# 屏東縣第 **61** 屆國中小學科學展覽會

# 作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：翻滾吧**!**三角形

關鍵詞：三角形、矩形、路徑

編號：**B1039**

# 壹、 研究動機

在第 60 屆科展中有一個這樣的研究題目：給我滾回來!探討正方形在矩形外滾動問題。從研究中我們看見在起始情況為正方形與矩形頂點重合，且矩形邊長為正方形邊長整數倍的情況下，正方形觀察點在矩形外的滾動路徑長是具有規律性的一般化情形。這引起我們的好奇：正三角形在矩形外滾動是否也具有一般化情形？

# 貳、 研究目的

一、正三角形在矩形外如何滾動？

二、正三角形的滾動情形是固定的嗎？要滾動幾圈才能回到原來位置？

三、正三角形在矩形外滾動路徑是否有規則？

四、正三角形在矩形外滾動路徑的一般化情形為何?

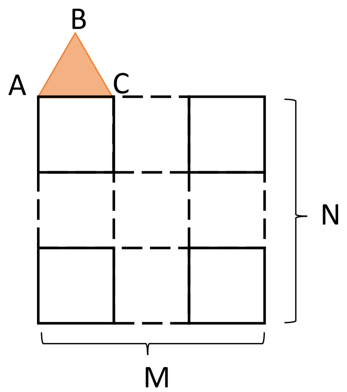
# 參、 研究設備及器材

電腦、紙、筆、幾何模型

# 肆、 研究過程

一、正三角形在矩形外如何滾動？

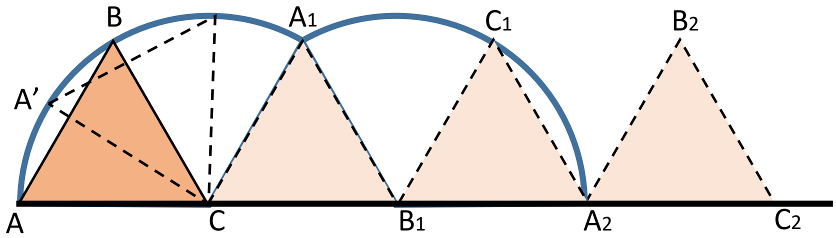
在研究之前，我們先設定幾個探討的基本條件：首先，在起始位置上，正三角形頂點與矩形頂點重合；其次，矩形邊長為正三角形邊長的整數倍。基於以上兩點條件，為方便討論，接下來我們都將正三角形邊長設定為 1 單位長，矩形的長為 M 單位長，寬為 N 單位長，其中 M、N 為正整數，且起始重合點稱為 A 點。如下圖一所示：




圖一

(一)、正三角形在直線上的滾動狀況

正三角形在直線上滾動前進時，只要滾動 3 次，三角形的三個頂點就回到原來的相對位置。如圖二所示：

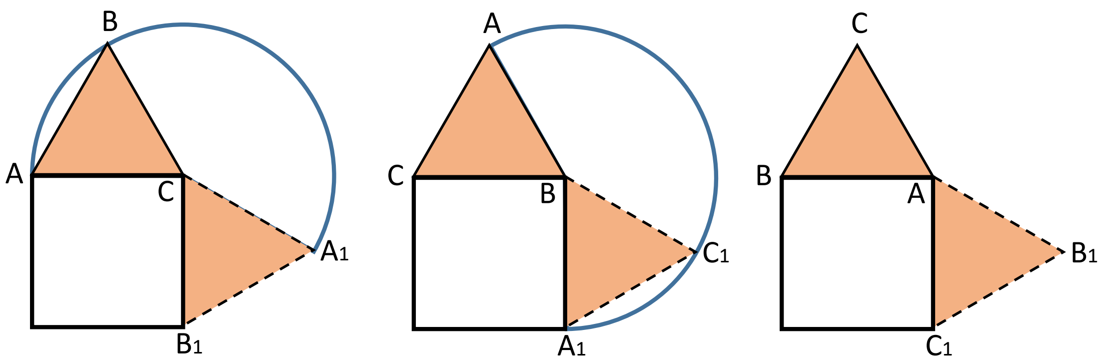



圖二

若以 A 點為觀察點，由圖一也可看出，分別以 B、C 為圓心轉動的時候，轉動半徑皆為正三角形邊長，轉動角度皆為 120 度。

(二)、正三角形在轉角的滾動狀況

正三角形在轉角滾動前進時，若分別以 B、C 為圓心轉動，則轉動半徑皆為正三角形邊長，轉動角度皆為 210 度；若以 A 點為圓心則無轉動路徑。如圖三所示：




圖三

二、正三角形的滾動情形是固定的嗎？要滾動幾圈才能回到原來位置？

由以上的討論，我們知道當正三角形要滾動回原本的對應位置時，所滾動的次數必須為 3 的倍數。那麼在各種邊長比例的矩形中，A 點至少須繞行幾圈才能回到起始位置？

根據基本設定，矩形的周長為 2(M+N)，又正三角形滾動次數必須為 3 的倍

數，因此可以將所有情況分為以下兩種情形：

(一) 當 M+N 為 3 的倍數時，則 2(M+N)必為 3 的倍數，因此正三角形只要繞矩形滾動 1 圈即可回到初始對應位置。

(二) 當 M+N 不為 3 的倍數時，則 2(M+N)必須再乘以 3 才可為 3 的倍數，因此正三角形必須繞矩形滾動 3 圈才能回到初始對應位置。

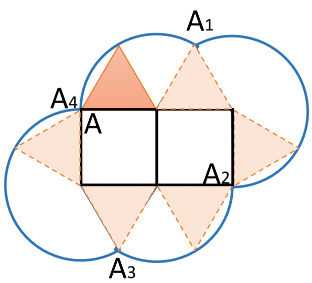
藉由以上的結論，接下來我們討論路徑長時，將以矩形的長寬和 M+N 是否為 3 的倍數兩種類型進行討論。

三、正三角形在矩形外滾動路徑是否有規則？

根據上述結論，我們先觀察 M+N 為 3 的倍數之類型，此類型中，正三角形皆沿矩形滾動 1 圈即可回到初始對應位置：

(一) M+N=3 時

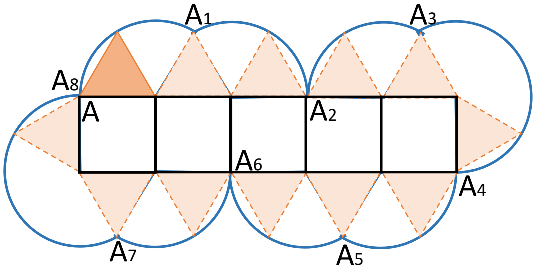
1. (M，N)=(2，1)




A 點的轉動角度中：
120 度有 2 個，
210 度有 2 個。

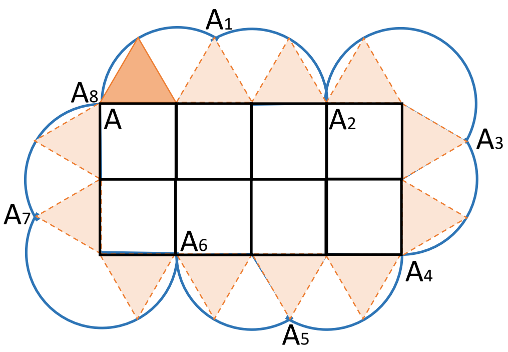
(二) M+N=6 時

1. (M，N)=(5，1)



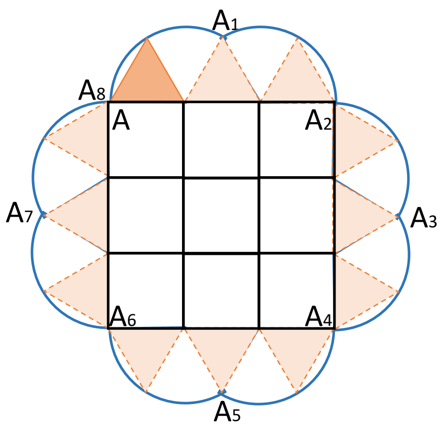

A 點的轉動角度中：
120 度有 6 個，
210 度有 2 個。

2. (M，N)=(4，2)




A 點的轉動角度中：
120 度有 6 個，
210 度有 2 個。

3. (M，N)=(3，3)

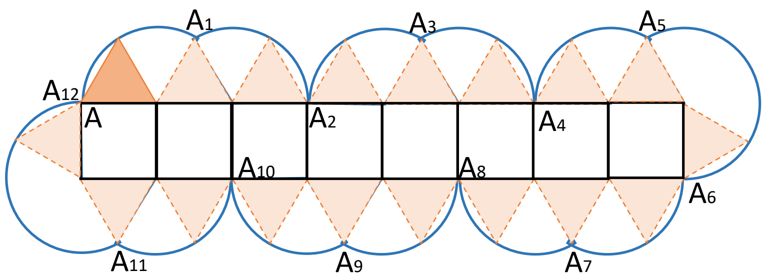



A 點的轉動角度中：
120 度有 8 個，
210 度有 0 個。

在這個情況中，由於矩形長寬皆為 3 的倍數，因此未出現轉動 210 度的情形。

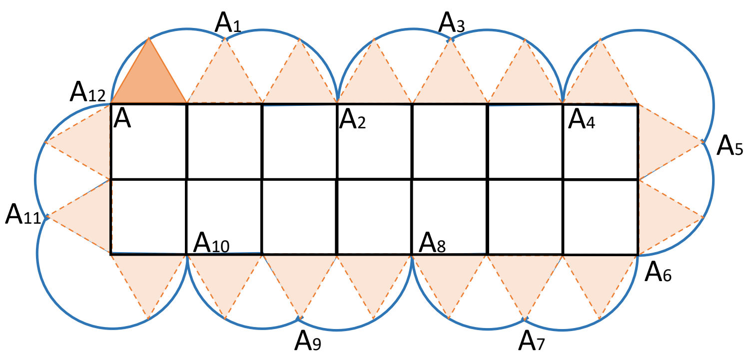
(三) M+N=9 時

1. (M，N)=(8，1)



