屏東縣第61屆國中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：剪剪貼貼拼成「正」

關 鍵 詞：任意多邊形、正方形、裁剪轉拼

編　　號：B1036

目 錄

摘要

本研究旨在探討幾何圖形中，對任意多邊形是否能將其裁剪後，將其拼成正方形。所以我們的研究依序先從最簡單的是否能將正三角形經由裁剪後拼成正方形，接著再用任意三角形能否拼成正方形，再到任意四邊形，最後再研究對於任意多邊形到底能否拼成正方形。網路上有許多類似的資料，也有許多老師、教授們提出，但本次我們研究的最終目的，便是找到其不同的方法來拼貼或者幾何圖形中的特定規律(方法)，來使我們能將任意多邊形把它移形換位變出一個正方形。思路:多邊形—三角形—矩形—正方形。

壹、研究動機

幾何圖形多變有趣，往往把不可能的事變為可能，在一次聽老師講數學課時，聽到老師說起幾何，原本以為我會左耳進右耳出，沒想到我越聽越起勁，一回到家馬上上網 GOOGLE 查了一下，發現原來幾何的東西那麼好玩，其中最令我感興趣的，不是拿著紙筆算勾股定理等數學公式，也不是拿著三角板、量角器等工具來算角度，而是利用基本幾何的概念將一個圖形變成另一個圖形。

貳、研究目的

一、是否能將三角形裁剪後，轉拼成正方形。

二、否能將任意長方形裁剪後，轉拼成正方形。

三、否能將任意多邊形裁剪後，轉拼成正方形。

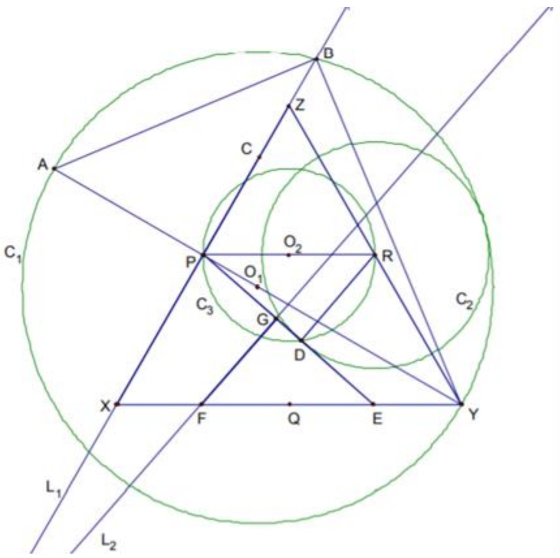
參、研究的設備及器材

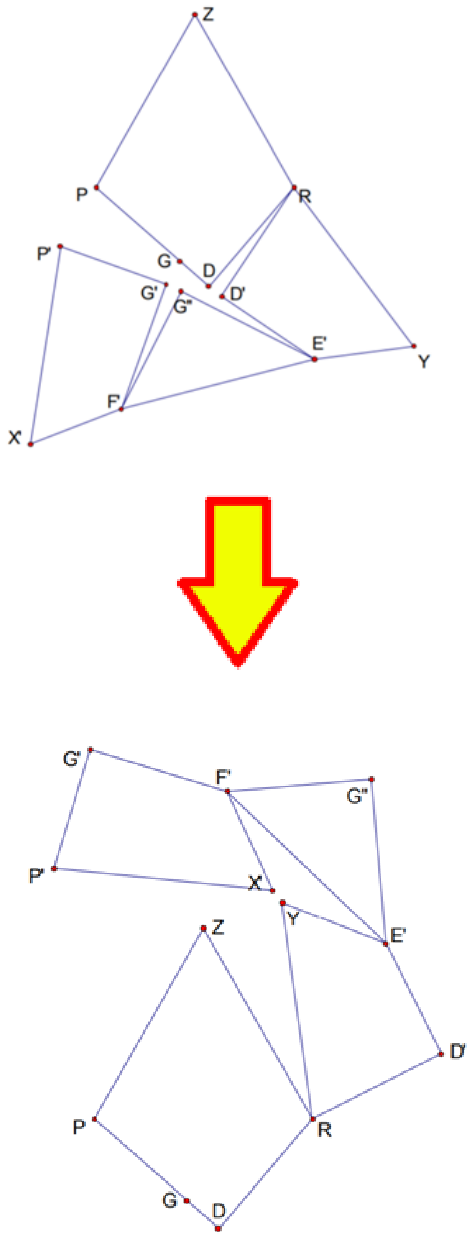
直尺、圓規、三角板、PP 塑膠瓦楞板、筆、電腦、Microsoft Word、Google、色紙、膠水、相機、剪刀

