7\times 11$$

提出猜想：由分為任意多個質數相乘的數可將分子拆成數個因數相加的方法。

取 $3\times 5\times 7^2\times 13=9555$ 。

9555 的因數：1，3，5，7，13，15，21，35，39，49，65，91，105，147 195，245，273，455，637，735，1365，1911，3185，9555。

取 $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{35}+\frac{1}{39}$ 為基準

$$1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{35}+\frac{1}{39})=\frac{107}{1365}$$

$$\frac{107}{1365}=\frac{1+3+5+7+13+15+21}{1365}+\frac{2}{65}$$

$\frac{2}{65}=\frac{1}{33}+\frac{1}{2145}$ ，因為 $\frac{2}{64+1}<\frac{1}{32}$ 所以小於 $\frac{2}{65}$ 的最大單位分數為 $\frac{1}{33}$ 【貪婪演算法】。

$$\frac{107}{1365}=\frac{1}{33}+\frac{1}{65}+\frac{1}{91}+\frac{1}{105}+\frac{1}{195}+\frac{1}{231}+\frac{1}{455}+\frac{1}{1365}+\frac{1}{2145}$$

得 $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{35}+\frac{1}{39}+\frac{1}{33}+\frac{1}{65}+\frac{1}{91}+\frac{1}{105}+\frac{1}{195}+\frac{1}{231}+\frac{1}{455}+\frac{1}{1365}+\frac{1}{2145}=1$。

（二）、利用拆開標準分解式探討：

1.方法說明：

將一數的標準分解式分解，將其中的一項拆成其他的數加在一起，

用分配律將其餘質因數乘上這些數，所得出的數若是原數之因數（不可重複），

即分解成功，將其餘數重複上述步驟。

嘗試分解 3465

$3465=1\times 3^2\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3\times 5\times 7\times 11+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3\times 5\times 7(3+8)+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3^2\times 5\times 7+3\times 5(49+7)+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3^2\times 5\times 7+3\times 5\times 7+3\times 5(38+11)+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3^2\times 5\times 7+3\times 5\times 7+3\times 5\times 11+3\times 5(3+35)+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3^2\times 5\times 7+3\times 5\times 7+3\times 5\times 11+3^2\times 5+5(105)+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3^2\times 5\times 7+3\times 5\times 7+3\times 5\times 11+3^2\times 5+5(11+94)+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3^2\times 5\times 7+3\times 5\times 7+3\times 5\times 11+3^2\times 5+5\times 11+5(7+87)+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3^2\times 5\times 7+3\times 5\times 7+3\times 5\times 11+3^2\times 5+5\times 11+5\times 7+5\times(84+3)+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3^2\times 5\times 7+3\times 5\times 7+3\times 5\times 11+3^2\times 5+5\times 11+5\times 7+3\times 5+3\times 5\times 7(4+11)+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3^2\times 5\times 7+3\times 5\times 7+3\times 5\times 11+3^2\times 5+5\times 11+5\times 7+3\times 5+3\times 7(75)+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3^2\times 5\times 7+3\times 5\times 7+3\times 5\times 11+3^2\times 5+5\times 11+5\times 7+3\times 5+5\times 7(45)+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3^2\times 5\times 7+3\times 5\times 7+3\times 5\times 11+3^2\times 5+5\times 11+5\times 7+3\times 5+5\times 7(11+34)+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3^2\times 5\times 7+3\times 5\times 7+3\times 5\times 11+3^2\times 5+5\times 11+5\times 7+3\times 5+5\times 7\times 11+7(170)+3\times 5\times 7\times 11$