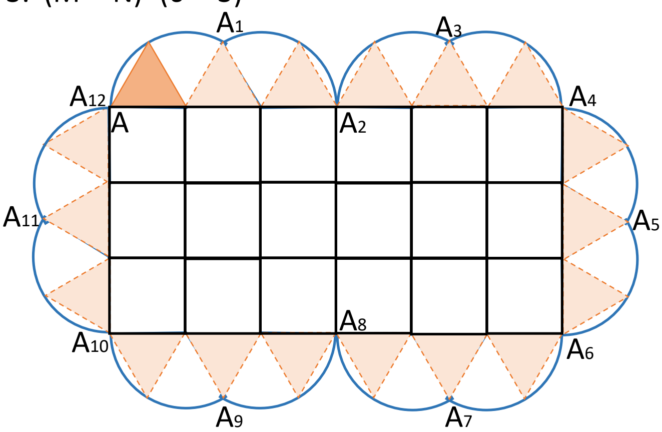

A 點的轉動角度中：
120 度有 10 個，
210 度有 2 個。

2. (M，N)=(7，2)




A 點的轉動角度中：
120 度有 10 個，
210 度有 2 個。

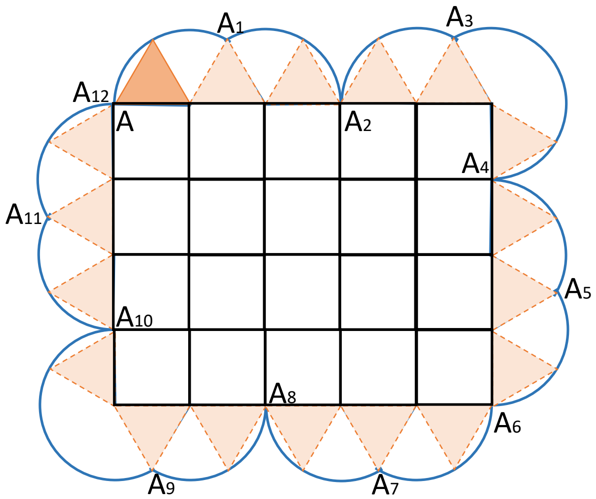
3. (M，N)=(6，3)




A 點的轉動角度中：
120 度有 12 個，
210 度有 0 個。

在這個情況中，矩形長寬皆為 3 的倍數，因此也未出現轉動 210 度的情形。

4. (M，N)=(5，4)




A 點的轉動角度中：
120 度有 10 個，
210 度有 2 個。

由上述幾個例子我們可以看出，在 M+N 為 3 的倍數之類型中：

(1)A 點每轉動 2 次會回到矩形的邊上，前後兩次位置在矩形周長上前進 3 個單位長；換句話說，A 點每轉動一次，對應到矩形的邊上為前進 1.5 個單位長。

(2)若正三角形的某次轉動都在矩形的同一段長或寬上，未經過轉角，則轉動角度必為 120 度；反之，若同一次轉動經過轉角(同時跨越長和寬)，則轉動角度為 210 度。

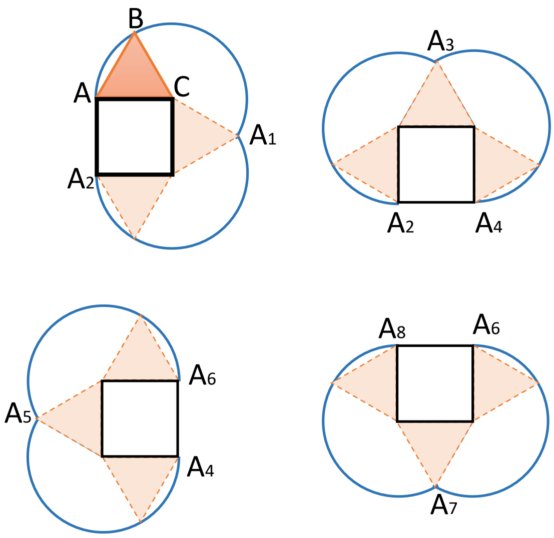
(3)由於長+寬為 3 的倍數，因此正三角形繞完一組長+寬剛好回到矩形的邊上，且與另一組長+寬的路徑模式完全相同。

(4)若長和寬皆為 3 的倍數，則不會有轉動 210 度的情況出現:反之，若長寬皆不為 3 的倍數，則會出現 2 次轉動 210 度的情況。

接著我們觀察 M+N 不為 3 的倍數之類型，此類型中，正三角形皆沿矩形滾動 3 圈可回到初始對應位置：

(一) M+N=2 時

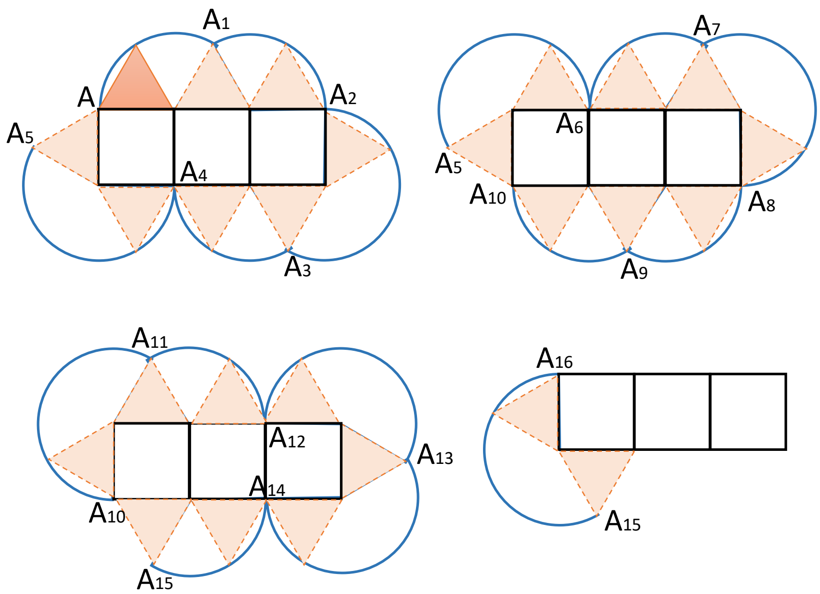
1. (M，N)=(1，1)




A 點的轉動角度中：
120 度有 0 個，
210 度有 8 個。

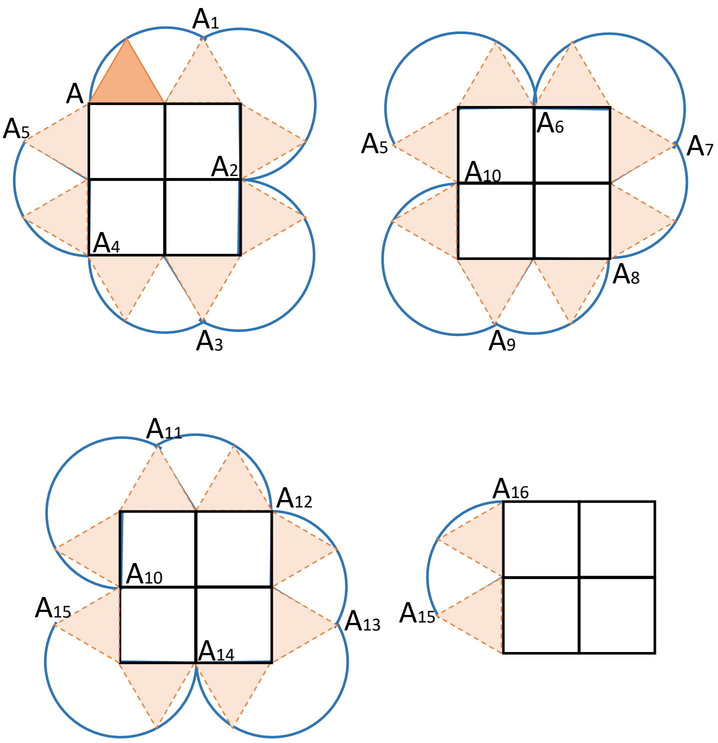
(二)M+N=4 時

1. (M，N)=(3，1)