肆、研究過程或方法

一、正三角形變正方形

1. 如圖，作一正三角形 XYZ，並作其各邊中點 P、Q 及 R。
2. 在 YP 延長線上取一點 A，使得$\overline{PA}=\overline{PZ}$。
3. 以$\overline{AY}$為直徑作圓 C_1，交 AZ 延長線於 B。
4. 以 R 為圓心，$\frac{1}{2}\overline{PB}$長為半徑作圓 C2。
5. 過 P 點作圓 C2 的切線交$\overline{XY}$邊於 E，切點為 D。
6. 在$\overline{QX}$線段上取一點 F，使得$\overline{QF}=\overline{YE}$。
7. 過 F 點作$\overline{PE}$的垂直線，垂足為 G。
8. 四邊形 ZPDR、XFGP、YRDE 及三角形 GEF 即為所求。





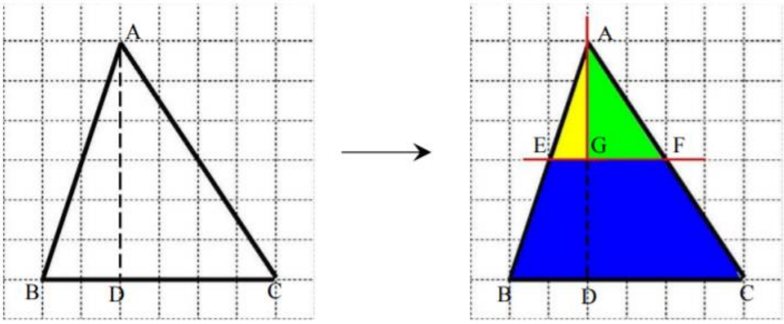
二、任意三角形變長方形

(一)從「高的一半」著手:

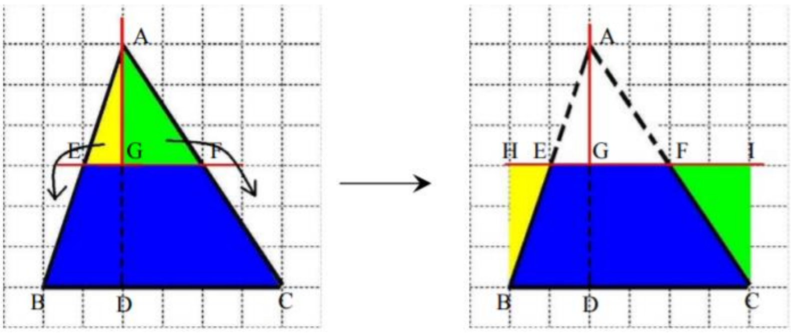
1.銳角三角形

(1)切割方式

①先從高$\overline{AD}$切一半(邊$\overline{EF}$),再從上頂點往下切(邊$\overline{AG}$),就形成△AEG、△AFG。