$=3\times 5\times 7\times 11+3^2\times 5\times 7+3\times 5\times 7+3\times 5\times 11+3^2\times 5+5\times 11+5\times 7+3\times 5+5\times 7\times 11+7(3+167)+3\times 5\times 7\times 11$

$$=3\times5\times7\times11+3^2\times5\times7+3\times5\times7+3\times5\times11+3^2\times5+5\times11+5\times7+3\times5+5\times7\times11+3\times7+7(9+158)+3\times5\times7\times11$$

$$=3\times5\times7\times11+3^2\times5\times7+3\times5\times7+3\times5\times11+3^2\times5+5\times11+5\times7+3\times5+5\times7\times11+3\times7+3^2\times7+7(11+147)+3\times5\times7\times11$$

$$=3\times5\times7\times11+3^2\times5\times7+3\times5\times7+3\times5\times11+3^2\times5+5\times11+5\times7+3\times5+5\times7\times11+3\times7+3^2\times7+7\times11+7(147)+3\times5\times7\times11$$

$$=3\times5\times7\times11+3^2\times5\times7+3\times5\times7+3\times5\times11+3^2\times5+5\times11+5\times7+3\times5+5\times7\times11+3\times7+3^2\times7+7\times11+3\times7(49)+3\times5\times7\times11$$

$$=3\times5\times7\times11+3^2\times5\times7+3\times5\times7+3\times5\times11+3^2\times5+5\times11+5\times7+3\times5+5\times7\times11+3\times7+3^2\times7+7\times11+3\times7(11+38)+3\times5\times7\times11$$

$$=3\times5\times7\times11+3^2\times5\times7+3\times5\times7+3\times5\times11+3^2\times5+5\times11+5\times7+3\times5+5\times7\times11+3\times7+3^2\times7+7\times11+3\times7\times11+3\times7(33+5)+3\times5\times7\times11$$

$$=3\times5\times7\times11+3^2\times5\times7+3\times5\times7+3\times5\times11+3^2\times5+5\times11+5\times7+3\times5+5\times7\times11+3\times7+3^2\times7+7\times11+3\times7\times11+3^2\times7\times11+3(35)$$

$$=3\times5\times7\times11+3^2\times5\times7+3\times5\times7+3\times5\times11+3^2\times5+5\times11+5\times7+3\times5+5\times7\times11+3\times7+3^2\times7+7\times11+3\times7\times11+3^2\times7\times11+3(33+2)$$

$$=3\times5\times7\times11+3^2\times5\times7+3\times5\times7+3\times5\times11+3^2\times5+5\times11+5\times7+3\times5+5\times7\times11+3\times7+3^2\times7+7\times11+3\times7\times11+3^2\times7\times11+3^2\times11+1\times5+1\times1$$

$$=1155+315+105+165+45+55+35+15+385+21+63+77+231+693+99+5+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}+\frac{1}{21}+\frac{1}{77}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{231}+\frac{1}{9}+\frac{1}{165}+\frac{1}{55}+\frac{1}{45}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{35}+\frac{1}{693}+\frac{1}{3465}=1$$

（三）利用拆開標準分解式探討的其他例子

分解1540

1540的因數有 1、2、4、5、7、10、11、14、20、22、28、35、44、55、70、77、110、140、154、220、308、385、770、1540 等，

因為因數較多，所以成功分解的可能性較大。

$$1540=2^2\times5\times7\times11$$

$$=2\times5\times7\times11+2\times5\times7\times11$$

$$=2\times5\times7\times11+2^2\times5\times11+5\times11+2\times5\times11+5\times7\times11$$