A 點的轉動角度中：
120 度有 8 個，
210 度有 8 個。

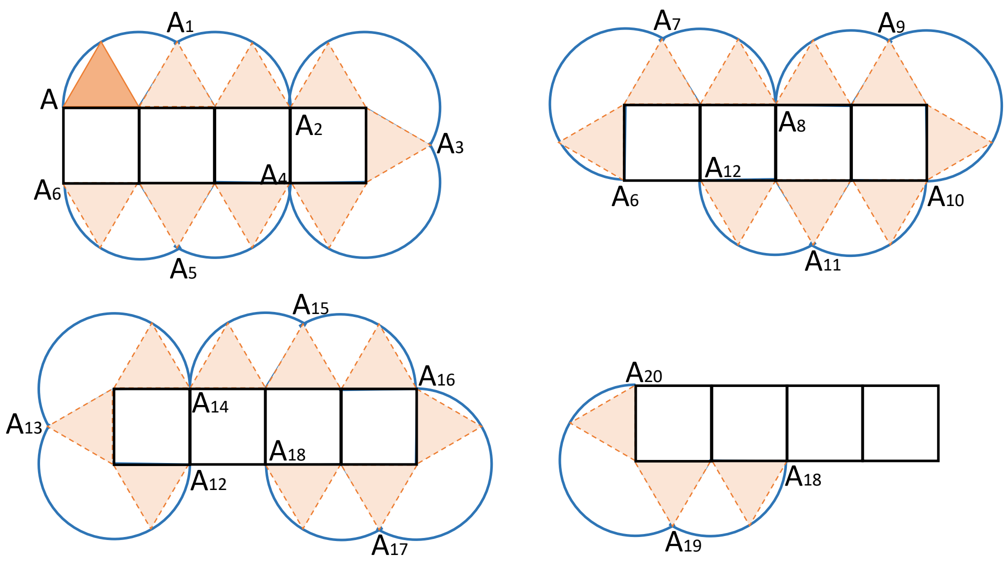
2. (M，N)=(2，2)




A 點的轉動角度中：
120 度有 8 個，
210 度有 8 個。

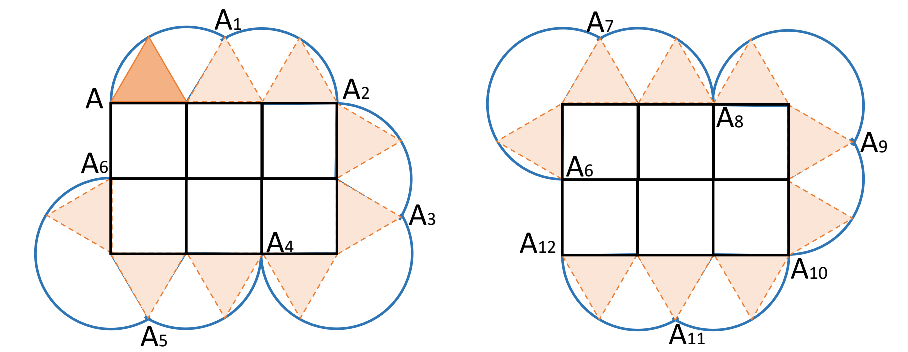
(三)M+N=5 時

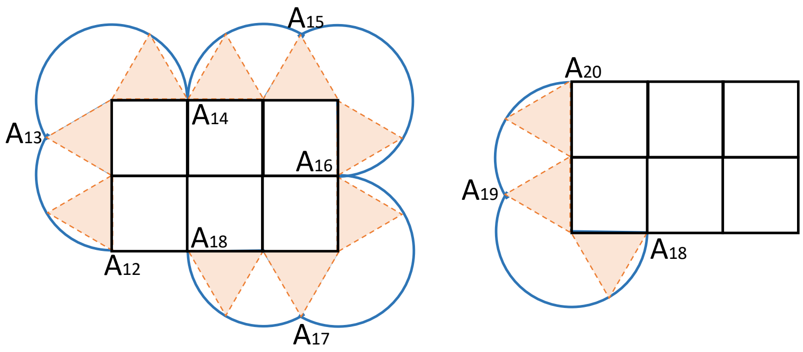
1. (M，N)=(4，1)




A 點的轉動角度中：
120 度有 12 個，
210 度有 8 個。

2. (M，N)=(3，2)

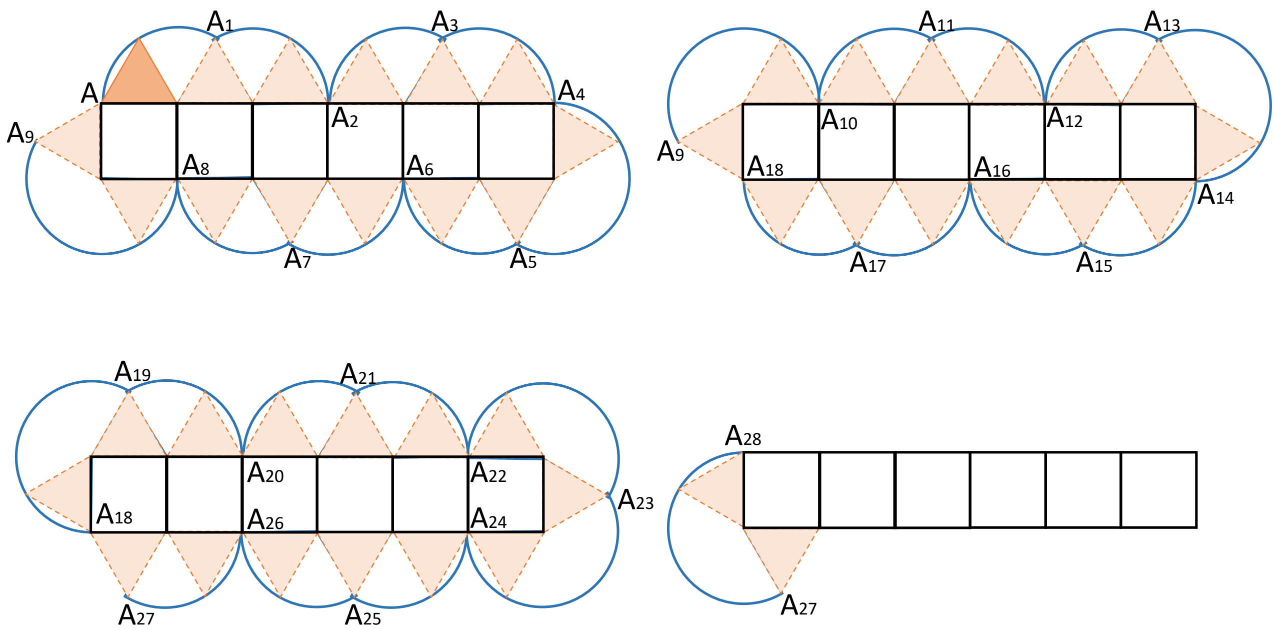



A 點的轉動角度中：
120 度有 12 個，
210 度有 8 個。

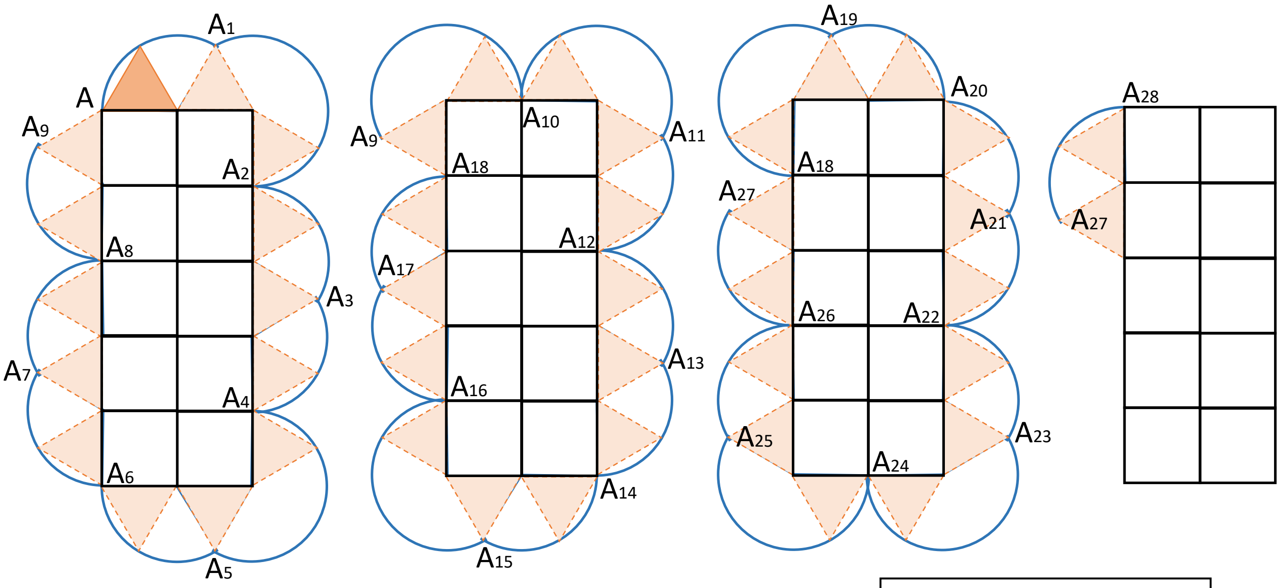
(四)M+N=7 時

1. (M，N)=(6，1)



