

屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會

作品說明書



科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：你「倒」是說說看

關 鍵 詞：因數與倍數、數對、數型關係

編 號：B1031

作品名稱：你「倒」是說說看

摘要

某電影的主角成功地將3加侖和5加侖的水桶量出4加侖的水的事情引起了我們的興趣，讓我們著手研究相關問題，經過研究後，我們發現：除了3加侖與5加侖的水桶外，若水桶容量為1~10(加侖)中的連續奇數，能量出兩水桶容量的等差中項之水量；若水桶容量為1~10(加侖)中的連續偶數，無法量出兩水桶容量的等差中項之水量；若水桶容量為1~10(加侖)中任意兩種，當兩個水桶的容量互質時能夠量出1加侖至最大容量水桶的水量，若兩個水桶的容量不互質時，僅能夠量出其最大公因數的倍數之水量。

壹、研究動機

某天我們在電視上看電影時，影片當中有段情節：主角必須利用歹徒提供給他的3加侖和5加侖的水桶量出4加侖的水放在炸彈上方的計時器上，才能停止計時器倒數計時，阻止炸彈爆炸。這個難題讓我們印象深刻，也引起了我們的興趣，決定好好針對此問題進行研究。

貳、研究目的

- 一、除了3加侖與5加侖的水桶外，若水桶容量為1~10(加侖)中的連續奇數，是否能量出兩水桶容量的等差中項之水量？其操作步驟數是否有規律性？
- 二、若水桶容量為1~10(加侖)中的連續偶數，是否能量出兩水桶容量的等差中項之水量？其操作步驟數是否有規律性？
- 三、除了兩水桶容量的等差中項之水量外，若水桶容量為1~10(加侖)中任意兩種，是否能量出1加侖至最大容量水桶的水量？其操作步驟數是否有規律性？

參、研究設備及器材

紙、筆、橡皮擦、電腦。

肆、研究過程或方法

一、說明：

(一)目標水量為欲量測出的水量(加侖)。

(二)以 x 、 y 表示水桶容量，並以 x 水桶為試驗起始之水桶。

(三)以數對 (x, y) 表示水桶內所裝之水量(加侖)。如 $(3,0)$ 表示容量 x 的水桶裝了3加侖的水，容量 y 的水桶裝了0加侖的水。

(四)試驗所稱之步驟數為量出目標水量之最少步驟的數目，並將試驗之步驟順序由上往下依序以數對 (x, y) 排列表示。

(五)「-」表示無法量出，表格畫斜線部分表示超出兩水桶之容量，不予討論。

二、試驗過程

(一) $x < y$

水桶容量(加侖)		目標水量(加侖)									
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	(1,0)	(0,0) (0,1) (1,1) (0,2)	/	/	/	/	/	/	/	/
1	3	(1,0)	(0,0) (0,1) (1,1) (0,2)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3)	/	/	/	/	/	/	/
1	4	(1,0)	(0,0) (0,1) (1,1) (0,2)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3)	(0,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4)	/	/	/	/	/	/
1	5	(1,0)	(0,0) (0,1) (1,1) (0,2)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3)	(0,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5)	/	/	/	/	/
1	6	(1,0)	(0,0) (0,1) (1,1) (0,2)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3)	(0,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3)	/	/	/	/
1	7	(1,0)	(0,0) (0,1) (1,1) (0,2)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3)	(0,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6) (0,7)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6) (0,7)	/	/	/	/

水桶容量(加侖)		目標水量(加侖)									
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	(1,0)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6) (0,7)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6) (0,7) (0,8)	/	/
1	9	(1,0)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6) (0,7)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6) (0,7) (0,8) (0,9)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6) (0,7) (0,8) (0,9)	/
1	10	(1,0)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6) (0,7)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6) (0,7) (0,8) (0,9)	(1,0) (0,1) (1,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6) (0,7) (0,8) (0,9) (0,10)	/

水補容量(加侖)		目標水量(加侖)									
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	(2,0) (0,2) (2,2) (1,3)	(2,0)	(2,0) (0,2) (2,2) (1,3)							
2	4	-	(2,0)	-	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4)						
2	5	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (1,5)	(2,0)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (1,0) (0,1) (2,1) (0,3)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (1,5)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (1,5)					
2	6	-	(2,0)	-	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (0,6)					
2	7	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (1,7)	(2,0)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (0,6) (2,6) (1,7) (1,0) (0,1) (2,1) (0,3) (0,5)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (0,6) (2,6) (1,7) (1,0) (0,1) (2,1) (0,3) (0,5) (0,5)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (0,6) (2,6) (1,7)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (0,6) (2,6) (1,7)				
2	8	-	(2,0)	-	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (0,6)		(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (0,6) (2,6) (0,8)			