$$=770+220+55+110+385$$

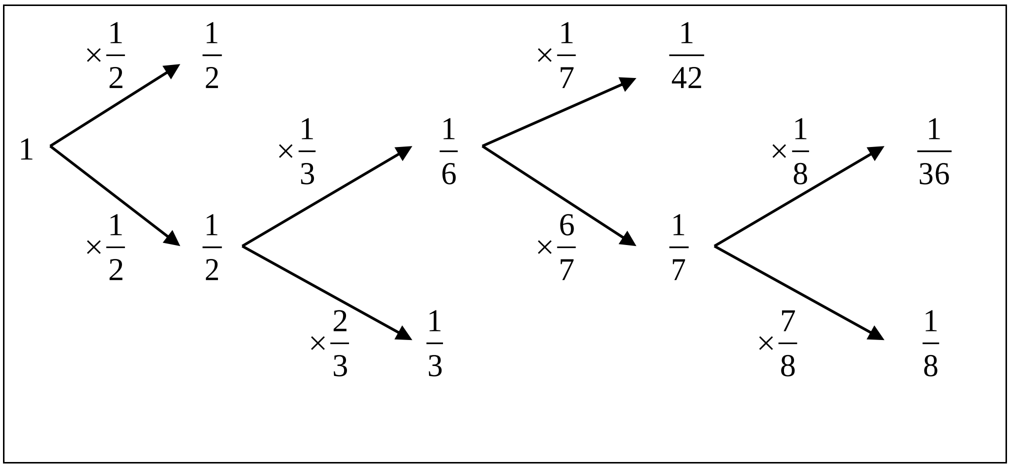
$$=770+385+220+110+55$$

$$\Rightarrow 1=\frac{770}{1540}+\frac{385}{1540}+\frac{220}{1540}+\frac{110}{1540}+\frac{55}{1540}$$

$$\Rightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$$

七、分數乘法的原理：

（一）**樹狀圖**



由上圖得知：如果要將 1 個單位分數拆成 2 個單位分數的和，經過觀察可得知，拆開後的單位分數， 其中 1 個要乘以分母比原本大 1 的單位分數，另一個即可算出。

規則：$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$（例：$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$），得出了一種單位分數分解的方法，因此我們繼續討論單位分數的分解

（二）**單位分數進一步的拆解：**

使用時機：當單位分數重複時使用

1. $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$

2. 閱讀文獻：.Fibonzcci on Egyptian fractions. (M. Dunton &R.E. Grimm, 1966)

文獻上寫了 $\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6\times 11}$

（說明：$\frac{2}{11}$的11加上1就是2的倍數$\Rightarrow\frac{2}{11}=\frac{2}{11+1}+\frac{1}{11}\times\frac{2}{11+1}$）

提出猜想：$\frac{a}{\mathrm{b}}=\left(\frac{1}{b}+1\right)\times\frac{a}{b+x}$且$a$為$b+x$的因數

驗證：$\frac{1}{\mathrm{b}}=\left(\frac{1}{b}+1\right)\times\frac{1}{b+x}$

$\Rightarrow\frac{b+x}{\mathrm{b}}=\frac{1}{b}+1$

$\Rightarrow x=1$

可列出$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}=\left(\frac{x}{b}+1\right)\times\frac{a}{b+x}$

$\Rightarrow \frac{1}{\mathrm{b}} = \left(\frac{x}{b}+1\right) \times \frac{1}{b+x}$

若$\left(\frac{x}{b}+1\right) \times \frac{1}{b+x}$為兩個單位分數相加$\Rightarrow$ x為b的因數

（例：$\frac{1}{63} = \frac{1}{70}\left(\frac{1}{9}+1\right) = \frac{1}{630} + \frac{1}{70}$）

結論：$\frac{1}{\mathrm{b}} = \left(\frac{x}{b}+1\right) \times \frac{1}{b+x}$，前提是$x$為$b$的因數

九、以因數倍數的關係探討如何以單位分數湊成 1：

（一）方法說明：

k 為一不等於 0 的正整數，令 $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$_____【1】。

k_1，k_2，…，k_n 皆不等於 k 且為 k 相異的因數。

$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n \Rightarrow 1 = \frac{k_1}{k} + \frac{k_2}{k} + \cdots + \frac{k_n}{k}$

因為 k_1，k_2，…，k_n 皆為 k 的因數，所以 $\frac{k_1}{k} + \frac{k_2}{k} + \cdots + \frac{k_n}{k}$ 約分後的分子皆會為 1，也

