屏東縣第 61 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱： 費齊取石-探討齊肯多夫定理在取石對弈遊戲中的延伸

關 鍵 詞： 費伯納西數列、 齊肯多夫定理

編 號：B1038

摘要

在雙人對弈取石的遊戲中，給定後者最多只能 2 倍的取石的條件下，跟齊肯多夫定理有很大的關連，本題目是希望能找出 3 倍、4 倍、5 倍….到 m 倍取石下是否有對應的費伯納西數列並給出證明。

壹、 研究動機

我們有一節彈性數學課，老師每周都會利用這節課的時間帶我們玩數學桌遊、摺紙、還有發現生活上有關數學的應用，其中一節老師給了這個題目讓我們分組對弈，這個題目出自台師大許志農教授在其數學教育推廣網站『非想非非想』中的一道題目:

> 有 N> 1顆石頭，甲、乙兩人輪流照以下規則取石頭：
>
> (1) 每次至少取一顆或一顆以上的石頭。
>
> (2) 先取的甲在第一輪時，不能將所有的石頭取完（至少留下一顆石頭）。
>
> (3) 每次取的石頭數目不得超過對方剛取走的石頭數目的兩倍。
>
> 取到最後一顆石頭者獲勝。 當 N=30 時，誰會獲勝？

在我們分解出先手甲方會獲勝後，老師鼓勵我們找出 40 以內甲方或乙方是否有獲勝的規律並把完整的題目給我們回去想想，是否可以找出教授所提問的將這道遊戲延伸為「**每次取的石頭數目不得超過對方剛取走的石頭數目的三倍**」時，可能需要另一個數列來扮演費波納契數列的角色，究竟是那個數列呢？

貳、 研究目的

一、在後者取的石頭數不超過 2 倍的前提下，列出甲乙雙方獲勝的石頭數。

二、觀察結果並找到規則後證明 2 倍取石的必勝條件。

三、接著延伸找出 3 倍、4 倍、5 倍……取石的必勝條件並證明之。

四、能否推廣找出到 m 倍取石的通式並證明之。

參、 研究設備及器材

紙、筆、電腦

肆、 研究過程或方法

我們一開始希望將 2 倍、3 倍、4 倍、5 倍甲乙雙方獲勝的石頭數找出，觀察是否有其規律，前後項之間是否存在某種關係並推理出一般式接下來試著利用數學歸納法來證明所發現的數列，最後再推廣出全部的可能。

觀察規律 → 猜想推理 → 歸納證明 → 延伸或應用

2 倍數列之研究過程

N	…後手←先手	N	…後手←先手
2	1+1 甲不能全拿 乙勝	22	21+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝
3	2+1 甲不能全拿 乙勝	23	21+2 甲拿 2，乙變先手 甲勝
4	3+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝	24	21+3 甲拿 3，乙變先手 甲勝
5	3+1+1 甲拿 1，甲變後手 乙勝	25	21+3+1 甲拿 1 就會取得 21 堆的最後一顆 甲勝
6	5+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝	26	21+5 甲拿 5，乙變先手 甲勝
7	5+2 甲拿 2，乙變先手 甲勝	27	21+5+1 甲拿 1 就會取得 21 堆的最後一顆 甲勝
8	5+3 不管甲拿 1 或 2,乙能將 3 堆最後一顆取走 乙勝	28	21+5+2 甲拿 2 就會取得 21 堆的最後一顆 甲勝
9	8+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝	29	21+8 甲拿 8，乙變先手 甲勝
10	8+2 甲拿 2，乙變先手 甲勝	30	21+8+1 甲拿 1 就會取得 21 堆的最後一顆 甲勝
11	8+3 甲拿 3，乙變先手 甲勝	31	21+8+2 甲拿 2 就會取得 21 堆的最後一顆 甲勝
12	8+3+1 甲拿 1 就會取得 8 堆的最後一顆 甲勝	32	21+8+3 甲拿 3 就會取得 21 堆的最後一顆 甲勝
13	8+5 不管甲拿 1 或 2 或 3,乙能將 5 堆最後一顆取走 乙勝	33	21+8+3+1 甲拿 1 就會取得 21 堆的最後一顆 甲勝

14	13+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝	34	21+13 不管甲拿幾顆,乙能將 13 堆最後一顆取走 乙勝
15	13+2 甲拿 2，乙變先手 甲勝	35	34+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝
16	13+3 甲拿 3，乙變先手 甲勝	36	34+2 甲拿 2，乙變先手 甲勝
17	13+3+1 甲拿 1 就會取得 13 堆的最後一顆 甲勝	37	34+3 甲拿 3，乙變先手 甲勝
18	13+5 甲拿 5，乙變先手 甲勝	38	34+3+1 甲拿 1 就會取得 34 堆的最後一顆 甲勝
19	13+5+1 甲拿 1 就會取得 13 堆的最後一顆 甲勝	39	34+5 甲拿 5，乙變先手 甲勝
20	13+5+2 甲拿 2 就會取得 13 堆的最後一顆 甲勝	40	34+5+1 甲拿 1 就會取得 34 堆的最後一顆 甲勝
21	13+8 不管甲拿幾顆,乙能將 8 堆最後一顆取走 乙勝	41	34+5+2 甲拿 2 就會取得 34 堆的最後一顆 甲勝