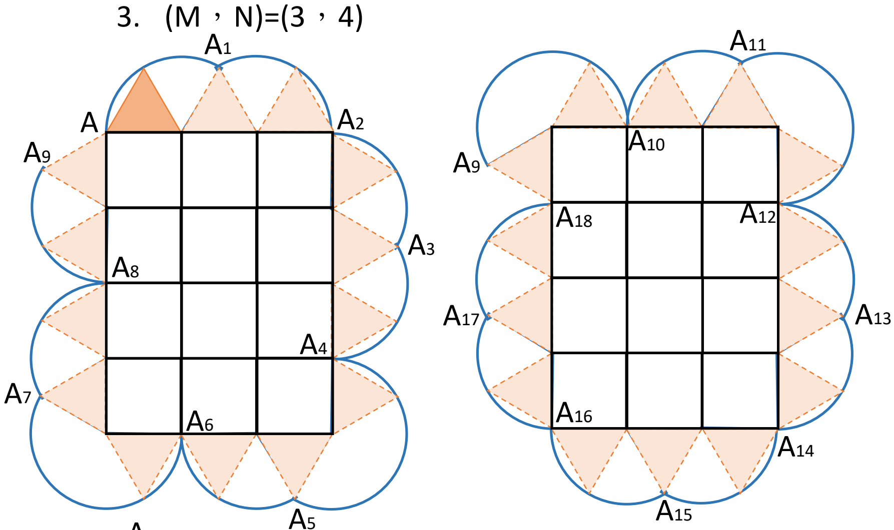

A 點的轉動角度中：
120 度有 20 個，
210 度有 8 個。

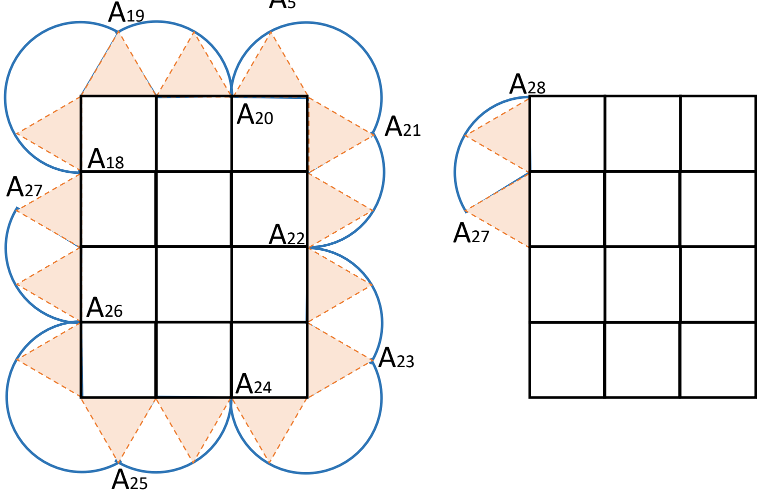
2. (M，N)=(2，5)




A 點的轉動角度中：
120 度有 20 個，
210 度有 8 個。

3. (M，N)=(3，4)

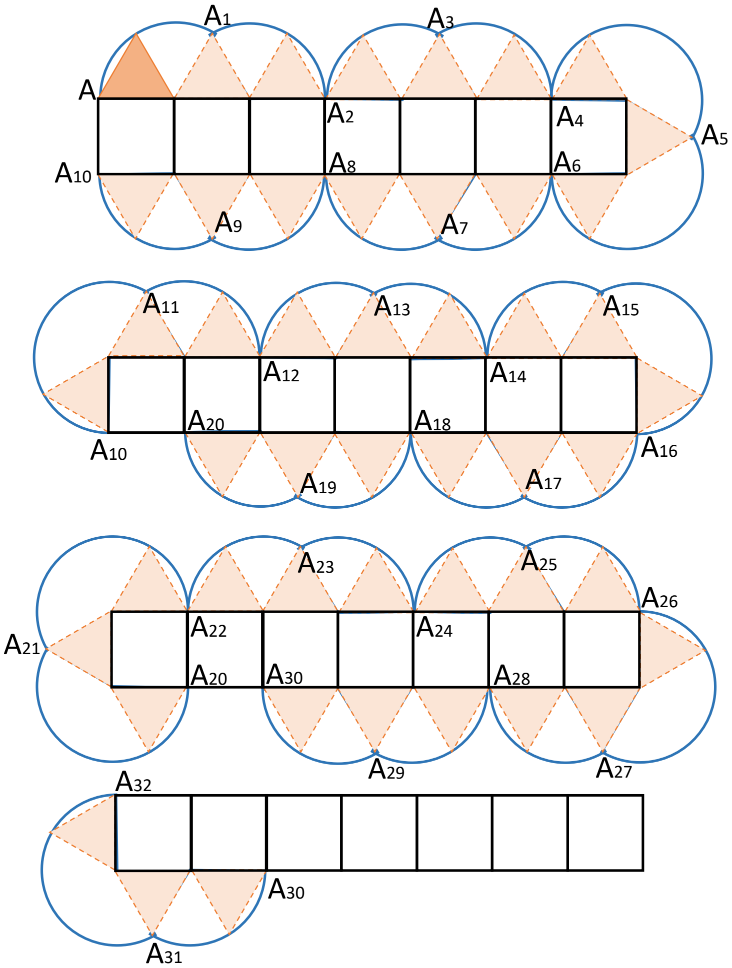



A 點的轉動角度中：
120 度有 20 個，
210 度有 8 個。

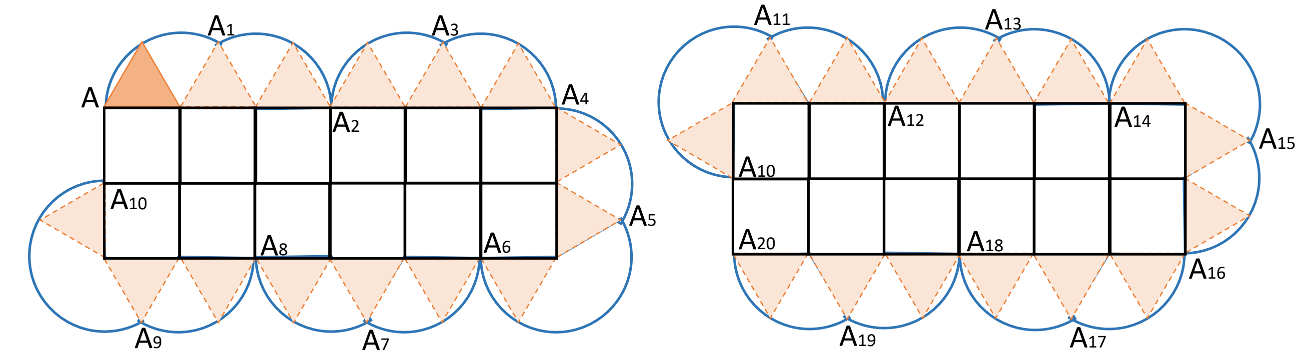
(五)M+N=8

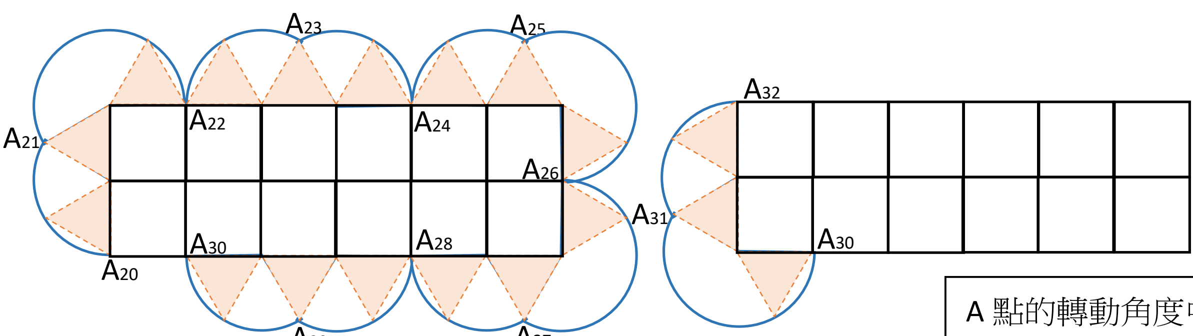
1. (M，N)=(7，1)




A 點的轉動角度中：
120 度有 24 個，
210 度有 8 個。

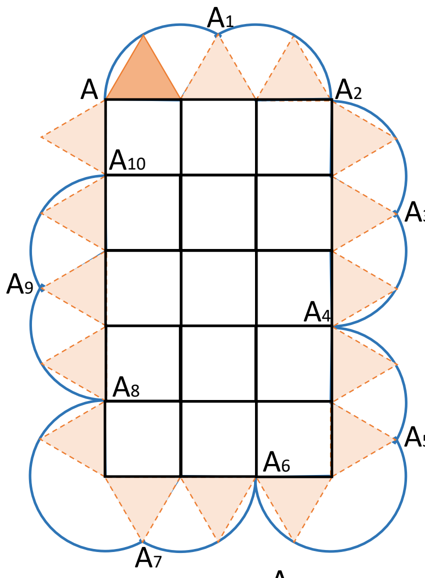
2. (M，N)=(6，2)