②把△AEG 旋轉到△BEH 的位置,再把△AFG 旋轉到△CFI 的位置。



③我們把這種切割方式稱為「倒丁」切法。

(2)證明

①∠AGE=∠BHE= 90 度

②因為∠AEG+∠GEB=180 度,且∠BEH+∠GEB=180 度,

所以∠AEG=180 度-∠GEB=∠BEH ,即∠AEG=∠BEH

③因為三角形內角和是 180 度,再加上已有 2 個內角一樣大了

所以第三個內角也會一樣大,即∠EAG=∠EBH

④邊$\overline{BH}$=邊$\overline{AG}$=高$\overline{AD}$的一半

⑤所以△AEG 面積=△BEH 面積

⑥利用同樣的方式也可以證明△AFG 等於△CFI。

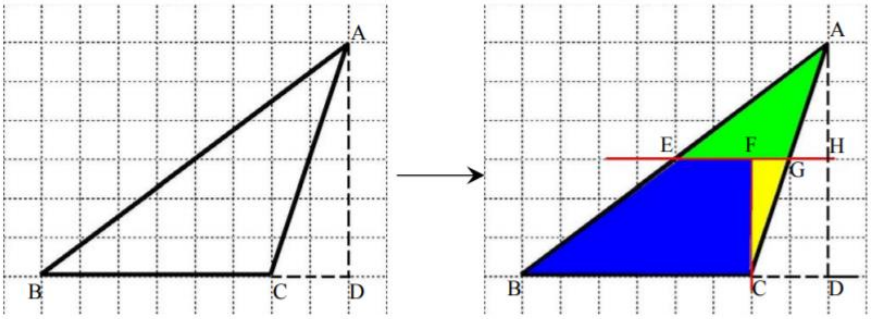
2.鈍角三角形

鈍角三角形的切割方式跟銳角三角形的切割方式很像，但有 2 種情況。

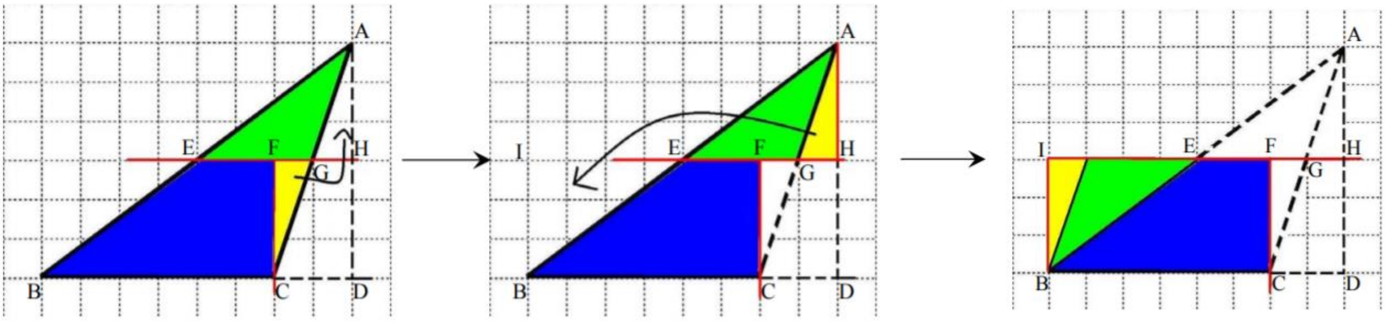
第一種情況

（1）切割方式

①先從高$\overline{AD}$切一半（邊$\overline{EH}$），然後從右頂點往上切（邊$\overline{CF}$）。



②把△GFC 旋轉到△GHA 的位置，再把△AEH 拿到△BEI 的位置。



③我們把這種切割方式稱為「正丁」切法。

（2）證明

①∠AHG＝∠CFG＝ 90 度

②因為∠AGH＋∠HGC＝180 度，∠CGF＋∠HGC＝180 度，

所以∠AGH＝180 度－∠HGC＝∠CGF 即∠AGH＝∠CGF

③因為三角形內角和是 180 度，再加上已有 2 個內角一樣大了，

所以第三個內角也會一樣大，即∠HAG＝∠FCG

④邊$\overline{AH}$＝邊$\overline{HD}$＝邊$\overline{FC}$＝高$\overline{AD}$的一半

⑤所以△AHG 會等於△CFG。

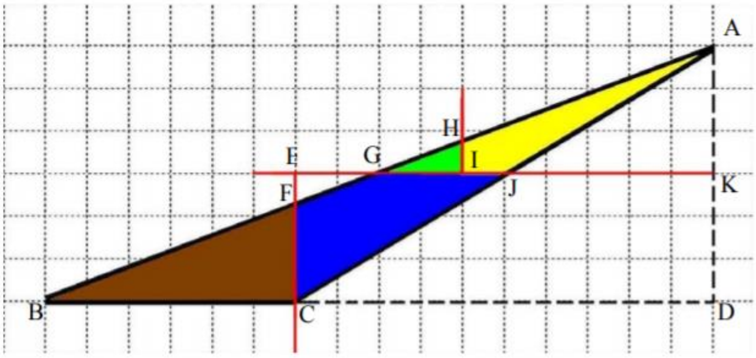
⑥利用同樣的方式也可以證明△AEH 等於△BEI。

第二種情況

（1）　切割方式

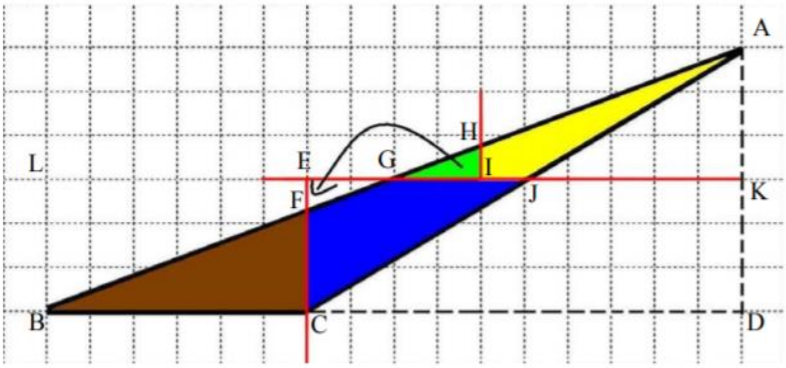
①先從高$\overline{AD}$切一半（邊$\overline{EK}$），再從右頂點往上切（邊$\overline{CE}$）。取邊$\overline{GI}$和邊$\overline{EG}$一樣長，