因為 k_1，k_2，…，k_n 都相異，所以約分後的分母也不會相同

（例：$k = 12$，12的因數為 1、2、3、4、6、12，$12 = 6+3+2+1$

$\Rightarrow 1 = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$）。

（二）觀察1到200的正整數和因數的關係：

由 15 頁表 1 可觀察得到

$6n$、$20n$、$28n$、$88n$、$104n$ 等正整數的因數可以如上列【1】式湊成原數。

（三）觀察 $6n$、$20n$、$28n$、$88n$、$104n$

$6n=1n+2n+3n$，6 可以，6 的其餘倍數也可以，其餘依此類推

$20n=10n+5n+4n+n$

$88n=44n+22n+11n+8n+2n+n$

$104n=52n+26n+13n+8n+4n+n$

我們希望找到 n 的變化和「是否能用不同的組合因數湊成原數」的個數是否有關係，

但是因為我們還沒有辦法有系統地找出不同湊法的個數，

因此無法尋找兩者之間的關係。

表 1：正整數 1 到 200 的數和因數的關係表

原數	因數	是否能用因數湊成原數
1	1	否
2	1、2	否
3	1、3	否
4	1、2、4	否
5	1、5	否
6	1、2、3、6	6=1+2+3
7	1、7	否
8	1、2、4、8	否
9	1、3、9	否
10	1、2、5、10	否
11	1、11	否
12	1、2、3、4、6、12	12=1+2+3+6=2+4+6
13	1、13	否
14	1、2、7、14	否
15	1、3、5、15	否
16	1、2、4、8、16	否
17	1、17	否
18	1、2、3、6、9、18	18=1+2+6+9=3+6+9
19	1、19	否
20	1、2、4、5、10、20	20=1+4+5+10
21	1、3、7、21	否
22	1、2、11、22	否

原數	因數	是否能用因數湊成原數
23	1、23	否
24	1、2、3、4、6、8、12、24	24=1+2+3+4+6+8=1+2+3+6+12=1+3+8+12 =2+4+6+12=4+8+12
25	1、5、25	否
26	1、2、13、26	否
27	1、3、9、27	否
28	1、2、4、7、14、28	28=1+2+4+7+14
29	1、29	否
30	1、2、3、5、6、10、15、30	30=1+3+5+6+15=2+3+10+15=5+10+15
31	1、31	否
32	1、2、4、8、16、32	否
33	1、3、11、33	否
34	1、2、17、34	否
35	1、5、7、35	否
36	1、2、3、4、6、9、12、18、36	36=2+3+4+6+9+12=2+3+4+9+18=1+2+6+9+18 =3+6+9+18=1+2+3+12+18=2+4+12+18=6+12+18
37	1、37	否
38	1、2、19、38	否
39	1、3、13、39	否
40	1、2、4、5、8、10、20、40	40=1+2+4+5+8+20=1+4+5+10+20=2+8+10+20
41	1、41	否
42	1、2、3、6、7、14、21、42	42=1+6+14+21=7+14+21
43	1、43	否
44	1、2、4、11、22、44	否

原數	因數	是否能用因數湊成原數
45	1、3、5、9、15、45	否
46	1、2、23、46	否
47	1、47	否
48	1、2、3、4、6、8、12、16、24、48	48=1+2+3+4+6+8+24=1+2+3+6+12+24=8+16+24 =2+4+6+12+24=1+3+8+12+24=1+3+4+16+24 =2+4+6+8+12+16=2+6+16+24=1+2+3+6+8+12+16 =4+8+12+24
49	1、7、49	否
50	1、2、5、10、25、50	否
51	1、3、17、51	否
52	1、2、4、13、26、52	否
53	1、53	否
54	1、2、3、6、9、18、27、54	54=3+6+18+27=1+2+6+18+27=9+18+27
55	1、5、11、55	否
56	1、2、4、7、8、14、28、56	56=1+2+4+7+14+28=2+4+8+14+28
57	1、3、19、57	否
58	1、2、29、58	否
59	1、59	否
60	1、2、3、4、5、6、10、12、15、20、30、60	60=1+2+3+4+5+10+15+20=1+2+4+6+12+15+20 =2+5+6+12+15+20=1+2+4+5+6+10+12+20=10+20+30 =2+3+5+20+30=4+6+20+30=1+4+5+20+30 =1+2+3+4+20+30=3+4+5+6+10+12+20 =3+4+6+12+15+20=3+12+15+30=1+2+3+4+5+15+30 =2+3+4+6+10+15+20=1+3+5+6+10+15+20