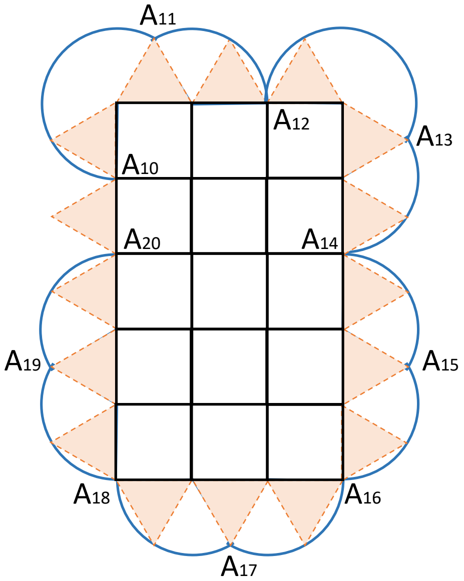


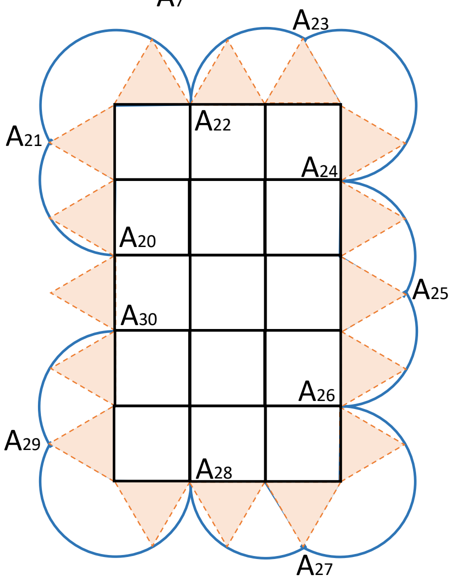



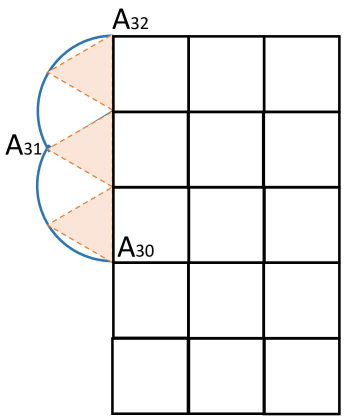

A 點的轉動角度中：
120 度有 24 個，
210 度有 8 個。

3. (M，N)=(3，5)



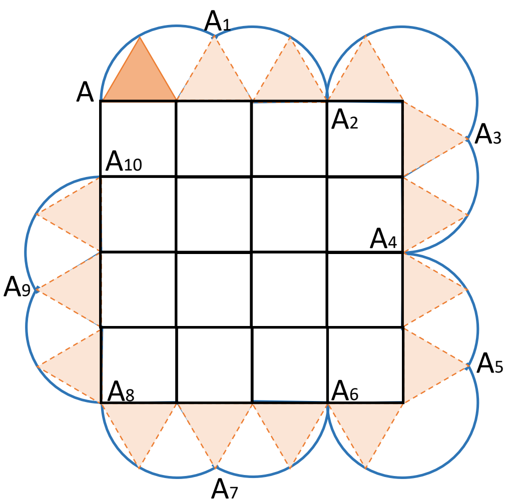



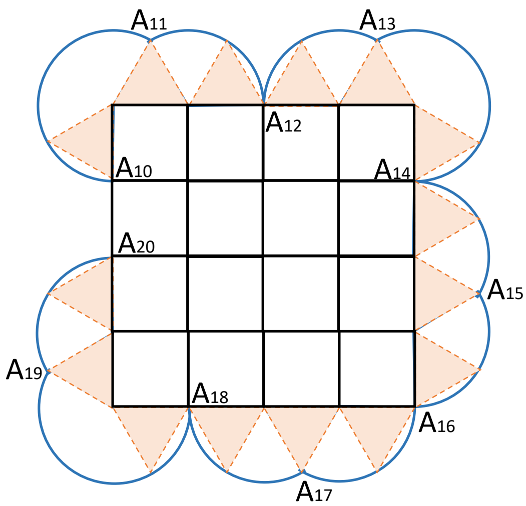



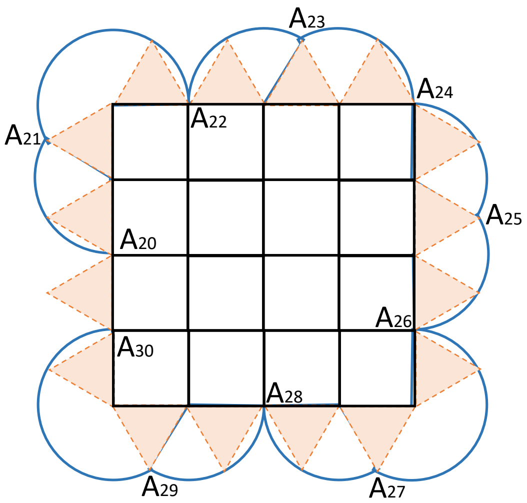



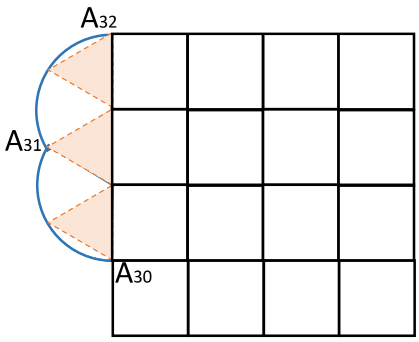

A 點的轉動角度中：
120 度有 24 個，
210 度有 8 個。

4. (M，N)=(4，4)






A 點的轉動角度中：
120 度有 24 個，
210 度有 8 個。

由上述幾個例子我們可以看出，在 M+N 不為 3 的倍數之類型中：

(1)如同 M+N 為 3 的倍數之類型，A 點每轉動一次，對應到矩形的邊上為前進 1.5 個單位長。

(2)A 點轉動的總次數為 4(M+N)次，其中無論 M+N 為何，轉動 210 度的次數皆為 8 次，其餘為轉動 120 度。

四、正三角形在矩形外滾動路徑的一般化情形為何？

統整以上的觀察結果，我們知道無論在哪種模式中，A 點每轉動一次，對應到矩形的邊上皆為前進 1.5 個單位長。若將正三角形在矩形外滾動路徑類型依照矩形的長寬和 M+N 分成兩種：

(一) 當 M+N 為 3 的倍數時，正三角形只要繞矩形滾動 1 圈即可回到初始對應位置。則將矩形周長$2(M+N)\div 1.5$即為正三角形轉動次數。其中，又可將此類型細分成兩種：

1. 若長與寬皆為 3 的倍數，則 A 點的轉動角度皆為 120 度，故路徑長為

$$2\pi\times 1\times\frac{120}{360}\times[2(M+N)\div 1.5]=\frac{8\pi(M+N)}{9}$$

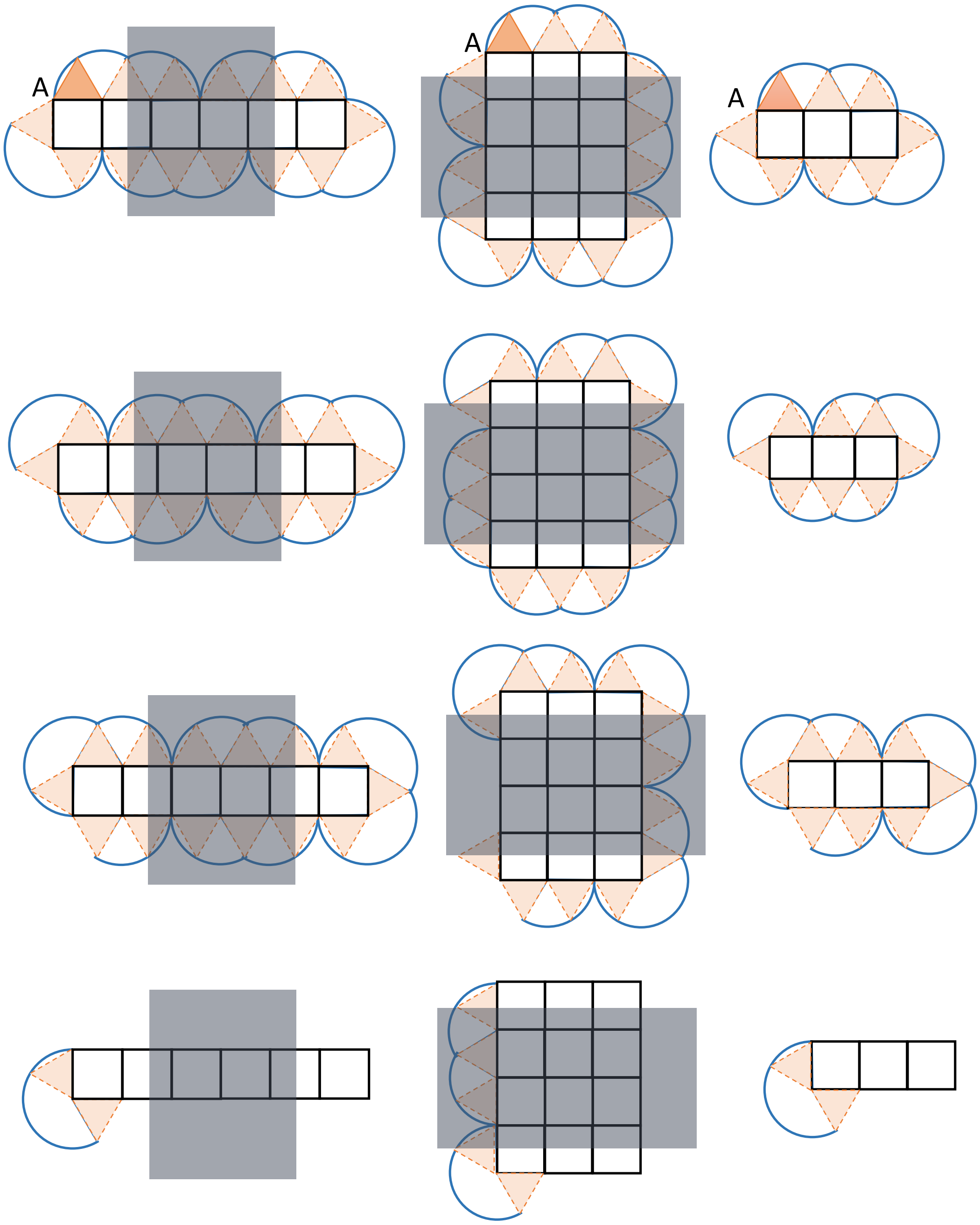
2. 若長寬皆不為 3 的倍數，則 A 點的轉動角度會出現 2 次轉動 210 度的情況，其餘皆為 120 度，因此路徑長為

$$2\pi\times 1\times\frac{120}{360}\times[2(M+N)\div 1.5-2]+2\pi\times 1\times\frac{210}{360}\times 2=\frac{8\pi(M+N)}{9}+\pi$$

