

屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

裝訂線

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：魔方陣的預言

關鍵詞：魔方陣、預言魔術、四則運算
(最多三個)

裝訂線

編號：B1041

製作說明：

- 1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
- 2.編號:自報名系統報名完取得作品編號後,先填寫回作品封面上,再存成 docx 及 pdf 檔後再上傳。
- 3.封面編排由參展作者自行設計。

裝訂線

目錄

內容	頁次
摘要	1
壹、研究動機	1
貳、研究目的	2
參、研究設備及器材	2
肆、研究限制	2
伍、研究過程及方法	3
陸、研究結果及討論	12
柒、參考資料	19

摘要

針對常見的 3×3 方陣延伸出屬於方陣才有的性質及觀念，進而將 3×3 方陣擴大為 4×4 方陣或 5×5 方陣，只要使用簡單的四則運算，並使用性質及觀念，就能成就出屬於方陣的預言魔術。

壹、研究動機

3×3 方陣有一個常見的數學題目：

在以下 3×3 方陣中填入1~9的數字，使其直行、橫列、對角線的數字和皆相等

答案可以有很多寫法，只要讓和為15，就為正解

8	3	4
1	5	9
6	7	2

那麼，有沒有可能利用方陣的性質，變化出只有方陣能計算出的數字，甚至是預言出我們要的數字呢？

貳、研究目的

- 一、 藉由指示，操作方陣上的數字，可以得出什麼樣的結果？
- 二、 擴大為 4×4 、 5×5 的方陣時，此方陣可以怎麼操作出想要的結果？
- 三、 如何利用常見的加、減、乘、除的計算，預言出此方陣的結果？

參、研究設備及器材

紙、筆、計算機、電腦

肆、研究限制

因為要預言出想要的結果數字，一開始方陣格內的數字，必須由魔數師先設定好數字，如果讓操作者亂數安排方陣格內的數字，此預言魔術將無法完成。

伍、研究過程及方法

一、 研究過程

魔方陣的預言：

1. 魔數師可以先跟觀眾預言一個數字，再寫在空白紙上並收起來
2. 再請觀眾在表格選 1 個數字，將選出的數字圈起來，並把此數字的直行及橫列的數字劃掉
3. 再請觀眾選 1 個數字。記住！被劃掉的數字不能選。
一樣將選出來的數字圈起來，並把此數字的直行及橫列的數字劃掉。
4. 重複一樣的步驟，直到表格內所有的數字都被圈起來或劃掉。
5. 最後將圈起來的數字都加起來，得到數字的總和
6. 魔數師將寫下預言的紙張打開，就會發現，It' s MAGIC !

1	2	3
4	5	6
7	8	9

魔數師的準備：

1. 畫出 3×3 的方陣後，由左至右、由上至下，按照順序寫下1~9
2. 預言的數字為**15**，必須記下來，讓觀眾確認是空白的紙後，就可以寫上去
3. 接下來就是讓觀眾去選數字，並且告訴觀眾選完數字後的操作

例：			
<p>1. 若觀眾第一個數字選 7，就將 7 圈起來，並將跟 7 位於同一直行(1 跟 4)及同一橫列(8 跟 9)的數字劃掉</p>	1	2	3
<p>2. 接著觀眾再選 6，就將 6 圈起來，並將跟 6 位於同一直行(3 跟 9)及同一橫列(4 跟 5)的數字劃掉</p>	1	2	3
<p>3. 最後觀眾只能選 2，將 2 圈起來</p> <p>4. 接著請觀眾將圈起來的數字加起來，魔數師再將預言紙打開，就會發現數字和跟預言的數字相同，魔術成功</p>	4	5	6
	7	8	9
	1	2	3
	4	5	6
	7	8	9