原數	因數	是否能用因數湊成原數
		=4+5+6+10+15+20=1+3+4+5+12+15+20 =1+2+10+12+15+20=3+10+12+15+20=1+3+5+6+15+30 =2+3+4+6+15+30=3+4+5+6+12+30=1+3+4+10+12+30 =1+2+5+10+12+30=3+5+10+12+30=2+6+10+12+30 =4+5+6+15+30=2+3+10+15+20=5+10+15+30 =1+4+10+15+30=1+2+12+15+30=1+3+6+20+30
61	1、61	否
62	1、2、31、62	否
63	1、3、7、9、21、63	否
64	1、2、4、8、16、32、64	否
65	1、5、13、65	否
66	1、2、3、6、11、22、33、66	66=2+3+6+22+33=11+22+33
67	1、67	否
68	1、2、4、17、34、68	否
69	1、3、23、69	否
70	1、2、5、7、10、14、35、70	否
71	1、71	否
72	1、2、3、4、6、8、9、12、18、24、36、72	72=1+2+3+6+24+36=1+3+6+8+18+36 =1+6+8+9+12+36=2+4+6+24+36=1+3+8+24+36 =3+6+9+18+36=3+9+24+36=4+6+8+18+36=4+8+24+36 =6+12+18+36=12+24+36…
73	1、73	否
74	1、2、37、74	否
75	1、3、5、15、25、75	否

原數	因數	是否能用因數湊成原數
76	1、2、4、19、38、76	否
77	1、7、11、77	否
78	1、2、3、6、13、26、39、78	78=13+26+39
79	1、79	否
80	1、2、4、5、8、10、16、20、40、80	80=1+2+4+5+8+20+40=1+4+5+10+20+40=4+16+20+40 =2+4+8+10+16+40=2+8+10+20+40=1+5+8+10+16+40
81	1、3、9、27、81	否
82	1、2、41、82	否
83	1、83	否
84	1、2、3、4、6、7、12、14、21、28、42、84	84=1+2+4+6+7+12+42=1+3+4+6+7+21+42 =1+3+4+6+28+42=1+4+6+7+14+42=1+6+7+28+42 =2+12+28+42=3+4+7+28+42=7+14+21+42=14+28+42 =1+2+3+4+6+7+12+21+28=2+3+4+12+14+21+28⋯
85	1、5、17、85	否
86	1、2、43、86	否
87	1、3、29、87	否
88	1、2、4、8、11、22、44、88	88=1+2+8+11+22+44
89	1、89	否
90	1、2、3、5、6、9、10、15、18、30、45、90	90=1+2+3+5+9+10+15+45=1+2+5+9+18+45 =1+2+9+15+18+45=2+10+15+18+45⋯
91	1、7、13、91	否
92	1、2、4、23、46、92	否
93	1、3、31、93	否
94	1、2、47、94	否

原數	因數	是否能用因數湊成原數
95	1、5、19、95	否
96	1、2、3、4、6、8、12、16、24、32、48、96	96=1+2+3+4+6+32+48=1+2+3+4+6+8+24+48 =4+12+32+48=1+2+3+4+6+8+16+24+32 =1+3+4+8+32+48=1+3+12+32+48=1+3+8+12+16+24+32 =1+2+3+6+12+16+48=16+32+48⋯
97	1、97	否
98	1、2、7、14、49、98	否
99	1、3、9、11、33、99	否
100	1、2、4、5、10、20、25、50、100	100=1+4+20+25+50=5+20+25+50
101	1、101	否
102	1、2、3、6、17、34、51、102	102=17+34+51
103	1、103	否
104	1、2、4、8、13、26、52、104	104=1+4+8+13+26+52
105	1、3、5、7、15、21、35、105	否
106	1、2、53、106	否
107	1、107	否
108	1、2、3、4、6、9、12、18、27、36、54、108	108=1+2+3+9+12+18+27+36=6+9+12+18+27+36 =2+3+4+6+12+18+27+36=2+4+9+12+18+27+36
109	1、109	否
110	1、2、5、10、11、22、55、110	否
111	1、3、37、111	否
112	1、2、4、7、8、14、16、28、56、112	112=1+4+7+16+28+56=1+2+4+7+14+28+56 =2+4+8+14+28+56