(二) 當 M+N 不為 3 的倍數時，正三角形必須繞矩形滾動 3 圈才能回到初始對應位置。則$3[2(M+N)] \div 1.5 = 4(M+N)$為正三角形轉動次數。其中，又可將此類型細分成四種：

1. $M = 3k_1$ ，$N = 3k_2 + 1$，*其中*$k_1, k_2$*為正整數*。

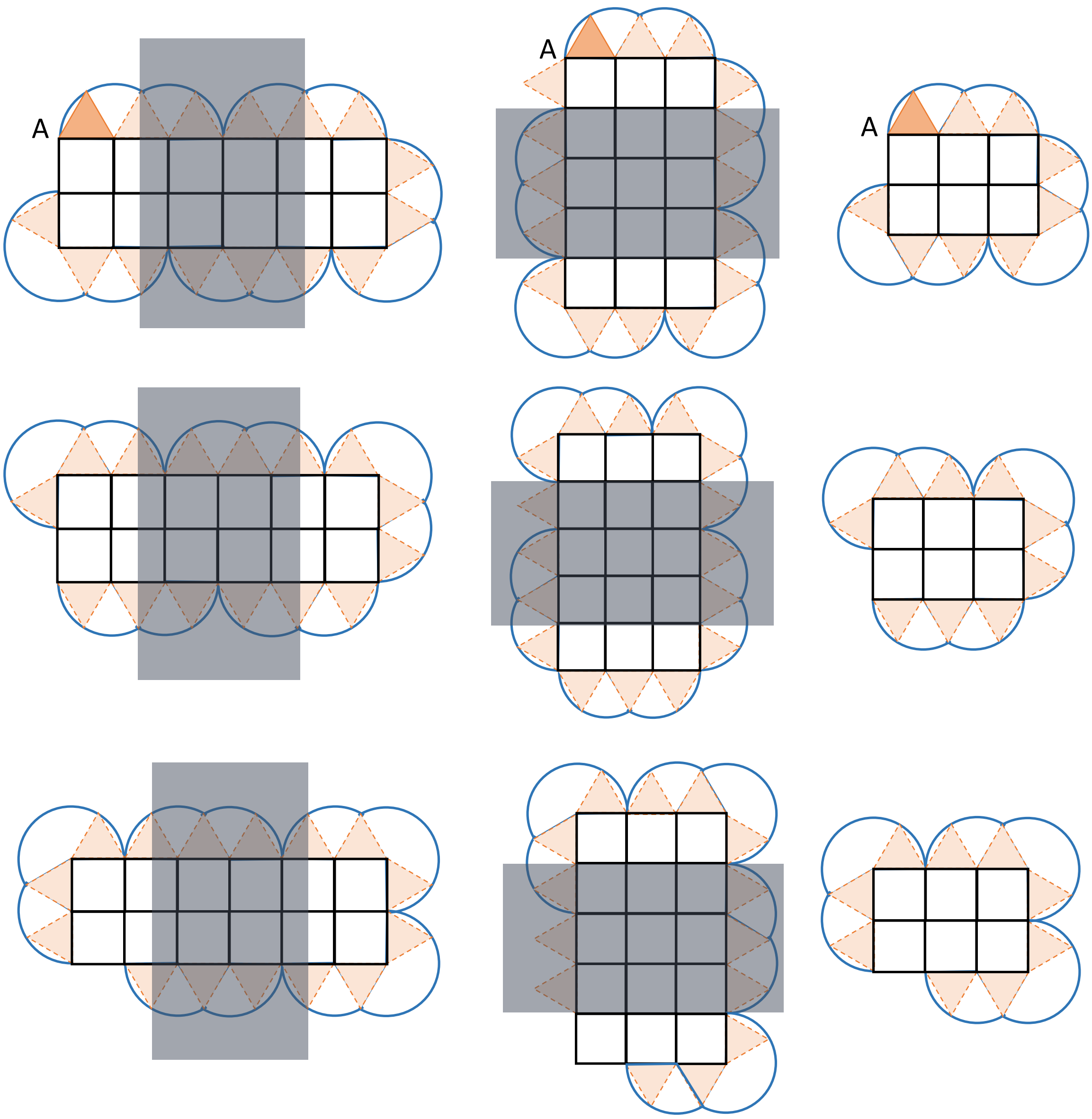
   則$3(M+N) = 9(k_1 + k_2) + 3$為 3 的倍數；即正三角形繞矩形滾動 1.5 圈後回到與初始狀態相似的對應位置，剩下的 1.5 圈滾動路徑與前面完全相同。另外，我們再將此類型中的(6，1)減去長度 3 單位；(3，4)減去寬度 3 單位後，與(3，1)的圖形做比較

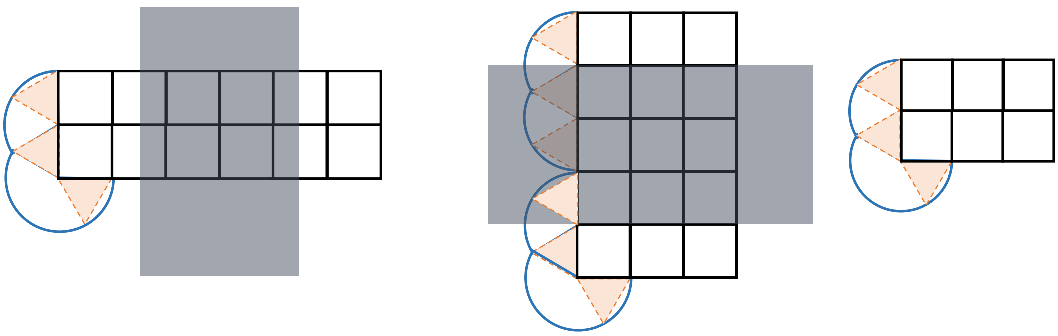


可發現把矩形長或寬減去 3 單位長後剩餘部分三角形的滾動路徑是相同的，且長或寬增加 3 單位長對三角形的滾動來說只增加了轉動 120 度的次數；換句話說，所有這種類型的矩形與(3，1)比較，只改變了三角形滾動 120 度的次數，並不影響滾動 210 度的次數。而(3，1)中，三角形的滾動總共出現 8 次 210 度。

2. $M = 3k_1$，$N = 3k_2 + 2$，*其中*$k_1, k_2$*為正整數*。

則$3(M+N) = 9(k_1 + k_2) + 6$為 3 的倍數；故正三角形繞矩形滾動 1.5 圈後回到與初始狀態相似的對應位置，剩下的 1.5 圈滾動路徑與前面完全相同。另外，我們再將此類型中的(6，2)減去長度 3 單位；(3，5)減去寬度 3 單位後，與(3，2)的圖形做比較