水補容量(加侖)		目標水量(加侖)									
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	9	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (0,8) (2,8) (1,9)	(2,0)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (0,8) (2,8) (1,9)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (0,8) (2,8) (1,9)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (0,8) (2,8) (1,9)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (0,8) (2,8) (1,9)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (0,8) (2,8) (1,9)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (0,8) (2,8) (1,9)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (0,8) (2,8) (1,9)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (0,8) (2,8) (1,9)
2	10	-	(2,0)	-	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (0,8)		(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (0,8)		(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (0,8)	(2,0) (0,2) (2,2) (0,4) (2,4) (0,6) (2,6) (0,8) (0,10)

水補容量(加侖)		目標水量(加侖)										
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	4	(3,0) (0,3) (3,3) (2,4) (2,0) (0,2) (3,2) (1,4)	(3,0) (0,3) (3,3) (2,4)	(3,0)	(3,0) (0,3) (3,3) (2,4)							
3	5	(3,0) (0,3) (3,3) (1,5)	(3,0) (0,3) (3,3) (1,5) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4) (3,4) (2,5)	(3,0)	(3,0) (0,3) (3,3) (1,5) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4) (3,4) (2,5)	(3,0) (0,3) (3,3) (1,5)						
3	6	-	(3,0)	-	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,0) (0,3) (3,3) (0,6)						
3	7	(3,0) (0,3) (3,3) (2,7) (2,0) (0,6) (3,6) (0,5) (3,5) (1,7)	(3,0) (0,3) (3,3) (2,7) (2,0) (0,6) (3,6) (0,5) (3,5) (1,7)	(3,0)	(3,0) (0,3) (3,3) (2,7) (2,0) (0,6) (3,6) (0,5) (3,5) (1,7) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4)	(3,0) (0,3) (3,3) (2,7) (2,0) (0,6) (3,6) (0,5) (3,5) (1,7) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4)	(3,0) (0,3) (3,3) (2,7) (2,0) (0,6) (3,6) (0,5) (3,5) (1,7)	(3,0) (0,3) (3,3) (2,7) (2,0) (0,6) (3,6) (0,5) (3,5) (1,7)				
3	8	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4) (3,4) (0,7) (3,7) (2,8)	(3,0)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4) (3,4) (0,7) (3,7) (2,8)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4) (3,4) (0,7) (3,7) (2,8)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4) (3,4) (0,7) (3,7) (2,8)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4) (3,4) (0,7) (3,7) (2,8)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4) (3,4) (0,7) (3,7) (2,8)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4) (3,4) (0,7) (3,7) (2,8)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4) (3,4) (0,7) (3,7) (2,8)	

水補容量(加侖)		目標水量(加侖)									
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	-	-	(3,0)	-	-	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6)	-	-	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (0,9)
3	10	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4)	(3,0) (0,3) (3,3) (0,6) (3,6) (1,8) (1,0) (0,1) (3,1) (0,4)

(二) $x > y$

水補容量(加侖)		目標水量(加侖)									
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	(2,0) (1,1)	(2,0)								

水補容量(加侖)		目標水量(加侖)									
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	(3,0) (3,1)	(3,0) (2,1)	(3,0)							
3	2	(3,0) (1,2)	(3,0) (1,2)	(3,0)							

水補容量(加侖)		目標水量(加侖)									
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	1	(4,0) (3,1) (3,0) (2,1)	(4,0) (3,1) (2,1)	(4,0) (3,1)	(4,0)						
4	2	-	(4,0) (2,2)	-	(4,0)						
4	3	(4,0) (1,3) (1,0) (0,1) (4,1) (2,3)	(4,0) (1,3)	(4,0)	(4,0)						

水補容量(加侖)		目標水量(加侖)									
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	1	(6,0) (5,1)	(6,0) (5,1) (5,0) (4,1) (4,0) (3,1) (3,0) (2,1)	(6,0) (5,1) (5,0) (4,1) (4,0) (3,1)	(6,0) (5,1) (5,0) (4,1) (4,0)	(6,0) (5,1)	(6,0)				
6	2	-	(6,0) (4,2)	-	(6,0) (4,2)	-	(6,0)				
6	3	-	-	(6,0) (3,3)	-	-	(6,0)				
6	4	-	(6,0) (2,4)	-	(6,0) (2,4)	-	(6,0)				
6	5	(6,0) (1,5)	(6,0) (1,5) (1,0) (0,1) (6,1) (2,5)	(6,0) (1,5) (1,0) (0,1) (6,1) (2,5) (2,0) (0,2) (6,2) (3,5)	(6,0) (1,5) (1,0) (0,1) (6,1) (2,5) (2,0) (0,2) (6,2) (3,5) (3,0) (0,3) (6,3) (4,5)	(6,0) (1,5)	(6,0)				