二、研究方法

如何得知預言數字：

1	2	3
4	5	6
7	8	9

若方陣內的數字是這樣編排的話，藉由圈數字及劃掉數字的操作會發現：

1. 每一直行只會圈一個數字
2. 每一橫列只會圈一個數字
3. 藉由第 1 點跟第 2 點的交集會得到一個數字，因此一定只會圈三個數字
4. 而這三個數字的和一定為15

利用代數證明：

若將 3×3 的方陣的上方及左方分別寫下代數，示意如下：

	D	E	F
A	1	2	3
B	4	5	6
C	7	8	9

這些代數的意義為：

將字母往右、往下畫線後，連線後的交點的數字，即為此兩字母的和

因此可寫出九個方程式： $A + D = 1$ 、 $A + E = 2$ 、 $A + F = 3$ 、 $B + D = 4$ 、

$B + E = 5$ 、 $B + F = 6$ 、 $C + D = 7$ 、 $C + E = 8$ 、 $C + F = 9$

從第 4 頁的例子的結果可以觀察到

1	2	3
4	5	6
7	8	9

圈出的數字為 2、6、7，即為 $A + E$ 、 $B + F$ 、 $C + D$ ，而數字和為 15

即 $A + E + B + F + C + D = 15$ ，整理後會得到 $A + B + C + D + E + F = 15$

會發現所有代數相加的和為 15

證明：

若將所有的方程式相加

$$\left\{ \begin{array}{l} A + D = 1 \\ A + E = 2 \\ A + F = 3 \\ B + D = 4 \\ B + E = 5 \\ B + F = 6 \\ C + D = 7 \\ C + E = 8 \\ C + F = 9 \end{array} \right.$$

整理後會得到 $3A + 3B + 3C + 3D + 3E + 3F = 45$

依據等量公理，左右兩邊同除以 3，就會得到 $A + B + C + D + E + F = 15$

因此，不管怎麼圈數字，只要按照規定的方式劃掉數字後，一定會得到方陣外所有代數的和。

※快速知道預言數字的方式：

從九個方程式， $A + D = 1$ 、 $A + E = 2$ 、 $A + F = 3$ 、 $B + D = 4$ 、 $B + E = 5$ 、 $B + F = 6$ 、 $C + D = 7$ 、 $C + E = 8$ 、 $C + F = 9$ 中，若我們只看對角線的數字會得到： $A + D = 1$ 、 $B + E = 5$ 、 $C + F = 9$ ，而將這三個方程式加總並整理後會得到 $A + B + C + D + E + F = 15$ ，因此，我們可以直接找對角線的數字和，即為預言數字。

自己做出魔方陣

如果不要按照1~9的順序，可以用自己的生日創造出魔方陣的預言

1. 在黃色的格子中，按照順序填上生日。例如填上9、7、0、4、2、1
2. 把這六個數字加起來，填在綠色格子裡。例如 $9 + 7 + 0 + 4 + 2 + 1 = 23$
3. 按照前面的證明得知，魔方陣的預言數字為這六個數字的總和(即為23)
4. 把黃色格子裡的數字，按照前面的方式計算，填入白色格子
5. 最後，把黃色、綠色部分擦掉，白色格子的部分，就是 3×3 的魔方陣，而預言的數字即為綠格中的數字