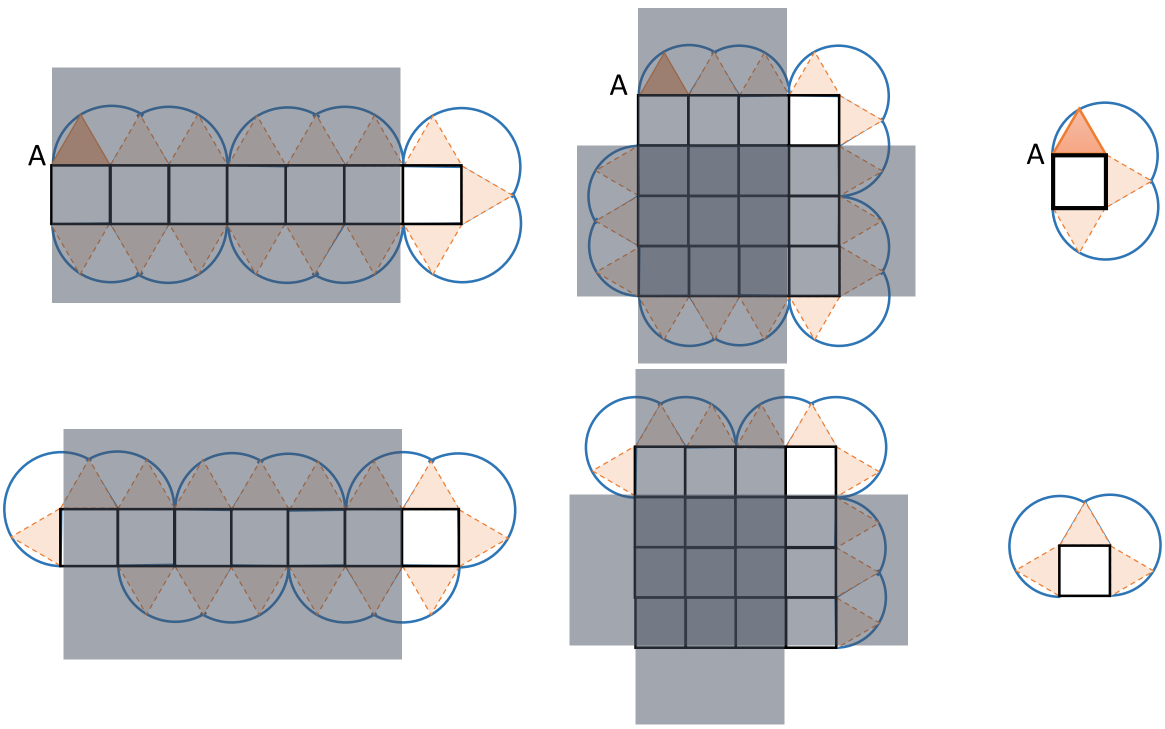


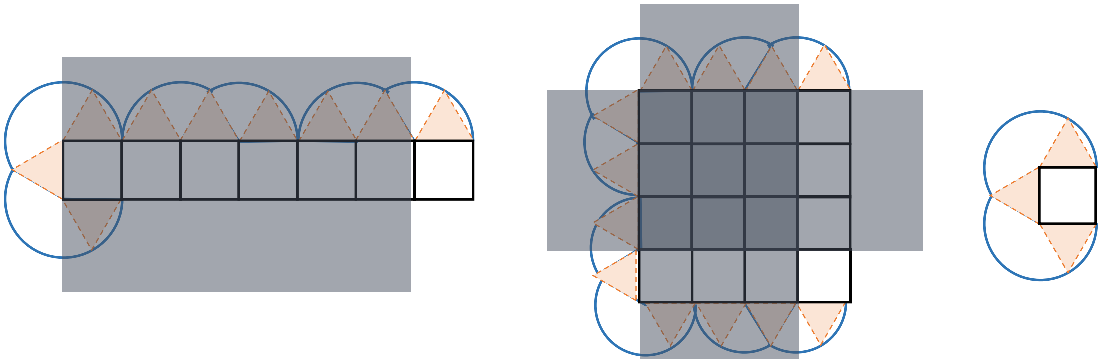
結果發現所有這種類型的矩形與(3，2)比較，只改變了三角形滾動 120 度的次數，並不影響滾動 210 度的次數。而(3，2)中，三角形的滾動總共出現 8 次 210 度。

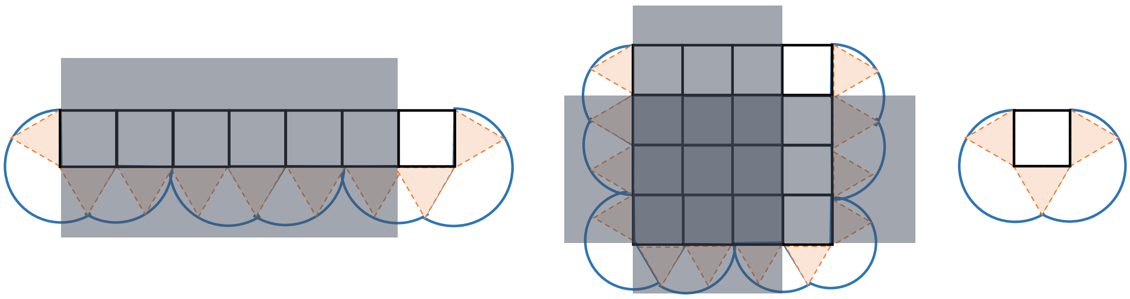
3. $M = 3k_1 + 1$，$N = 3k_2 + 1$，*其中*$k_1, k_2$*為正整數*。

則$3(M + N) = 9(k_1 + k_2) + 6$為 3 的倍數；故正三角形繞矩形滾動的前 1.5 圈與後 1.5 圈滾動路徑完全相同。

另外，我們再將此類型中的(7，1)減去長度 6 單位；(4，4)減去長寬各 3 單位後，與(1，1)的圖形做比較





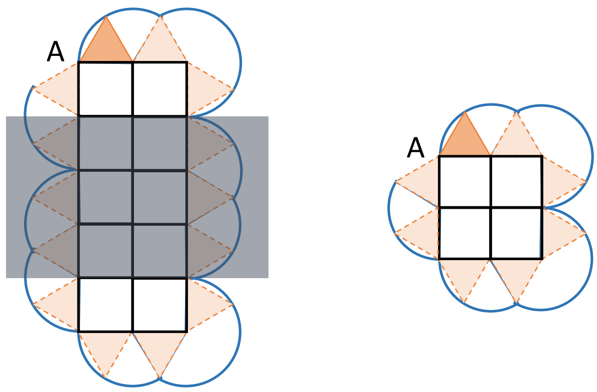


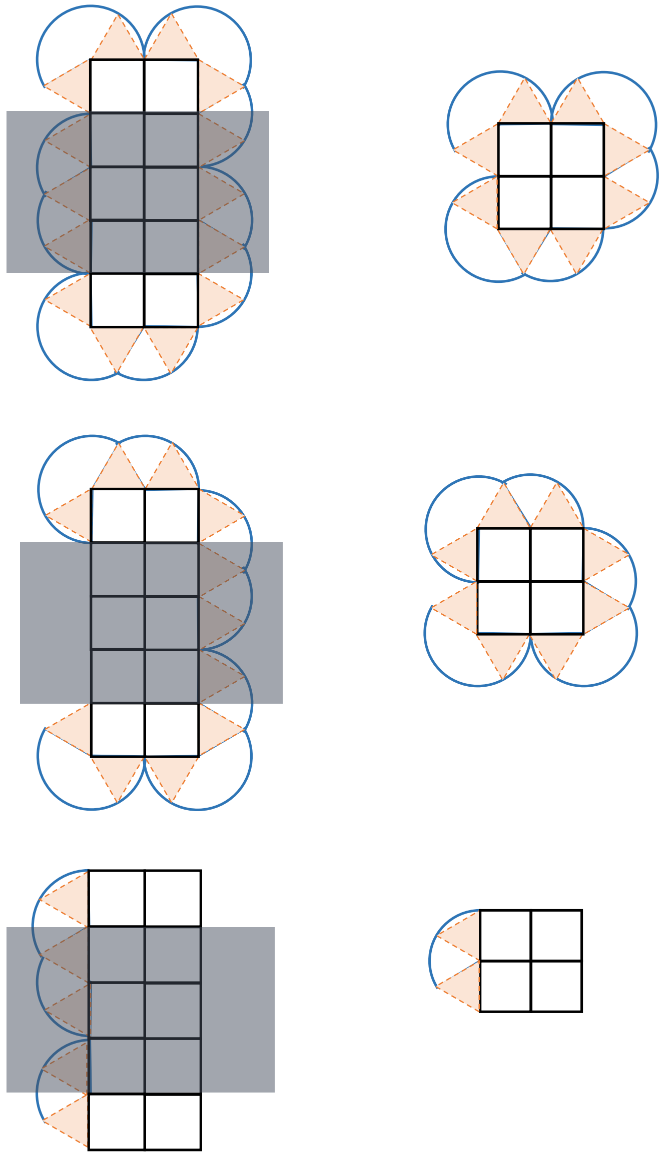
可發現所有這種類型的矩形與(1，1)比較，只改變了三角形滾動 120 度的次數，並不影響滾動 210 度的次數。而(1，1)中，三角形的滾動總共出現 8 次 210 度。

4. $M = 3k_1 + 2$，$N = 3k_2 + 2$，其中$k_1, k_2$為正整數。

   則$3(M + N) = 9(k_1 + k_2) + 12$為 3 的倍數；即正三角形繞矩形滾動的前 1.5 圈與後 1.5 圈滾動路徑完全相同。

   另外，我們再將此類型中的(2，5)減去寬度 3 單位後，與(2，2)的圖形做比較





顯示這種類型的矩形與(2，2)比較，只改變了三角形滾動 120 度的次數，並不影響滾動 210 度的次數。而(2，2)中，三角形的滾動總共出現 8 次 210 度。

綜合以上的討論，我們知道所有 M+N 不為 3 的倍數之矩形，正三角形在其周長上的滾動都只會有 8 次的 210 度轉動，其餘的轉動皆為 120 度；也就是說，120 度的轉動次數為 4(M+N)－8，因此，滾動路徑長為

$$2\pi \times 1 \times \frac{120}{360} \times [4(M+N)-8] + 2\pi \times 1 \times \frac{210}{360} \times 8 = \frac{8\pi(M+N)}{3} + 4\pi$$

# 伍、　研究結果

一、 當 M+N 為 3 的倍數時，正三角形只要繞矩形滾動 1 圈即可回到初始對應位置。則$\frac{4(M+N)}{3}$為正三角形轉動次數。其中，又可將此類型細分成兩種：

(一) 若長與寬皆為 3 的倍數，路徑長為$\frac{8\pi(M+N)}{9}$

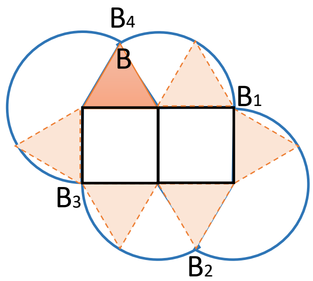
(二) 若長寬皆不為 3 的倍數，路徑長為$\frac{8\pi(M+N)}{9}+\pi$