再從邊$\overline{GI}$的 I 點往上切（邊$\overline{IH}$），就形成△GIH。

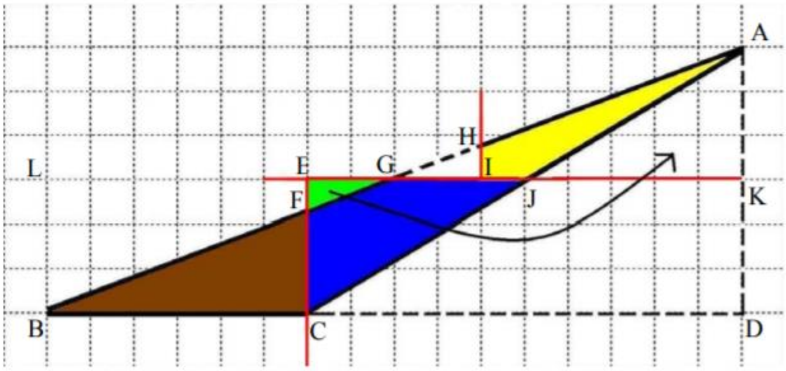


②把△GIH 拿到△GEF 的位置，再把△CEJ 旋轉到△AKJ 的位置，再把△GAK 旋轉到

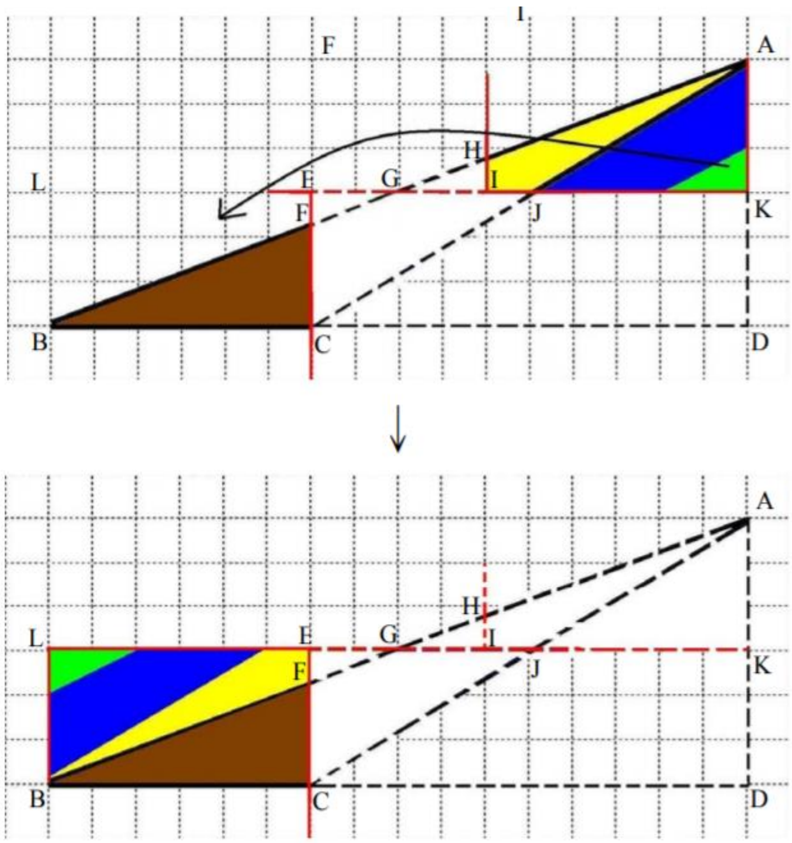
△GBL 的位置。



↓



↓



③我們把這種切割方式稱為「上下丁」切法。

(2) 證明

①∠GEF＝∠GIH＝90 度

②因為∠EGF＋∠EGH＝180 度，∠IGH＋∠EGH＝180 度，

所以∠EGF＝180 度－∠EGH＝∠IGH，即∠EGF＝∠IGH

③因為三角形內角和是 180 度，再加上已有 2 個內角一樣大了，

所以第三個內角也會一樣大，即∠GFE＝∠GHI

④我們在切△ABC 時，是照著邊$\overline{EG}$有多長，我們就切多長，所以邊$\overline{GI}$＝邊$\overline{EG}$

⑤所以△IGH 會等於△EGF。

⑥∠AKJ＝∠CEJ＝90 度