23	4	2	1
9	13	11	10
7	11	9	8
0	4	2	1

製作完魔方陣後，用同樣的方式，讓觀眾圈數字及劃數字，就會發現預言的數字即為綠色格子的數字。

擴大魔方陣：

若擴大為 4×4 、 5×5 的魔方陣，此預言魔術還是可以成立，例子如下：

4×4 魔方陣：

73	2	5	9	8
7	⑨	12	16	15
12	14	17	21	⑳
14	16	19	㉓	22
16	18	㉑	25	24

從黃格中可得到預言數字為 $7 + 12 + 14 + 16 + 2 + 5 + 9 + 8 = 73$

而圈選的數字和為 $9 + 21 + 23 + 20 = 73$

因此 4×4 的魔方陣也成立

5 × 5 魔方陣：

45	3	8	0	1	2
7	⑩	15	7	8	9
4	7	12	④	5	6
5	8	13	5	⑥	7
9	12	⑪	9	10	11
6	9	14	6	7	⑧

從黃格中可得到預言數字為 $7 + 4 + 5 + 9 + 6 + 3 + 8 + 0 + 1 + 2 = 45$

而圈選的數字和為 $10 + 17 + 4 + 6 + 8 = 45$

因此 5 × 5 的魔方陣也成立

同理，也可以用同樣的方法製作出 6 × 6、7 × 7 的魔方陣。

減法的魔方陣：

若用減法製作魔方陣，可以將加法的方式，套用到減法，依序寫到白格內

如右圖所示：

【用代數表示的形式】

	D	E	F
A	$A - D$	$A - E$	$A - F$
B	$B - D$	$B - E$	$B - F$
C	$C - D$	$C - E$	$C - F$

若要找預言數字，一樣可以找對角線的數字和，從例子中可以得知：

預言數字和為 $(A - D) + (B - E) + (C - F)$

整理後可以得到 $(A + B + C) - (D + E + F)$

因此，預言數字為：左行數字和減上列數字和

製作完魔方陣後，用同樣的方式，讓觀眾圈數字及劃數字，就會發現預言的數字即為綠格子的數字。

例：【減法的魔方陣】

用簡單的整數數字來舉例

1. 在黃色的格子中，按照順序填上6、5、4、3、2、1
2. 按照前面的證明得知，魔方陣的預言數字為左行數字和減上列數字和
3. 預言數字為 $(6 + 5 + 4) - (3 + 2 + 1) = 15 - 6 = 9$ ，填在綠色格子裡
4. 再把黃色格子裡的數字，按照減法的方式計算，填入白色格子
5. 最後，把黃色、綠色部分擦掉，白色格子的部分，就是 3×3 的魔方陣，而預言的數字即為綠格中的數字

9	3	2	1
6	3	4	5
5	2	3	4
4	1	2	3

製作完魔方陣後，用同樣的方式，讓觀眾圈數字及劃數字，就會發現預言的數字即為綠格子的數字。

同理，可仿照加法的魔方陣形式，用同樣的方法製作出 4×4 、 5×5 的魔方陣，甚至更大的魔方陣。

陸、研究結果及討論

一、研究結果

魔方陣的預言【加法形式】

	D	E	F
A	A + D	A + E	A + F
B	B + D	B + E	B + F
C	C + D	C + E	C + F

在方陣左行黃格及上列黃格寫下代數A、B、C、D、E、F後

在白格寫下黃格交集格的代數和，如上圖所示

再將預言數字寫在綠格內，預言數字為黃格所有的代數總和

即 $A + B + C + D + E + F$

再把黃格跟綠格擦掉，利用白格的 3×3 魔方陣，跟觀眾進行魔方陣的預言魔術

例子

1. 在黃格內依序填入
1、2、3、4、5、6

	4	5	6
1			
2			
3			

2. 在白格寫下黃格交集格的數字和，如右圖所示
3. 將黃格的數字總和寫在綠格
- $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
- 即21為預言數字