1.很明顯我們可以得知每次取出的石頭數不能超過全部的$\frac{1}{3}$，否則接下來一方會將剩餘石頭數取完。

2.乙方的獲勝數似乎有其規律而且跟上次獲勝數有其關連。

3.我們將乙方獲勝的石頭數單獨列出

項數	1	2	3	4	5	6	7	8
石頭數	2	3	5	8	13	21	34	55

在一開始我們找到 2 倍的規律時我們並不知道什麼是費伯納西數，後來老師將完整的題目給我們時才知道這個數列那麼有名，因為這個題目一開始是從 2 顆開始拿，所以我們將原本的費伯納西數的 1 定義為F_0，以區隔題目跟原始數列的差異。

定義 1: $\langle F_n \rangle$是 2 倍費石數列$\begin{cases} F_0 = 1, F_1 = 2, F_2 = 3 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$

4.在將題目越往後面推敲時，我們發現每一個費氏數的F_{n-2}項會以 2 倍的數據卡在F_n和F_{n-1}之間,這個發現將在後面的證明時會使用到

性質 1.1: $F_{n-1} < 2F_{n-2} < F_n$, $\forall\, n \geq 3$

證明:我們先證$F_{n-1} < 2F_{n-2}$, $\forall\, n \geq 3$

(i) 當 n=3 時, $2F_1 = 2 \times 2 = 4 > F_2 = 3$,成立

(ii) 當$n \leq k$,命題成立,即 $2F_{k-2} > F_{k-1}$,⋯.

則當$n = k + 1$時, $2F_{k-1} - F_k = 2(F_{k-2} + F_{k-3}) - (F_{k-1} + F_{k-2}) = (2F_{k-2} - F_{k-1}) + (2F_{k-3} - F_{k-2}) > 0$,根據數學歸納法, $2F_{n-2} > F_{n-1}\ \forall\, n \geq 3$ 均成立

再證 $2F_{n-2} < F_n$, $\forall\, n \geq 3$

(i) 當 n=3 時, $F_3 = F_2 + F_1 = 3 + 2 = 5 > 2F_1 = 2 \times 2 = 4$,成立

(ii) 當$n \leq k$時,命題成立,即 $F_k > 2F_{k-2}$,⋯.

則當$n = k + 1$時,$F_{k+1} - 2F_{k-1} = (F_k + F_{k-1}) - 2(F_{k-2} + F_{k-3}) = (F_k - 2F_{k-2}) + (F_{k-1} - 2F_{k-3}) > 0$根據數學歸納法, $F_n > 2F_{n-2}$,$\forall\, n \geq 3$ 均成立

5.性質 1.2 是為了證明<F_n>數列為乙方必勝條件而需要的證明

性質 1.2 $4F_{n-1} < 3F_n$,$\forall\, n \geq 2$

(i) 當 n=2 時, $3F_2 = 3 \times 3 = 9 > 4F_1 = 4 \times 1 = 4$,成立

(ii) 當$n \leq k$時,命題成立,即 $3F_k > 4F_{k-1}$,⋯

則當$n = k + 1$時,$3F_{k+1} - 4F_k = 3(F_k + F_{k-1}) - 4(F_{k-1} + F_{k-2}) = (3F_k - 4F_{k-1}) + (3F_{k-1} - 4F_{k-2}) > 0$,根據數學歸納法, $3F_n > 4F_{n-1}$, $\forall\, n \geq 2$ 均成立

定理 1.1(齊肯多夫定理)任何正整數(N)都可以表示成若干個不連續的費伯納西數之和

我們參考維基百科關於齊肯多夫定理的證明(參考文獻 2),我們分成兩部分證明如下:

(1)當 N 恰為<F_n>數列時,命題成立,如:N=1=F_0 , N=2=F_1 , N=3=F_2

(2)當 N 不為<F_n>數列時,

(i) N=4=3+1=$F_2 + F_0$ 成立

(ii)當$\mathrm{N} > 4$時,我們可以找到最大n_1,使得$F_{n_1} < \mathrm{N} < F_{n_1+1}$

此時 k=$\mathrm{N} - F_{n_1} < F_{n_1+1} - F_{n_1}$=$F_{n_1-1}$ 因為 k< N ,所以 k 可以表示成若干個不連續的費伯納西數之和,即 k=$F_{n_2} + F_{n_3} + F_{n_4} + \ldots\ldots + F_{n_t}$ (其中$F_{n_2} > F_{n_3} > \ldots\ldots > F_{n_t}, \forall n_i > n_j, n_i - n_j > 1$)

又 k< F_{n_1-1} 所以$F_{n_2} < F_{n_1-1}$ 可知 $n_2 < n_1 - 1$ 得出 $n_1 - n_2 > 1$

即 N=$F_{n_1} + k$=$F_{n_1} + F_{n_2} + F_{n_3} + F_{n_4} + \ldots\ldots + F_{n_t}$ 為不連續的費伯納西數之和。

定理 1.2　若一開始的石頭數是<F_n>數列則乙方必勝，反之則甲方必勝

我們一樣分成兩部分說明

(1) 一開始的石頭數為<F_n>數列時:

(i)當$n=1$時, $F_1=2$, 甲因為無法在第一次就全取完,所以乙必能取到最後一顆石頭

(ii)假設當$n \leq k$時,命題成立,即乙能取到F_k,..最後一顆石頭

則當$n=k+1$時, 因為$F_{k+1}=F_k+F_{k-1}$若甲第一次所取的石頭數大於或等於F_{k-1}, 根據性質 1.1,可知$F_k<2F_{k-1}$,乙一定可以將剩下的石頭取完,根據假設命題我們知道乙可以取到F_{k-1}堆中的最後一顆石頭, 有沒有可能甲在乙取完F_{k-1}堆後將剩下F_k堆取完,假設甲第一次取$\frac{1}{3}F_{k-1}$,則乙最多能取$\frac{2}{3}F_{k-1}$此時F_{k-1}堆恰好取完, 根據性質 1.2 可知 $2\times\frac{2}{3}F_{k-1}<F_k$,所以甲無法直接取完$F_k$堆,原命題剩下甲先取$F_k$, 所以乙也能取$F_k$的最後一顆石頭,根據數學歸納法, 乙必能取到最後一顆石頭。

(2) 一開始的石頭數不為<F_n>數列時:

我們節錄許志農教授在其教學網站非想非非想的說明

> 當 N 不是費波納契數時，甲可以取走適當的石頭，使得剩下的石頭數目為最靠近 N 的費波納契數，根據(1)的策略，甲變成後玩者，會有必勝的策略。例如，當 N = 30 時，甲只需取 9 顆石頭，就剩下 21 顆石頭，甲會贏，而 F_8 =21。

我們發現根據許志農教授的方法在某些條件下並不適用,如:$\mathrm{N}=12$時,因為$12=8+4$,若甲取走 4 顆雖然8為最接近的費伯納西數但顯而易見乙可以直接取走剩下的 8 顆,相同方法在$\mathrm{N}=20, 20=13+7$,上面均可看出乙可以拿走剩下的石頭,我們試著說明自己的方法如下:

(i)當N =4 時,甲只要拿 1 顆接下來甲變成後手,甲獲勝。

(ii)當$\mathrm{N}>4$時,根據定理 1.1,N 可以表示成若干個不連續的費伯納西數之和,即 N=$F_{n_1}+F_{n_2}+F_{n_3}+F_{n_4}+\ldots\ldots+F_{n_{t-1}}+F_{n_t}$(其中$F_{n_1}>F_{n_2}>\ldots\ldots>F_{n_t}, \forall n_i>n_j, n_i-n_j>1$)因為$n_i-n_j>1$且根據性質 1.1,$F_n>2F_{n-2}$, $\forall\, n\geq 3$所以$F_{n_1}>2F_{n_2}, F_{n_2}>2F_{n_3}$,...所以甲只要取出最小的$F_{n_t}$即可,而乙無法將前面$F_{n_{t-1}}$堆取完,以此類推,所以甲必能取走每一堆的最後一顆石頭,故甲獲勝

有了 2 倍推理的經驗後我們接著找出教授提問的有關 3 倍的可能數列。

3 倍數列之研究過程

N	…後手←先手	N	…後手←先手
②	1+1　甲不能全拿，乙勝	㉑	15+6 不管甲拿多少，乙能將 6 堆最後一顆取走 乙勝
③	2+1　甲不能全拿，乙勝	22	21+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝
④	3+1　甲不能全拿，乙勝	23	21+2 甲拿 2，乙變先手，甲勝
5	4+1　甲拿 1，乙變先手，甲勝	24	21+3 甲拿 3，乙變先手，甲勝
⑥	4+2　甲拿 1，甲變後手，乙勝	25	21+3+1 甲拿 4，乙變先手，甲勝
7	6+1　甲拿 1，乙變先手，甲勝	26	21+5 甲拿 5，乙變先手，甲勝
⑧	6+2　甲拿 1，甲變後手，乙勝	27	21+6 甲拿 6，乙變先手，甲勝
9	8+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝	28	21+6+1 甲拿 1，就可以拿到 21 堆的最後一顆，甲勝
10	8+2 甲拿 2，乙變先手，甲勝	㉙	21+8 不管甲拿多少，乙能將 8 堆最後一顆取走 乙勝
⑪	8+3 不管甲拿 1 或 2，乙能將 3 堆最後一顆取走 乙勝	30	29+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝
12	11+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝	31	29+2 甲拿 2，乙變先手，甲勝
13	11+2 甲拿 2，乙變先手，甲勝	32	29+3 甲拿 3，乙變先手，甲勝
14	11+3 甲拿 3，乙變先手，甲勝	33	29+4 甲拿 4，乙變先手，甲勝
⑮	11+3+1 不管甲拿 1 或 2 或 3，乙能將 4 堆最後一顆取走 乙勝	34	29+5 甲拿 5，乙變先手，甲勝
16	15+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝	35	29+6 甲拿 6，乙變先手，甲勝
17	15+2 甲拿 2，乙變先手，甲勝	36	29+7 甲拿 7，乙變先手，甲勝
18	15+3 甲拿 3，乙變先手，甲勝	37	29+8 甲拿 8，乙變先手，甲勝
19	15+4 甲拿 4，乙變先手，甲勝	38	29+8+1 甲拿 1，就可以拿到 29 堆的最後一顆，甲勝
20	15+4+1 甲拿 1，就可以拿到 15 堆的最後一顆，甲勝	39	29+8+2 甲拿 2，就可以拿到 21 堆的最後一顆，甲勝