⑦∠AJK＝∠CJE（因為∠AJK＋∠AJG＝180 度，∠CJE＋∠AJG＝180 度，∠AJK 和∠CJE 都是 180 度－∠AJG）。

⑧∠KAJ＝∠ECJ（因為△KAJ 和△ECJ 內角和是 180 度，有 2 個內角一樣大了，所以第三個內角也會一樣大）。

⑨邊$\overline{AK}$＝邊$\overline{EC}$（都是高$\overline{AD}$的一半）。

⑩所以△KAJ 會等於△ECJ。

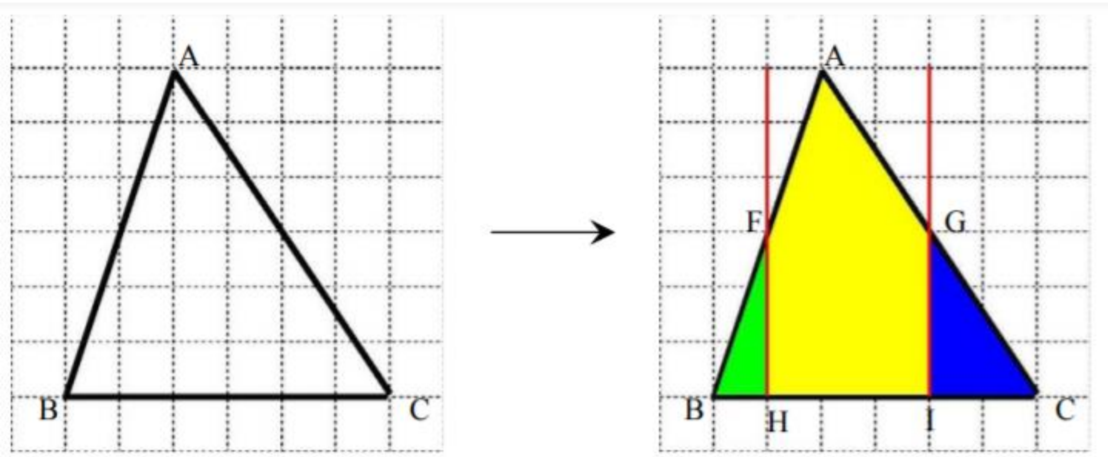
⑪利用同樣的方式也可以證明△BLG 等於△AKG。

（二）從「底的一半」著手

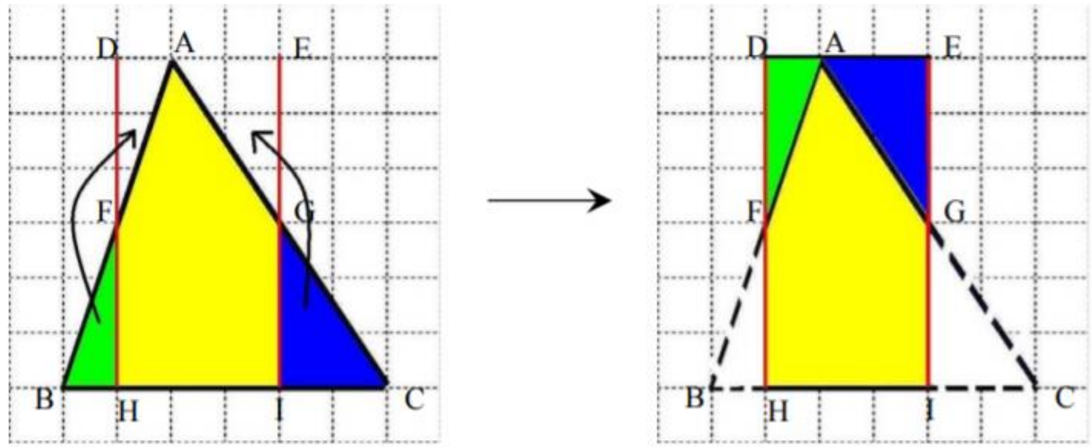
1.銳角三角形

（1）切割方式

①從上頂點到左頂點水平距離的一半切一刀（邊$\overline{FH}$），從上頂點到右頂點水平距離的一半也切一刀（邊 $\overline{GI}$）。



②把△ADF 旋轉到△BHF 的地方，把△AGE 旋轉到△CGI 的地方。



③我們把這種切割方式稱為「11」切法。

（2）證明

①∠ADF＝∠FHB（都是 90 度）。