水補容量(加侖)		目標水量(加侖)									
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1	(5,0) (4,1)	(5,0) (4,1) (4,0) (3,1) (3,0) (2,1)	(5,0) (4,1) (4,0)	(5,0) (4,1)	(5,0)					
5	2	(5,0) (3,2) (3,0) (1,2)	(5,0) (3,2)	(5,0) (3,2)	(5,0) (3,2) (3,0) (1,2) (1,0) (0,1) (5,1) (4,2)	(5,0)					
5	3	(5,0) (2,3) (2,0) (0,2) (5,2) (4,3) (4,0) (1,3)	(5,0) (2,3)	(5,0) (2,3)	(5,0) (2,3) (2,0) (0,2) (5,2) (4,3) (4,0)	(5,0)					
5	4	(5,0) (1,4)	(5,0) (1,4) (1,0) (0,1) (5,1) (2,4) (2,0) (0,2) (5,2) (3,4)	(5,0) (1,4) (1,0) (0,1) (5,1) (2,4) (2,0) (0,2) (5,2) (3,4)	(5,0) (1,4)	(5,0)					

水補容量(加侖)		目標水量(加侖)									
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	1	(7,0) (6,1)	(7,0) (6,1) (6,0) (5,1) (5,0) (4,1) (4,0) (3,1) (3,0) (2,1)	(7,0) (6,1) (6,0) (5,1) (5,0) (4,1) (4,0) (3,1)	(7,0) (6,1) (6,0) (5,1) (5,0) (4,1) (4,0)	(7,0) (6,1) (6,0) (5,1) (5,0)	(7,0) (6,1)	(7,0)			
7	2	(7,0) (5,2)	(7,0) (5,2) (5,0) (3,2)	(7,0) (5,2) (5,0) (3,2)	(7,0) (5,2) (5,0) (3,2) (3,0) (1,2) (7,1) (0,1) (6,2) (6,0) (4,2)	(7,0) (5,2)	(7,0) (5,2)	(7,0)			
7	3	(7,0) (4,3) (4,0) (1,3)	(7,0) (4,3) (4,0) (1,3) (7,1) (5,3) (5,0) (2,3)	(7,0) (4,3) (4,0) (1,3) (7,1) (5,3) (5,0) (2,3)	(7,0) (4,3) (4,0) (1,3) (7,1) (5,3) (5,0) (2,3)	(7,0) (4,3) (4,0) (1,3) (7,1) (5,3) (5,0) (2,3)	(7,0) (4,3) (4,0) (1,3) (7,1) (5,3) (5,0) (2,3)	(7,0)			

伍、研究結果

茲將試驗結果統計如下表所示：

水桶容量(加侖)		目標水量(加侖)									
<i>x</i>	<i>y</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1	4								
1	3	1	4	6							
1	4	1	4	6	8						
1	5	1	4	6	8	10					
1	6	1	4	6	8	10	12				
1	7	1	4	6	8	10	12	14			
1	8	1	4	6	8	10	12	14	16		
1	9	1	4	6	8	10	12	14	16	18	
1	10	1	4	6	8	10	12	14	16	18	20
2	1	2	1								
2	3	4	1	4							
2	4	-	1	-	4						
2	5	6	1	10	4	6					
2	6	-	1	-	4	-	6				
2	7	8	1	12	4	14	6	8			
2	8	-	1	-	4	-	6	-	8		
2	9	10	1	14	4	16	6	18	8	10	
2	10	-	1	-	4	-	6	-	8	-	10
3	1	2	2	1							
3	2	2	2	1							
3	4	8	4	1	4						
3	5	4	10	1	8	4					
3	6	-	-	1	-	-	4				
3	7	12	6	1	16	10	4	6			
3	8	6	14	1	10	18	4	12	6		
3	9	-	-	1	-	-	4	-	-	6	
3	10	16	8	1	20	12	4	22	14	6	8