1.一樣我們得知在 3 倍取石題目中每次取出的石頭數不能超過全部的$\frac{1}{4}$，否則接下來一方會將剩餘石頭數取完

2.我們一開始誤將⑳視為乙方必勝石頭，導致前 8 項的結果讓我們歸納出錯誤的規則，接連影響到找 4 倍的進度

項數	1	2	3	4	5	6	7	8
石頭數	②	③	④	⑥	⑧	⑪	⑮	⑳

錯誤的規律是 $G_n = G_{n-1} + \boldsymbol{G_{n-5}} + \mathbf{1}, n \geq 5$，後來重新找到㉑才是乙方獲勝石頭數而不是⑳時，我們整個豁然開朗，這個規律不僅比原先單純而且讓我們對 4 倍以後的規則似乎更有信心，我們列出前面 10 項如下

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
石頭數	②	③	④	⑥	⑧	⑪	⑮	㉑	㉙	㊵

並給出 3 倍的定義

定義 2: $\langle G_n \rangle$是 3 倍費石數列$\begin{cases} G_0 = 1, G_1 = 2, G_2 = 3, G_3 = 4, G_4 = 6, G_5 = 8 \\ G_n = G_{n-1} + G_{n-4}\,, n \geq 5 \end{cases}$

3.跟 2 倍數列相同我們發現每一個$\langle G_n \rangle$數列的G_{n-4}項會以 3 倍的數據卡在G_n和G_{n-1}之間

性質 2.1: $G_{n-1} \leq 3G_{n-4} < G_n$, $\forall\, n \geq 5$

證明:我們先證$G_{n-1} \leq 3G_{n-4}$ $\forall\, n \geq 5$

(i)當 n=5 時, $3G_1 = 3 \times 2 = 6 \geq G_4 = 6$,成立

(ii)當$n \leq k$時,命題成立,即 $3G_{k-4} \geq G_{k-1}, \cdots$

則當$n = k+1$時,$3G_{k-3} - G_k = 3(G_{k-4} + G_{k-7}) - (G_{k-1} + G_{k-4})$

$= (3G_{k-4} - G_{k-1}) + (3G_{k-7} - G_{k-4}) \geq 0$

根據數學歸納法, $3G_{n-4} \geq G_{n-1}\ \forall\, n \geq 5$ 均成立

再證$3G_{n-4} < G_n$, $\forall\, n \geq 5$

(i) 當 n=5 時, $G_5 = 8 > 3G_1 = 3 \times 2 = 6$,成立

(ii) 當$n \le k$時,命題成立,即 $G_k > 3G_{k-4}$

則當$n = k + 1$時,$G_{k+1} - 3G_{k-3} = (G_k + G_{k-3}) - 3(G_{k-4} + G_{k-7})$

$$= (G_k - 3G_{k-4}) + (G_{k-3} - 3G_{k-7}) > 0$$

根據數學歸納法, $G_n > 3G_{n-4}\ \forall\, n \ge 5$ 均成立

性質 2.2 $9G_{n-3} < 4G_n$,$\forall\, n \ge 4$

(i) 當 n=4 時, $4G_4 = 4 \times 4 = 16 > 9G_1 = 9 \times 1 = 9$,成立

(ii) 當$n \le k$時,命題成立,即 $4G_k > 9G_{k-3}$

則當$n = k + 1$時,$4G_{k+1} - 9G_{k-2} = 4(G_k + G_{k-3}) - 9(G_{k-3} + G_{k-6})$

$$= (4G_k - 9G_{k-3}) + (4G_{k-3} - 9G_{k-6}) > 0$$

根據數學歸納法, $9G_{n-3} < 4G_n$,$\forall\, n \ge 4$ 均成立

定理 2.1 任何正整數(N)都可以表示成若干個不連續(間隔數≥ 3)的<G_n>數列之和

我們分成兩部分證明如下:

(1)當 N 為<G_n>數列時,命題成立,如:N=1=G_0 , N=2=G_1 , N=3=G_2

(2)當 N 不為<G_n>數列時,

(i)當 N=5=4+1=$G_3 + G_0$,成立

(ii)當$N > 5$時,我們可以找到最大n_1,使得$G_{n_1} < N < G_{n_1+1}$

此時 k=$N - G_{n_1} < G_{n_1+1} - G_{n_1}$=$G_{n_1-3}$

因為 k< N ,所以 k 可以表示成若干個不連續的<G_n>數列之和,

即 k=$G_{n_2} + G_{n_3} + G_{n_4} + \ldots\ldots + G_{n_t}$ (其中$G_{n_2} > G_{n_3} > G_{n_4} > \ldots\ldots > G_{n_t}, \forall n_i > n_j, n_i - n_j > 3$)

又 k< G_{n_1-3} 所以$G_{n_2} < G_{n_1-3}$ 可知 $n_2 < n_1 - 3$ 得出 $n_1 - n_2 > 3$

即 N=$G_{n_1} + k$=$G_{n_1} + G_{n_2} + G_{n_3} + G_{n_4} + \ldots\ldots + G_{n_t}$ 為不連續的<G_n>數列之和。

定理 2.2 若一開始的石頭數是$<G_n>$數列時則乙方必勝，反之則甲方必勝

我們一樣分成兩部分說明

(1)一開始的石頭數為$<G_n>$數列時:

(i)當$n=1$時, $G_1=2$, 甲因為無法在第一次就全取完,所以乙必能取到最後一顆石頭。

(ii)假設當$n \leq k$時,命題成立,即乙能取到G_k, ..最後一顆石頭

則當$n=k+1$時, 因為$G_{k+1}=G_k+G_{k-3}$若甲第一次所取的石頭數大於或等於G_{k-3}, 根據性質 2.1, 可知$G_k \leq 3G_{k-3}$,乙一定可以將剩下的石頭取完,根據假設命題我們知道乙可以取到G_{k-3}堆中的最後一顆石頭, 有沒有可能甲在乙取完G_{k-3}堆後將剩下G_k堆取完,假設甲第一次取$\frac{1}{4}G_{k-3}$,則乙最多能取$\frac{3}{4}G_{k-3}$此時G_{k-3}堆恰好取完, 根據性質 2.2 可知 $3 \times \frac{3}{4}G_{k-3} < G_k$,所以甲無法直接取完$G_k$堆,原命題剩下甲先取$G_k$,所以乙也能取$G_k$的最後一顆石頭,根據數學歸納法, 乙必能取到最後一顆石頭。

(2)一開始的石頭數不為$<G_n>$數列時:

(i)當N =5 時,甲只要拿 1 顆接下來甲變成後手,甲獲勝。

(ii)當$N>5$時,根據**定理** 2.1,正整數 N 可以表示成若干個不連續的$<G_n>$數列之和,即 N=$G_{n_1}+G_{n_2}+G_{n_3}+G_{n_4}+\ldots\ldots+G_{n_{t-1}}+G_{n_t}$(其中$G_{n_1}>G_{n_2}>\ldots\ldots>G_{n_t}, \forall n_i>n_j, n_i-n_j>3$)因為$n_i-n_j>3$且根據性質 2.1,$G_n>3G_{n-4}, \forall\, n \geq 5$所以$G_{n_1}>3G_{n_2}, G_{n_2}>3G_{n_3}$,...所以甲只要取出最小的$G_{n_t}$即可,而乙無法將前面$G_{n_{t-1}}$堆取完,以此類推,所以甲必能取走每一堆的最後一顆石頭,故甲獲勝。

接下來我們將 4 倍的數列找出看看跟 2 倍 3 倍有無關聯性

4 倍數列之研究過程

N	…後手←先手	N	…後手←先手
1	1 甲直接拿 甲勝	21	19+2 甲拿 2 乙變先手 甲勝
②	1+1 甲不能全拿 乙勝	22	19+3 甲拿 3 乙變先手 甲勝
③	2+1 甲不能全拿 乙勝	23	19+4 甲拿 4 乙變先手 甲勝
④	3+1 甲不能全拿 乙勝	㉔	19+5 不管甲拿幾顆 乙能將 5 堆最後一顆取走 乙勝
⑤	4+1 甲不能全拿 乙勝	25	24+1 甲拿 1 乙變先手 甲勝
6	5+1 甲拿 1 乙變先手 甲勝	26	24+2 甲拿 2 乙變先手 甲勝
⑦	5+2 甲拿 1 甲變後手 乙勝	27	24+3 甲拿 3 乙變先手 甲勝
8	7+1 甲拿 1 乙變先手 甲勝	28	24+4 甲拿 4 乙變先手 甲勝
⑨	7+2 不管甲拿 1，乙能將 2 堆最後一顆取走 乙勝	29	24+5 甲拿 5 乙變先手 甲勝
10	9+1 甲拿 1 乙變先手 甲勝	30	24+5+1 甲拿 1 就會取得 24 堆的最後一顆 甲勝
11	9+2 甲拿 2 乙變先手 甲勝	㉛	24+7 不管甲拿幾顆 乙能將 7 堆最後一顆取走 乙勝
⑫	9+3 不管甲拿 1 或 2，乙能將 3 堆最後一顆取走 乙勝	32	31+1 甲拿 1 乙變先手 甲勝
13	12+1 甲拿 1 乙變先手 甲勝	33	31+2 甲拿 2 乙變先手 甲勝
14	12+2 甲拿 2 乙變先手 甲勝	34	31+3 甲拿 3 乙變先手 甲勝
⑮	12+3 不管甲拿 1 或 2，乙能將 3 堆最後一顆取走 乙勝	35	31+4 甲拿 4 乙變先手 甲勝
16	15+1 甲拿 1 乙變先手 甲勝	36	31+5 甲拿 5 乙變先手 甲勝
17	15+2 甲拿 2 乙變先手 甲勝	37	31+5+1 甲拿 1 就會取得 31 堆的最後一顆 甲勝
18	15+3 甲拿 3 乙變先手 甲勝	38	31+7 甲拿 7 乙變先手 甲勝
⑲	15+4 不管甲拿 1 或 2 或 3 乙能將 3 堆最後一顆取走 乙勝	39	31+7+1 甲拿 1 就會取得 31 堆的最後一顆 甲勝

我們列出乙獲勝前面 11 項如下:

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
石頭數	2	3	4	5	7	9	12	15	19	24	31

我們發現跟 2 倍 3 倍有著相同的規律,我們定義如下:

定義 3: $\langle H_n \rangle$是 4 倍費石數列

$$\begin{cases} H_0 = 1, H_1 = 2, H_2 = 3, H_3 = 4, H_4 = 5, H_5 = 7, H_6 = 9, H_7 = 12, \\ H_n = H_{n-1} + H_{n-6}, n \geq 8 \end{cases}$$

一樣發現有相同的不等式

性質 3.1: $H_{n-1} \leq 4H_{n-6} < H_n$, $\forall n \geq 8$

證明:我們先證$H_{n-1} \leq 4H_{n-6}$, $\forall n \geq 8$

(i)當 n=8 時, $4H_2 = 4 \times 3 = 12 \geq H_7 = 12$,成立

(ii)假設當$n \leq k$時,命題成立,即 $4H_{k-6} \geq H_{k-1}, \cdots$

則當$n = k + 1$時,$4H_{k-5} - H_k = 4(H_{k-6} + H_{k-11}) - (H_{k-1} + H_{k-6})$

$$= (4H_{k-6} - H_{k-1}) + (4H_{k-11} - H_{k-6}) \geq 0$$

根據數學歸納法, $4H_{n-6} \geq H_{n-1}\ \forall n \geq 8$ 均成立

再證$4H_{n-6} < H_n$, $\forall n \geq 8$

(i) 當 n=8 時, $H_8 = 15 > 4H_2 = 4 \times 3 = 12$,成立

(ii)假設當$n \leq k$時,命題成立,即 $H_k > 4H_{k-6}$

則當$n = k + 1$時,$H_{k+1} - 4H_{k-5} = (H_k + H_{k-5}) - 4(H_{k-6} + H_{k-11})$

$$= (H_k - 4H_{k-6}) + (H_{k-5} - 4H_{k-11}) > 0$$

根據數學歸納法, $H_n > 4H_{n-6}\ \forall n \geq 8$ 均成立

性質 3.2 $16H_{n-5} < 5H_n$, $\forall n \geq 6$

(i) 當 n=6 時, $5H_6 = 5 \times 9 = 45 > 16H_1 = 16 \times 1 = 16$,成立

(ii) 當$n \leq k$時,命題成立,即 $5H_k > 16H_{k-5}$

則當$n = k + 1$時,$5H_{k+1} - 16H_{k-4} = 5(H_k + H_{k-5}) - 16(H_{k-5} + H_{k-10})$

$= (5H_k - 16H_{k-5}) + (5H_{k-5} - 16H_{k-10}) > 0$

根據數學歸納法, $16H_{n-5} < 5H_n$,$\forall\, n \geq 6$ 均成立

定理 3.1 任何正整數(N)都可以表示成若干個不連續(間隔數≥ 4)的<H_n>數列之和

我們分成兩部分證明如下:

(1)當 N 為<H_n>數列時,命題成立,如:N=1=H_0 , N=2=H_1 , N=3=H_2

(2)當 N 不為<H_n>數列時,

(i)當 N=6=5+1=$H_4 + H_0$ 成立

(ii)當$\mathrm{N} > 6$時,我們可以找到最大n_1,使得$H_{n_1} < \mathrm{N} < H_{n_1+1}$

此時 k=N $- H_{n_1} < H_{n_1+1} - H_{n_1}$=$H_{n_1-5}$

因為 k< N ,所以 k 可以表示成若干個不連續的<H_n>數列之和,

即 k=$H_{n_2} + H_{n_3} + H_{n_4} + \ldots\ldots + H_{n_t}$ (其中$H_{n_2} > H_{n_3} > H_{n_4} > \ldots\ldots > H_{n_t}, \forall n_i > n_j, n_i - n_j > 5$)

又 k< H_{n_1-5} 所以$H_{n_2} < H_{n_1-5}$ 可知 $n_2 < n_1 - 5$ 得出 $n_1 - n_2 > 5$

即 N=$H_{n_1} + k$=$H_{n_1} + H_{n_2} + H_{n_3} + H_{n_4} + \ldots\ldots + H_{n_t}$ 為不連續的<H_n>數列之和。

定理 3.2 若一開始的石頭數是<H_n>數列時則乙方必勝,反之則甲方必勝

我們一樣分成兩部分說明

(1)一開始的石頭數為<H_n>數列時:

(i)當$n = 1$時, $H_1 = 2$, 甲因為無法在第一次就全取完,所以乙必能取到最後一顆石頭。

(ii)假設當$n \leq k$時,命題成立,即乙能取到H_k, ..最後一顆石頭。

則當$n = k + 1$時, 因為$H_{k+1} = H_k + H_{k-5}$若甲第一次所取的石頭數大於或等於H_{k-5},根據性質 3.1, 可知$H_k \leq 4H_{k-5}$,乙一定可以將剩下的石頭取完,根據假設命題我們知道乙可以取到H_{k-5}堆中的最後一顆石頭, 有沒有可能甲在乙取完H_{k-5}堆後將剩下H_k堆取完,假設甲第一次取$\frac{1}{5}H_{k-5}$,則乙最多能取$\frac{4}{5}H_{k-5}$此時H_{k-5}堆恰好取完, 根據性質 3.2 可知 $4 \times \frac{4}{5}H_{k-5} < H_k$,所以甲無法直接取完$H_k$堆,原命題只剩甲先取$H_k$, 根據數學歸納法, 乙必能取到最後一顆石頭。