②∠AFD＝∠BFH（因為∠AFD＋∠AFH＝180 度，∠BFH＋∠AFH=180 度，AFD 和 BFH 都是

180 度－∠AFH）。

③∠FBH＝∠DAF（因為三角形內角和是 180 度，有 2 個內角一樣大了，所以第三個內角也會一樣大）。

④邊$\overline{AD}$＝邊$\overline{BH}$（因為都是上頂點到左頂點水平距離的一半）

⑤所以△AFD＝△BFH。

⑥用相同的方法也可以用來證明△AEG 會等於△CIG。

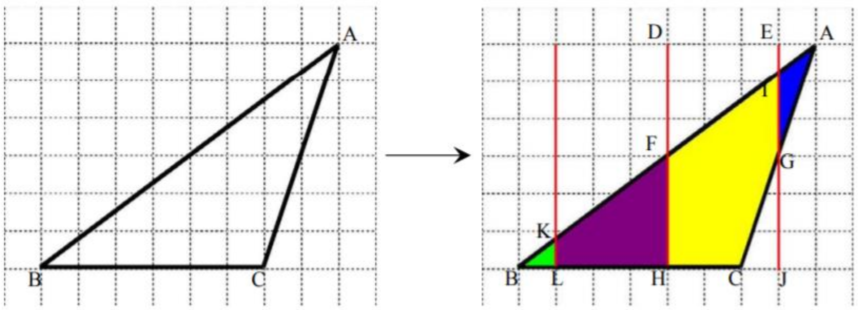
2.鈍角三角形

鈍角三角形的切割方式跟銳角三角形的切割方式很像，但有 2 種情況。

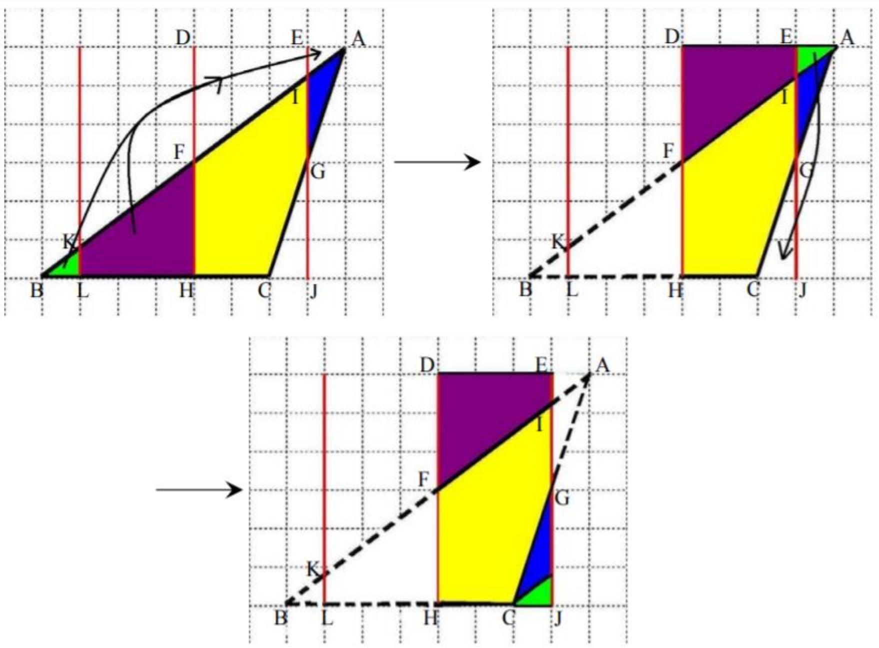
第一種情況

（1）切割方式

①從上頂點到左頂點水平距離的一半切一刀（邊$\overline{DH}$），從上頂點到右頂點水平距離的一半也切一刀（邊$\overline{EJ}$）。取邊$\overline{BL}$和邊$\overline{CJ}$一樣長，再從邊$\overline{BL}$的 L 點往上切（邊$\overline{LK}$）。