原數	因數	是否能用因數湊成原數
113	1、113	否
114	1、2、3、6、19、38、57、114	114=19+38+57
115	1、5、23、115	否
116	1、2、4、29、58、116	否
117	1、3、9、13、39、117	否
118	1、2、59、118	否
119	1、7、17、119	否
120	1、2、3、4、5、6、8、10、12、15、20、24、30、40、60、120	120=1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+24+30 =1+3+4+5+6+12+15+20+24+30 =1+2+3+4+6+8+10+12+20+24+30 =1+2+3+4+5+6+10+15+20+24+30 =1+8+10+12+15+20+24+30
121	1、11、121	否
122	1、2、61、122	否
123	1、3、41、123	否
124	1、2、4、31、62、124	否
125	1、5、25、125	否
126	1、2、3、6、7、9、14、18、21、42、63、126	126=1+2+18+42+63=21+42+63=7+14+42+63 =1+9+14+18+21+63=3+18+42+63 =1+2+3+6+9+42+63=1+2+3+6+7+9+14+21+63
127	1、127	否
128	1、2、4、8、16、32、64、128	否
129	1、3、43、129	否
130	1、2、5、10、13、26、65、130	否

原數	因數	是否能用因數湊成原數
131	1、131	否
132	1、2、3、4、6、11、12 、22、33、44、66、132	132=22+44+66=1+4+6+11+44+66=1+3+6+12+44+66 =11+22+33+66=4+6+11+12+22+33+44
133	1、7、19、133	否
134	1、2、67、134	否
135	1、3、5、9、15、27、45、135	否
136	1、2、4、8、17、34、68、136	否
137	1、137	否
138	1、2、3、6、23、46、69、138	138=23+46+69
139	1、139	否
140	1、2、4、5、7、10、14 、20、28、35、70、140	140=7+28+35+70=1+2+4+28+35+70 =1+4+10+20+35+70=4+7+10+14+35+70
141	1、3、47、141	否
142	1、2、71、142	否
143	1、11、13、143	否
144	1、2、3、4、6、8、9、12、16、 18、24、36、48、72、144	144=24+48+72=2+4+6+12+48+72 =1+6+8+9+48+72=8+16+48+72 =6+18+48+72=12+24+36+72 =6+12+18+24+36+48=1+2+3+4+6+8+48+72 =1+2+3+4+6+8+12+24+36+48
145	1、5、29、145	否
146	1、2、73、146	否
147	1、3、7、21、49、147	否
148	1、2、4、37、74、148	否

原數	因數	是否能用因數湊成原數
149	1、149	否
150	1、2、3、5、6、10、15、25、30、50、75、150	150=25+50+75=2+3+5+15+50+75=5+15+25+30+75 =1+3+6+15+50+75=1+3+5+6+10+50+75
151	1、151	否
152	1、2、4、8、19、38、76、152	否
153	1、3、9、17、51、153	否
154	1、2、7、11、14、22、77、154	否
155	1、5、31、155	否
156	1、2、3、4、6、12、13、26、39、52、78、156	156=1+3+4+6+12+52+78=3+4+6+13+52+78 =1+2+4+6+13+52+78=26+52+78=1+12+13+52+78
157	1、157	否
158	1、2、79、158	否
159	1、3、53、159	否
160	1、2、4、5、8、10、16、20、32、40、80、160	160=8+32+40+80=4+16+20+40+80=2+8+10+20+40+80 =1+5+8+10+16+40+80=1+2+4+5+8+20+40+80 =1+2+5+32+40+80…
161	1、7、23、161	否
162	1、2、3、6、9、18、27、54、81、162	162=27+54+81=9+18+54+81=3+6+18+54+81 =1+2+6+18+54+81…
163	1、163	否
164	1、2、4、41、82、164	否
165	1、3、5、11、15、33、55、165	否
166	1、2、83、166	否
167	1、167	否