(2)一開始的石頭數不為<H_n>數列時:

(i)當$N=6$時,甲只要拿 1 顆接下來甲變成後手,甲獲勝。

(ii)當$N>6$時,根據定理 3.1,N 可以表示成若干個不連續的$\langle H_n\rangle$數列之和,即 $N=H_{n_1}+H_{n_2}+H_{n_3}+H_{n_4}+\ldots\ldots+H_{n_{t-1}}+H_{n_t}$(其中$H_{n_1}>H_{n_2}>\ldots\ldots>H_{n_t},\forall n_i>n_j,n_i-n_j>5$)因為$n_i-n_j>5$且根據性質 3.1,$H_n>4H_{n-6}$所以$H_{n_1}>4G_{n_2},H_{n_2}>4H_{n_3}$,...所以甲只要取出最小的$H_{n_t}$即可,而乙無法將前面$H_{n_{t-1}}$堆取完,以此類推,所以甲必能取走每一堆的最後一顆石頭,故甲獲勝。

我們以相同方式將 5 倍、6 倍的研究過程列出

5 倍數列之研究過程

N	…後手←先手	N	…後手←先手
2	1+1 甲無法全拿，乙勝	26	22+4 甲拿 4，乙變先手，甲勝
3	2+1 甲無法全拿，乙勝	27	22+5 不管甲拿多少，乙能將 5 堆最後一顆取走 乙勝
4	3+1 甲無法全拿，乙勝	28	27+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝
5	4+1 甲無法全拿，乙勝	29	27+2 甲拿 2，乙變先手，甲勝
6	5+1 甲無法全拿，乙勝	30	27+3 甲拿 3，乙變先手，甲勝
7	6+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝	31	27+4 甲拿 4，乙變先手，甲勝
8	6+2 甲拿 1，甲變後手，乙勝	32	27+5 甲拿 5，乙變先手，甲勝
9	8+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝	33	27+6 不管甲拿多少，乙能將 6 堆最後一顆取走 乙勝
10	8+2 不管甲拿 1，乙能將 2 堆最後一顆取走 乙勝	34	33+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝
11	10+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝	35	33+2 甲拿 2，乙變先手，甲勝
12	10+2 不管甲拿 1，乙能將 2 堆最後一顆取走 乙勝	36	33+3 甲拿 3，乙變先手，甲勝
13	12+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝	37	33+4 甲拿 4，乙變先手，甲勝
14	12+2 甲拿 2，乙變先手，甲勝	38	33+5 甲拿 5，乙變先手，甲勝

	若甲拿 1，則乙勝		
⑮	12+3 不管甲拿 1 或 2，乙能將 3 堆最後一顆取走 乙勝	39	33+6 甲拿 6，乙變先手，甲勝
16	15+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝	40	33+6+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝
17	15+2 甲拿 2，乙變先手，甲勝	㊶	33+8 不管甲拿多少，乙能將 8 堆最後一顆取走 乙勝
⑱	15+3 不管甲拿 1 或 2，乙能將 3 堆最後一顆取走 乙勝	42	41+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝
19	18+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝	43	41+2 甲拿 2，乙變先手，甲勝
20	18+2 甲拿 2，乙變先手，甲勝	44	41+3 甲拿 3，乙變先手，甲勝
21	18+3 甲拿 3，乙變先手，甲勝	45	41+4 甲拿 4，乙變先手，甲勝
㉒	18+4 不管甲拿 1 或 2 或 3，乙能將 4 堆最後一顆取走 乙勝	46	41+5 甲拿 5，乙變先手，甲勝
23	22+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝	47	41+6 甲拿 6，乙變先手，甲勝
24	22+2 甲拿 2，乙變先手，甲勝	48	41+6+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝
25	22+3 甲拿 3，乙變先手，甲勝	49	41+8 甲拿 1，乙變先手，甲勝
		50	41+8+1 甲拿 1，乙變先手，甲勝

我們列出乙獲勝前面 13 項如下:

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
石頭數	②	③	④	⑤	⑥	⑧	⑩	⑫	⑱	㉒	㉗	㉝	㊶

定義 4: $\langle I_n \rangle$是 5 倍費石數列

$$I_0 = 1, I_1 = 2, I_2 = 3, I_3 = 4, I_4 = 5, I_5 = 6, I_6 = 8, I_7 = 10, I_8 = 12, I_9 = 15$$

$$I_n = I_{n-1} + I_{n-8}, n \geq 10$$

6 倍數列之研究過程

N	…後手←先手	N	…後手←先手
1	1 甲直接拿 甲勝	24	23+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝
②	1+1 甲無法全拿 乙勝	25	23+2 甲拿 2，乙變先手 甲勝
③	2+1 甲無法全拿 乙勝	26	23+3 甲拿 3，乙變先手 甲勝