②把△BFH 拿到△AFD 的位置，再把△AEG 拿到△CJG 的空位。



③我們把這種切割方式稱為「111」切法。

（2）證明

①∠ADF＝∠BHF（都是 90 度）。

②∠AFD＝∠BFH（因為∠AFD＋∠DFB＝180 度，∠BFH＋∠DFB=180，∠AFD 和∠BFH 都是 180 度－∠DFB）。

③∠DAF＝∠HBF（因為三角形內角和是 180 度，有 2 個內角一樣大了，所以第三個內角會一樣大）。

④邊$\overline{AD}$＝邊$\overline{BH}$（因為都是上頂點到左頂點水平距離的一半）

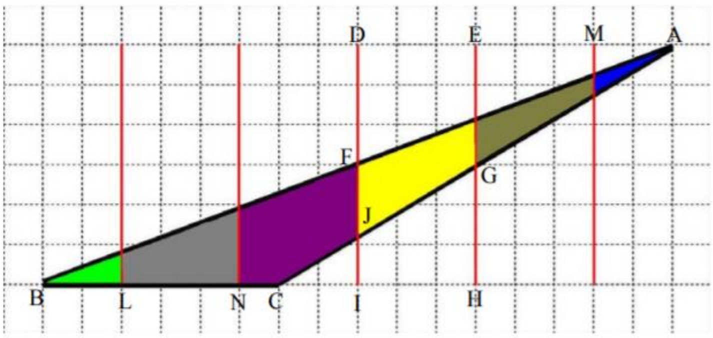
⑤所以△DAF＝△HBF。

⑥用一樣的方法也可以用來證明△AEG 和△CJG 相等。

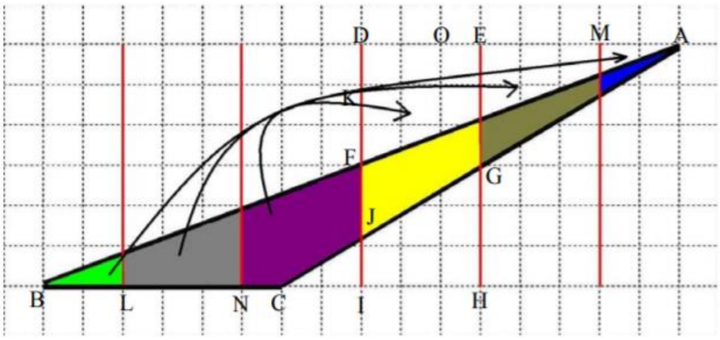
第二種情況

（1）切割方式

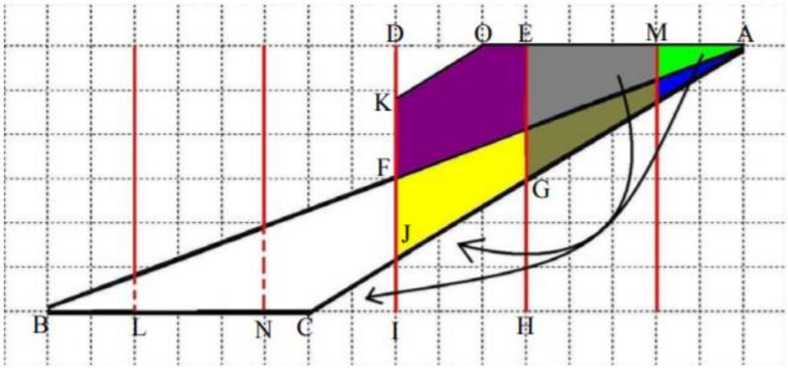
①從上頂點到左頂點水平距離的一半切一刀（邊$\overline{DI}$），從上頂點到右頂點水平距離的一半也切一刀（邊$\overline{EH}$)。取邊$\overline{BL}$、邊$\overline{AM}$和邊$\overline{CI}$一樣長，從邊$\overline{BL}$的 L 點往上切、邊$\overline{AM}$的 M 點往下切；再取邊$\overline{BN}$和邊$\overline{AE}$一樣長，從邊$\overline{BN}$的 N 點往上切。



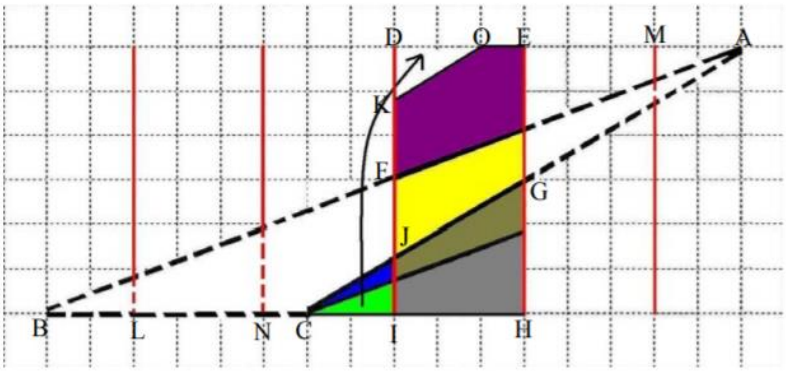
②把△BFI 旋轉到△AFD 的位置，把△AEG 旋轉到△CHG 的空位，再把△BFI 旋轉一次到△AFD 的空位，使△CIJ 填補到△ODK。