21	4	5	6
1	5	6	7
2	6	7	8
3	7	8	9

<p>4. 把黃格跟綠格擦掉，使用白格來進行魔方陣的預言魔術</p>	<table border="1" style="width: 100%; height: 100%; text-align: center;"> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> </table>	5	6	7	6	7	8	7	8	9
5	6	7								
6	7	8								
7	8	9								
<p>5. 展示魔方陣後，向觀眾預言一個數字，寫在空白的紙上並收起來(從一開始的準備可以得知預言數字為 21)</p> <p>6. 若觀眾第一個數字選 5，就將 5 圈起來，並將跟 5 位於同一直行(6 跟 7)及同一橫列(6 跟 7)的數字劃掉</p>	<table border="1" style="width: 100%; height: 100%; text-align: center;"> <tr><td>⑤</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> </table>	⑤	6	7	6	7	8	7	8	9
⑤	6	7								
6	7	8								
7	8	9								
<p>7. 接下來再選 7，就將 7 圈起來，並將跟 7 位於同一直行(6 跟 8)及同一橫列(6 跟 8)的數字劃掉</p> <p>8. 最後觀眾只能選 9</p> <p>9. 接著請觀眾將圈起來的數字加起來，並將預言紙打開，就會發現數字和跟預言的數字相同，魔術成功</p>	<table border="1" style="width: 100%; height: 100%; text-align: center;"> <tr><td>⑤</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>⑦</td><td>8</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>⑨</td></tr> </table>	⑤	6	7	6	⑦	8	7	8	⑨
⑤	6	7								
6	⑦	8								
7	8	⑨								

魔方陣的預言【減法形式】

	D	E	F
A	A - D	A - E	A - F
B	B - D	B - E	B - F
C	C - D	C - E	C - F

在方陣左行黃格及上列黃格寫下代數A、B、C、D、E、F後

在白格寫下黃格代數交集格的代數差，如上圖所示

再將預言數字寫在綠格內，預言數字為左行黃格數字和減上列黃格數字和

即 $(A + B + C) - (D + E + F)$

再把黃格跟綠格擦掉，利用白格的 3×3 魔方陣，跟觀眾進行魔方陣的預言魔術

例子

1. 在黃格內依序填入
6、5、4、3、2、1

		3	2	1
6				
5				
4				

2. 在白格寫下黃格交集格的數字差，如右圖所示
3. 將左行黃格數字和減上列黃格數字和寫在綠格， $(6 + 5 + 4) - (3 + 2 + 1) = 9$
即9為預言數字

9	3	2	1
6	3	4	5
5	2	3	4
4	1	2	3

<p>4. 把黃格跟綠格擦掉，使用白格來進行魔方陣的預言魔術</p>	<table border="1"> <tr> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> </table>	3	4	5	2	3	4	1	2	3
3	4	5								
2	3	4								
1	2	3								
<p>5. 展示魔方陣後，向觀眾預言一個數字，寫在空白的紙上並收起來(從一開始的準備可以得知預言數字為 9)</p> <p>6. 若觀眾第一個數字選左行的 2，就將 2 圈起來，並將跟 2 位於同一直行(3 跟 1)及同一橫列(3 跟 4)的數字劃掉</p>	<table border="1"> <tr> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>②</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> </table>	3	4	5	②	3	4	1	2	3
3	4	5								
②	3	4								
1	2	3								
<p>7. 接下來再選 5，就將 5 圈起來，並將跟 5 位於同一直行(4 跟 3)及同一橫列(3 跟 4)的數字劃掉</p> <p>8. 最後觀眾只能選 2</p> <p>9. 接著請觀眾將圈起來的數字加起來，並將預言紙打開，就會發現數字和跟預言的數字相同，魔術成功</p>	<table border="1"> <tr> <td>3</td> <td>4</td> <td>⑤</td> </tr> <tr> <td>②</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>②</td> <td>3</td> </tr> </table>	3	4	⑤	②	3	4	1	②	3
3	4	⑤								
②	3	4								
1	②	3								

二、 討論

1. 數字的選擇：

研究發現數字的選擇不侷限於正整數，也可以使用負整數或0，甚至也能使用分數及小數來製作魔方陣，不過在計算上會較為複雜，可以斟酌使用

2. 魔方陣的大小：

減法也可以仿照加法的魔方陣形式，用同樣的方法製作出 4×4 、 5×5 的魔方陣，甚至更大的魔方陣

3. 固定的數字形式

魔方陣內的數字是自己定下來的，不能讓對方亂填數字，否則可能會失去我們想要的預言數字

柒、參考資料

1. 國中數學遊戲 李國賢著