水桶容量(加侖)		目標水量(加侖)									
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	1	2	4	2	1						
4	2	-	2	-	1						
4	3	2	6	2	1						
4	5	12	8	4	1	4					
4	6	-	4	-	1	-	4				
4	7	4	10	16	1	8	14	4			
4	8	-	-	-	1	-	-	-	4		
4	9	18	12	6	1	22	16	10	4	6	
4	10	-	6	-	1	-	10	-	4	-	6
5	1	2	6	4	2	1					
5	2	4	2	2	8	1					
5	3	8	2	2	6	1					
5	4	2	6	10	2	1					
5	6	16	12	8	4	1	4				
5	7	8	18	4	14	1	12	4			
5	8	14	4	20	10	1	18	8	4		
5	9	4	10	16	22	1	8	14	20	4	
5	10	-	-	-	-	1	-	-	-	-	4
6	1	2	8	6	4	2	1				
6	2	-	2	-	2	-	1				
6	3	-	-	2	-	-	1				
6	4	-	2	-	2	-	1				
6	5	2	6	10	14	2	1				
6	7	20	16	12	8	4	1	4			
6	8	-	8	-	4	-	1	-	4		
6	9	-	-	4	-	-	1	-	-	4	
6	10	-	4	-	10	-	1	-	8	-	4
7	1	2	10	8	6	4	2	1			
7	2	6	2	4	12	2	10	1			
7	3	4	10	2	2	8	14	1			
7	4	14	8	2	2	12	6	1			
7	5	12	2	16	6	2	10	1			
7	6	2	6	10	14	18	2	1			
7	8	24	20	16	12	8	4	1	4		
7	9	12	26	8	22	4	18	1	16	4	
7	10	8	18	28	4	14	24	1	12	22	4

水桶容量(加侖)		目標水量(加侖)									
x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	1	2	12	10	8	6	4	2	1		
8	2	-	2	-	4	-	2	-	1		
8	3	12	4	2	10	2	16	8	1		
8	4	-	--	-	2	-	-	-	1		
8	5	8	18	2	12	2	6	16	1		
8	6	-	2	-	6	-	2	-	1		
8	7	2	6	10	14	18	22	2	1		
8	9	28	24	20	16	12	8	4	1	4	
8	10	-	12	-	8	-	4	-	1	-	4
9	1	2	14	12	10	8	6	4	2	1	
9	2	8	2	6	16	4	14	2	12	1	
9	3	-	-	2	-	-	2	-	-	1	
9	4	4	10	16	2	2	8	14	20	1	
9	5	20	14	8	2	2	18	12	6	1	
9	6	-	-	2	-	-	2	-	-	1	
9	7	16	2	20	6	24	10	2	14	1	
9	8	2	6	10	14	18	22	26	2	1	
9	10	32	28	24	20	16	12	8	4	1	4
10	1	2	16	14	12	10	8	6	4	2	1
10	2	-	2	-	6	-	4	-	2	-	1
10	3	6	14	2	4	12	20	2	10	18	1
10	4	-	4	-	2	-	2	-	8	-	1
10	5	-	-	-	-	2	-	-	-	-	1
10	6	-	8	-	2	-	2	-	6	-	1
10	7	22	12	2	26	16	6	2	20	10	1
10	8	-	2	-	6	-	10	-	2	-	1
10	9	2	6	10	14	18	22	26	30	2	1

陸、討論

一、若水桶容量 x 、 y 加侖且 $x < y$ ， $1 \leq x \leq 10$ ， $1 \leq y \leq 10$ ， x 、 y 為正整數：

(一)若 x 、 y 為連續奇數，都能夠量出 x 、 y 的等差中項之水量($\frac{x+y}{2}$)，且其所需之步驟數為等差中項的 2 倍，即 $x+y$ 。

(二)若 x 、 y 為連續偶數，則無法量出兩水桶容量的等差中項之水量($\frac{x+y}{2}$)，因為 x 、 y 均為

偶數的關係，只能量出加侖數為偶數的水量，但等差中項 $(\frac{x+y}{2})$ 均為奇數，故無法量出。

(三)若 $x、y$ 為任意兩個數，目標水量為 z ，且 z 為正整數， $1 < z < y$ ， $z \neq x$ ， $(x、y)$ 為 $x、y$ 的最大公因數，則：