原數	因數	是否能用因數湊成原數
168	1、2、3、4、6、7、8、12、14、21、24、28、42、56、84、168	168=28+56+84=2+12+14+56+84=1+3+4+6+14+56+84=6+8+28+42+84=14+28+42+84⋯
169	1、13、169	否
170	1、2、5、10、17、34、85、170	否
171	1、3、9、19、57、171	否
172	1、2、4、43、86、172	否
173	1、173	否
174	1、2、3、6、29、58、87、 174	174=29+58+87
175	1、5、7、25、35、175	否
176	1、2、4、8、11、16 、22、44、88、176	176=2+4+16+22+44+88=1+2+8+11+22+44+88
177	1、3、59、177	否
178	1、2、89、178	否
179	1、179	否
180	1、2、3、4、5、6、9、10、12、15、18、20、30、 36、45、60、90、180	180=30+60+90=10+20+60+90=1+5+9+15+60+90=1+2+3+9+15+60+90=1+2+3+4+5+15+60+90⋯
181	1、181	否
182	1、2、7、13、14、26、91、182	否
183	1、3、61、183	否
184	1、2、4、8、23、46、92、 184	否
185	1、5、37、185	否
186	1、2、3、6、31、62、93、 186	186=31+62+93
187	1、11、17、187	否

原數	因數	是否能用因數湊成原數
188	1、2、4、47、94、188	否
189	1、3、7、9、21、27、63、 189	否
190	1、2、5、10、19、38、95、190	否
191	1、191	否
192	1、2、3、4、6、8、12、16、24、32、48、64、96、 192	192=32+64+96=2+4+16+64+96=1+2+3+16+64+96 =2+4+6+8+12+64+96=1+3+4+8+32+48+96…
193	1、193	否
194	1、2、97、194	否
195	1、3、5、13、15、39、65、195	否
196	1、2、4、7、14、28、49、 98、196	196=7+14+28+49+98=1+2+4+14+28+49+98
197	1、197	否
198	1、2、3、6、9、11、18、22、33、66、99、198	198=33+66+99=11+22+66+99=2+9+22+66+99 =2+3+6+22+66+99=1+3+11+18+66+99…
199	1、199	否
200	1、2、4、5、8、10、20、25、40、50、100、200	200=10+40+50+100=1+4+5+40+50+100=2+8+40+50+100 =2+5+8+10+25+50+100=1+2+4+5+8+10+20+50+100 =1+2+4+8+20+25+40+100=1+2+4+8+10+25+50+100 =2+5+8+20+25+40+100=1+4+10+20+25+40+100 =5+10+20+25+40+100…

伍、 研究結果

一、經過以上研究，我們發現$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$是以單位分數湊成 1 的最少個數的例子，且許多不同的切入都可以湊成這個結果。

二、透過觀察，我們發現當1分解成n個相異單位分數的和時，且分母全為奇數時，n一

定要是奇數個才有可能湊成 1、當1分解成n個相異單位分數的和時，且分母全為偶數，n為偶數和奇數都有可能湊成 1。

三、貪婪演算法很好用，在遇到較難分解的真分數時可快速分解。

四、以加減法探討有點麻煩，用了較多其他的方法，容易搞混，但是此方法的解釋較簡單。

五、利用拆開標準分解式的方法探討時，可以找出許多組不同的單位分數湊成 1，但如果要分解的正整數的因數太少，會導致可拆開的項太少，所以相較於其他湊成 1 的方法，此方法適合用於尋找因數較多的正整數。

六、以乘法探討可以使用式子$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$來分解單位分數，讓我們在要分解單位分數時就可以直接套用。此外，樹狀圖也可以清楚的表示出分解的過程，使我們不會亂掉。