④	3+1 甲無法全拿 乙勝	㉗	23+4 不管甲拿 1 或 2 或 3，乙能將 4 堆最後一顆取走 乙勝
⑤	4+1 甲無法全拿 乙勝	28	27+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝
⑥	5+1 甲無法全拿 乙勝	29	27+2 甲拿 1，乙變先手 甲勝
⑦	6+1 甲無法全拿 乙勝	30	27+3 甲拿 1，乙變先手 甲勝
8	7+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝	31	27+4 甲拿 4，乙變先手 甲勝
⑨	7+2 甲拿 1，甲變後手 乙勝	㉜	27+5 不管甲拿多少，乙能將 5 堆最後一顆取走 乙勝
10	9+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝	33	32+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝
⑪	9+2 不管甲拿 1，乙能將 2 堆最後一顆取走 乙勝	34	32+2 甲拿 2，乙變先手 甲勝
12	11+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝	35	32+3 甲拿 3，乙變先手 甲勝
⑬	11+2 不管甲拿 1，乙能將 2 堆最後一顆取走 乙勝	36	32+4 甲拿 4，乙變先手 甲勝
14	13+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝	37	32+5 甲拿 5，乙變先手 甲勝
15	13+2 甲拿 2，乙變先手 甲勝	㊳	32+6 不管甲拿多少，乙能將 6 堆最後一顆取走 乙勝
⑯	13+3 不管甲拿 1 或 2，乙能將 3 堆最後一顆取走 乙勝	39	38+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝
17	16+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝	40	38+2 甲拿 2，乙變先手 甲勝
18	16+2 甲拿 2，乙變先手 甲勝	41	38+3 甲拿 3，乙變先手 甲勝
⑲	16+3 不管甲拿 1 或 2，乙能將 3 堆最後一顆取走 乙勝	42	38+4 甲拿 4，乙變先手 甲勝
20	19+1 甲拿 1，乙變先手 甲勝	43	38+5 甲拿 5，乙變先手 甲勝
21	19+2 甲拿 2，乙變先手 甲勝	44	38+6 甲拿 6，乙變先手 甲勝
22	19+3 甲拿 3，乙變先手 甲勝	㊺	38+7 不管甲拿多少，乙能將 7 堆最後一顆取走 乙勝
㉓	19+4 不管甲拿 1 或 2，乙能將 4 堆最後一顆取走 乙勝		

我們列出乙獲勝前面 16 項如下:

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
石頭數	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑨	⑪	⑬	⑯	⑲	㉓	㉗	㉜	㊳	㊺

定義 5: <J_n>是 6 倍費石數列

$$J_0=1, J_1=2, J_2=3, J_3=4, J_4=5, J_5=6, J_6=7, J_7=9, J_8=11, J_9=13, J_{10}=16,$$

$$J_{11}=19, J_{12}=23 \quad J_n=J_{n-1}+J_{n-10}, n\geq 13$$

伍、研究結果與討論

一、兩人取石頭遊戲可說是齊肯多夫定理的廣義延伸，不同的倍數限制均有其所對應的數列來完成齊肯多夫表述。

二、我們列出乙獲勝的數列

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2 倍	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
3 倍	2	3	4	6	8	11	15	21	29	40	55	76	105
4 倍	2	3	4	5	7	9	12	15	19	24	31	40	52
5 倍	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	33
6 倍	2	3	4	5	6	7	9	11	13	16	19	23	27

三、我們將 2 倍到 6 倍時的乙方可獲勝的數列列出並給予定義

倍數	乙方可獲勝的數列
2 倍	$F_0=1, F_1=2, F_2=3 \quad F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n\geq 3$
3 倍	$G_0=1, G_1=2, G_2=3, G_3=4, G_4=6, G_5=8 \quad G_n=G_{n-1}+G_{n-4}, n\geq 5$
4 倍	$H_0=1, H_1=2, H_2=3, H_3=4, H_4=5 \quad H_5=7, H_6=9, H_7=12$ $H_n=H_{n-1}+H_{n-6}, n\geq 8$
5 倍	$I_0=1, I_1=2, I_2=3, I_3=4, I_4=5, I_5=6, I_6=8, I_7=10, I_8=12, I_9=15$ $I_n=I_{n-1}+I_{n-8}, n\geq 10$
6 倍	$J_0=1, J_1=2, J_2=3, J_3=4, J_4=5, J_5=6, J_6=7, J_7=9, J_8=11, J_9=13, J_{10}=16,$ $J_{11}=19, J_{12}=23 \quad J_n=J_{n-1}+J_{n-10}, n\geq 13$

四、我們從上面的結果推測 m 倍取石，乙方的必勝數列可能是

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2(m-1)}$$

而且滿足下方的不等式

$$a_{n-1} \leq m \times a_{n-2(m-1)} < a_n$$

我們必須再多找出 7 倍、8 倍..看看是否符合這個通式，此外若真符合這個通式，接下來仍須找出每一個符合通式起始的第 n 項是從哪一個數開始? 而我們可以輕易得知 m 倍取石乙方獲勝的前 m 項是$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, \ldots \ldots . a_m = m + 1$，但從$a_{m+1}$~$a_{n-1}$項之間是否有其快速找出的方法將是我們往後努力的方向。

五、而甲方的必勝策略是透過我們找出的<a_n>數列，將正整數表示成若干個不連續<a_n>數列之和，利用每次取走最小的a_t就可以取走每一堆的最後一顆石頭。

陸、參考文獻資料

1.許志農(2014)•非想非非想數學網•取自 http://pisa.math.ntnu.edu.tw/popular-science/game?start=15

2.維基百科-齊肯多夫定理

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%BD%8A%E8%82%AF%E5%A4%9A%E5%A4%AB%E5%AE%9A%E7%90%86

3. 維基百科-數學歸納法

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%BD%92%E7%BA%B3%E6%B3%95