1.若 $(x、y)=1$ ，能夠量出 $1\sim y$ 的水量，且所有的步驟數都是偶數(所量水量= x 除外)。

2.若 $(x、y)=1$ ，且 $x \neq 1$ ，則當 $z=y-x$ 時，量出 z 的步驟數最多。

3.若 $(x、y) \neq 1$ ，則僅能量出 $(x、y)$ 倍數之水量，且所有的步驟數都是偶數。

4.若 $(x、y)=x$ ，則量出 z 的步驟為 $2 \times \frac{z}{x}$ 。

5.若 $x、y$ 為兩個連續正整數，則量出 x 的步驟數必定為 1；量出 y 的步驟數必定為 4；量出 z 的步驟數為 $(x-z) \times 4$ 。

二、若水桶容量 $x、y$ 加侖且 $x > y$ ， $1 \leq x \leq 10$ ， $1 \leq y \leq 10$ ， $x、y$ 為正整數

(一)若 $x、y$ 為連續奇數，都能夠量出 $x、y$ 的等差中項之水量 $(\frac{x+y}{2})$ ，且其所需之步驟數為等差中項的 2 倍少 2，即 $x+y-2$ 。

(二)若 $x、y$ 為連續偶數，則無法量出兩水桶容量的等差中項之水量 $(\frac{x+y}{2})$ ，因為 $x、y$ 均為偶數的關係，只能量出加侖數為偶數的水量，但等差中項 $(\frac{x+y}{2})$ 均為奇數，故無法量出。

(三)若 $x、y$ 為任意兩個數，目標水量為 z ，且 z 為正整數， $1 < z < x$ ， $z \neq y$ ， $(x、y)$ 為 $x、y$ 的最大公因數，則：

1.若 $(x、y)=1$ ，能夠量出 $1\sim y$ 的水量，且所有的步驟數都是偶數(所量水量= y 除外)。

2.若 $(x、y)=1$ ，則當 $z=x-y$ 時，量出 z 的步驟數最少，都是 2。

3.若 $(x、y) \neq 1$ ，則僅能量出 $(x、y)$ 倍數之水量，且所有的步驟數都是偶數。

4.若 $x、y$ 為兩個連續正整數，則量出 x 的步驟數必定為 1；量出 y 的步驟數必定為 2；量出 z 的步驟數為 $2+(z-1) \times 4$ 。

柒、結論

從討論的結果我們可以知道：

- 一、若兩水桶容量 a 、 b (加侖) 為連續奇數，不論從容量小的水桶開始，還是從容量的水桶開始進行試驗，都能夠量出 a 、 b 的等差中項之水量 $(\frac{a+b}{2})$ ，且從容量大的水桶開始進行試驗會比較快速完成，因其所需之步驟數 $(a+b-2)$ 比從容量小的水桶開始進行試驗之步驟數 $(a+b)$ 少為 2 個步驟。
- 二、若兩水桶容量 a 、 b (加侖) 為連續偶數，不論從容量小的水桶開始，還是從容量的水桶開始進行試驗，都無法量出兩水桶容量的等差中項之水量 $(\frac{a+b}{2})$ ，因為 a 、 b 均為偶數的關係，只能量出加侖數為偶數的水量，但等差中項 $(\frac{a+b}{2})$ 均為奇數，故無法量出。
- 三、若兩水桶容量 a 、 b (加侖) 為任意兩個數，且 $a < b$ ，目標容量為 z (加侖) 時：
 - (一) 若 $(a, b) = 1$ ，不論從容量小的水桶 (a 加侖) 開始，還是從容量大的水桶 (b 加侖) 開始進行試驗，都能夠量出 $1 \sim b$ 的水量，且所有的步驟數都是偶數 (所量水量為 a 除外)。
 - (二) 若 $(a, b) = 1$ ，且 $z = x - y$ 時，從容量小的水桶 (a 加侖) 開始進行試驗，可以將所有目標容量的步驟與步驟數一次試驗出來；從容量大的水桶 (b 加侖) 開始進行試驗，則可以最快的速率量出 z 。
 - (三) 若 $(a, b) \neq 1$ ，不論從容量小的水桶開始，還是從容量的水桶開始進行試驗，都僅能量出 (a, b) 倍數之水量，且所有的步驟數都是偶數。
 - (四) 若 $(a, b) = a$ ，從容量小的水桶 (a 加侖) 開始進行試驗，量出 z 的步驟為 $2 \times \frac{z}{a}$ ；從容量大的水桶 (b 加侖) 開始進行試驗，量出 z 的步驟無法預測。
 - (五) 若 a 、 b 為兩個連續正整數，從容量小的水桶 (a 加侖) 開始進行試驗，量出 z 的步驟數為 $(x-z) \times 4$ ；從容量大的水桶 (b 加侖) 開始進行試驗，量出 z 的步驟數為 $2 + (a-1) \times 4$ 。我們可以利用此關係推算出各自所需的步驟數，以決定自哪個容量的水桶開始進行試驗比較快。