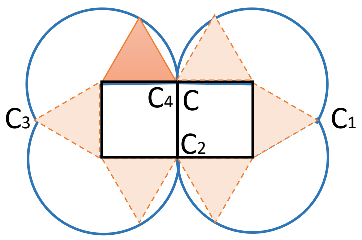
二、 當 M+N 不為 3 的倍數時，正三角形必須繞矩形滾動 3 圈才能回到初始對應位置。則$4(M+N)$為正三角形轉動次數。其滾動路徑長為$\frac{8\pi(M+N)}{3}+4\pi$

# 陸、 討論

一、 以上研究探討的是正三角形在起始位置與矩形頂點重合的端點所滾動的路徑，若是正三角形其他頂點的滾動路徑是否也相同？

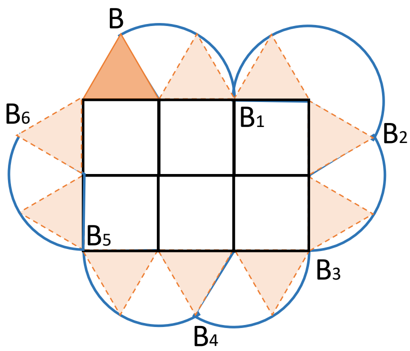
在 M+N=3 的倍數類型中，我們以(M，N)= (2，1)為例來觀察：

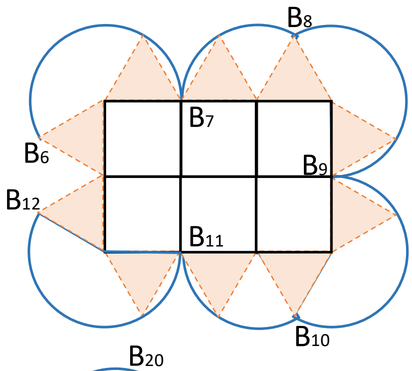


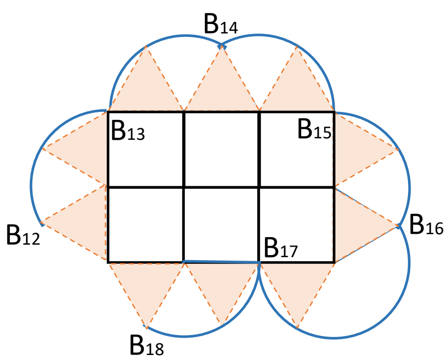



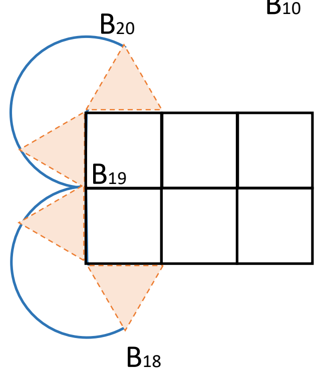

B 點的轉動角度中，120 度有 2 個，210 度有 2 個，與 A 點的狀況相同；C 點的轉動角度中，120 度有 0 個，210 度有 4 個，與 A 點的狀況不同。但兩者皆與 A 點一樣轉動 4 次，轉動半徑都為 1 單位長。

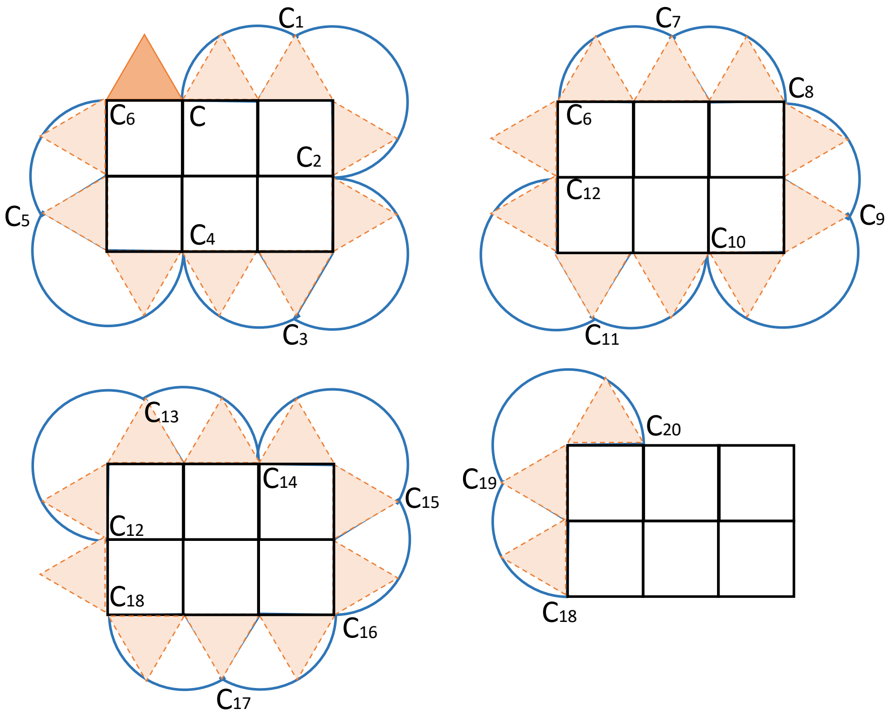
接著再看看 M+N 不為 3 的倍數類型中，(M，N) =(3，2)的狀況：



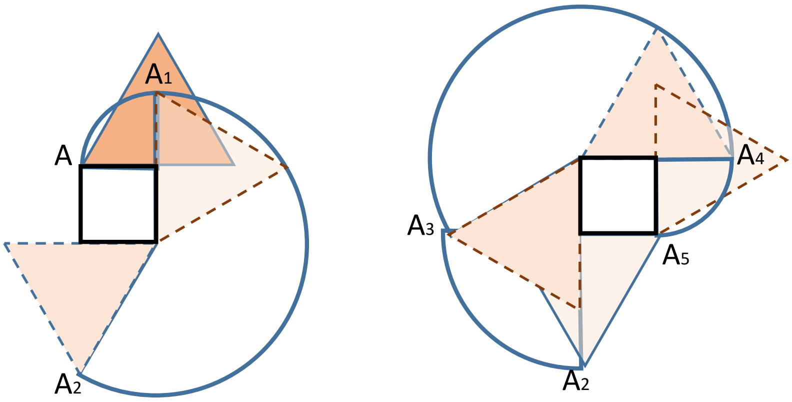


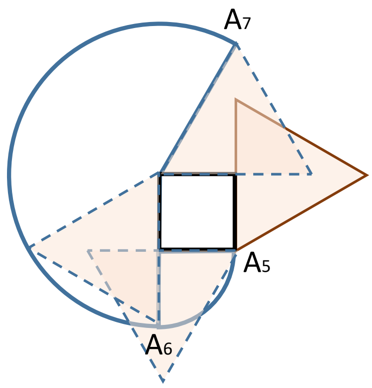

B 點和 C 點的轉動角度中，120 度有 12 個，210 度有 8 個，轉動半徑都為 1 單位長，與 A 點的狀況均相同；且 B 點的轉動路徑與 A7→A20→A→A6 的路徑完全相同，C 點的轉動轉動路徑與 A14→A20→A→A13 的路徑完全相同。

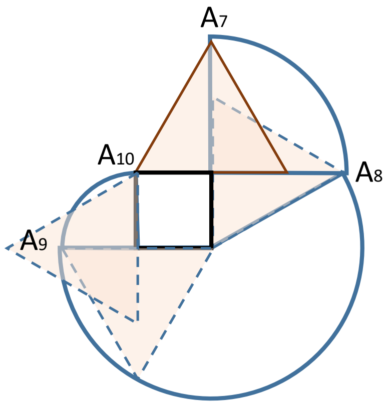
由以上的例子可以看出正三角形其他頂點在矩形周長上的滾動路徑有可能產生不同變化，其規則為何有待我們日後繼續探討。

二、 本研究是基於矩形邊長為正三角形邊長整數倍的基本設定下進行討論，若矩形的邊長不為正三角形邊長的整數倍時，是否有一樣的結果？

我們以正三角形邊長為 2 單位長，矩形長寬皆為 1 單位長為例來看：






由上面的例子可以發現正三角形也是繞矩形滾動 3 圈回到初始對應位置，但轉動半徑有 1 單位長、2 單位長和$\sqrt{3}$單位長幾種。因此，當矩形的邊長不為正三角形邊長的整數倍時，滾動的狀況也會因此產生部分差異。

# 柒、 結論

一、 在矩形邊長為正三角形邊長的整數倍與起始位置為正三角形頂點與矩形頂點重合的基本設定下，我們歸納出正三角形重合點的滾動路徑具有一般化情形，並找出其路徑長公式。

二、 若改變基本假設，找正三角形的其他頂點，或矩形邊長不為正三角形邊長整數倍的情況下，我們發現滾動路徑與上述的一般化情形不再具有一致性，至於是否也能找到一般化的規則，有待日後繼續探討。

三、 本研究只討論正三角形在矩形邊上滾動路徑的一般化情形，未來還可繼續探討其他多邊形在矩形邊上的滾動路徑，或滾動面積是否具有一般化規則

# 捌、 參考文獻資料


1. 高樹國中(2020)‧給我滾回來‧屏東縣第 60 科展國中組數學科‧取自 http://sci.ptc.edu.tw/Upfile/Works/1582689967_691956_57.pdf
2. 國中數學(2021) ‧2 下國中數學第三章三角形的基本性質‧台南：翰林出版社
3. 國中數學(2020) ‧2 上國中數學第二章二次方根與畢氏定理‧台南：翰林出版社