七、以因數倍數探討可以清楚得知分解某數時，最少的單位分數個數，但是需要將此數「是否能用因數湊成原數」的所有可能全部列出，有可能會漏掉，而且花特別多的時間去嘗試，因此此方法較麻煩。

八、關於期刊上的待答問題：

（一）用分母只能為偶數湊成 1：

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$（最少個數）。

（二）用分母只能為$3k+2$湊成 1：

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{32}+\frac{1}{56}+\frac{1}{224}$（最少個數）。

陸、 討論

各方法優缺點探討：

一、以貪婪演算法探討

優點：（一）可快速分解較難分解的真分數。

（二）可與其他方法合併使用。

缺點：（一）有時分解出的分母過大，導致計算難度增加。

（二）要深入了解才能靈活應用。

二、以加減法探討

優點：（一）可以較清楚表示湊成 1 的過程 。

缺點：（一）用了較多其他的方法，容易搞混。

三、利用拆開標準分解式探討

優點：（一）可以找出較多不同的單位分數湊成 1。

（二）可以套用在許多正整數上面。

缺點：（一）計算過程太多，導致計算時間過長。

（二）有些正整數的因數太少，導致可拆開的方式太少。

四、以分數乘法探討

優點：（一）樹狀圖可以清楚的表示出分解的過程。

（二）當分解到剩下 1 個單位分數時，且使用 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ 分解後不會重複，就能成功湊成 1。

缺點：（一）當分子不為 1 時就無法使用式子 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ 分解單位分數。

（二）「$\frac{1}{\mathrm{b}}=\left(\frac{x}{b}+1\right)\times\frac{1}{b+x}$，前提是 x 為 b 的因數」此方法較麻煩

五、以因數倍數關係探討

優點：（一）只要能使用某整數相異的因數湊成原數，即可利用此方式將單位分數分解成功地湊成 1，過程簡便。

（二）可以清楚得知使用正整數湊成 1 的最少單位分數個數。

缺點：（一）有些數字無法使用此方法分解。

（二）有些數字的分解過程過於繁雜，導致計算上的不便。

柒、 結論

湊成 1 的方法千變萬化，我們從題目給的範例做出了許多的方法，也猜測作者給的

另一個範例的思考歷程，有可能被我們猜中了，也有可能只是擦到一點邊。我們使用的方法都是學校教過的方法，從基本的觀念延伸，有可能「湊成 1」這個問題沒有一個通解，只能根據不同的題目用不同的方法，以我們現有的能力比較難以尋找通解，所以我們希望能用基本的觀念來解釋這個問題，靜下心好好思考，享受其中的樂趣！

捌、 參考資料及其他

田成俠譯（1993）。*數學與逼真推理* 。台北市：徐氏基金會。（G..Polya,1954）

全任重（2003）。製作數學科展的一些點子・*科學教育月刊* ，*259*，21-28。

李孟修、劉琦崴（2006）埃及分數之固定項數分解問題。*台灣 2006 年國際科學展覽會*。

張宮明（2019）高中數學科展經驗談-數學探究的樂趣。*科學研習月刊*，58（6）。上網日期：2020/9/28。取自：https://www.ntsec.edu.tw/Article.aspx?a=16169

游森棚（2004）。給師生的數學科展建議。上網日期：2020/07/28。取自：Science_Center-游森棚教授.pdf

游森棚（2018）。湊成 1。*科學研習月刊*，57（9）。上網日期：2020/08/24。取自：國立台灣科學教育館 https://www.ntsec.gov.tw/User/Article.aspx?a=3592

黃敏晃（1986）。*數學解題規則*。台北市：牛頓出版社。

蔡坤憲譯（2018）*怎樣解題*。台北市：遠見天下文化。（G..Polya,1945）

M. Dunton and R.E. Grimm（1966）.Fibonzcci on Egyptian fractions. The Fibonacci Quarterly, 4(4), 339-353.