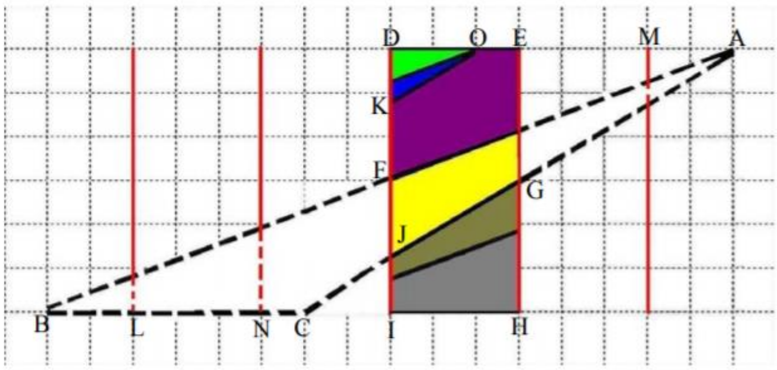
↓



↓



↓



③我們把這種切割方式稱為「11111」切法。

（2）證明

①∠BIF＝∠ADF（都是 90 度）。

②∠BFI＝∠AFD（∠BFI＋∠AFI＝180 度，∠AFD＋∠AFI＝180 度，∠BFI 和∠AFD 都是 180 度－∠AFI）。

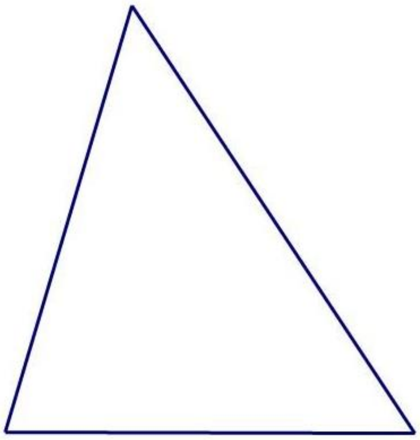
③∠FBI＝∠FAD（每個三角形的內角和都是 180 度，扣掉∠BIF（∠ADF）、∠BFI(∠AFD），就會是∠FBI（∠FAD）。

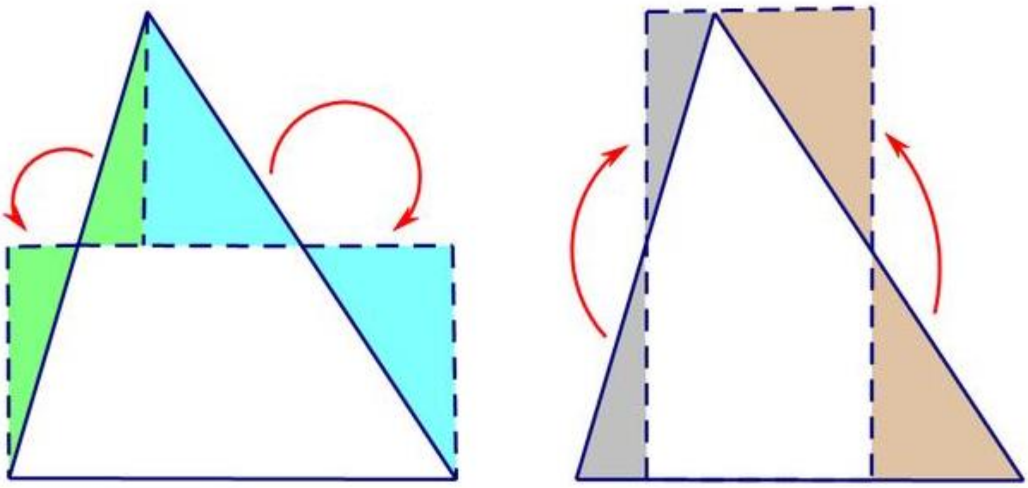
④邊$\overline{BI}$＝邊$\overline{AD}$（因為都是上頂點到左頂點的水平距離的一半）。

⑤所以△BFI 和△AFD 相等。

⑥用一樣的方法也可以用來證明△AEG 和△CHG 相等。

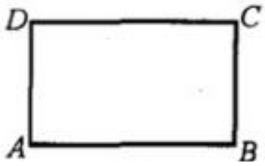
經由上面的規則均可以將任意三角形拼成長方形，本研究是用以下列方法將三角型剪開拼成長方形。如下圖，任意一個三角形都可以剪開再拼成一個矩形





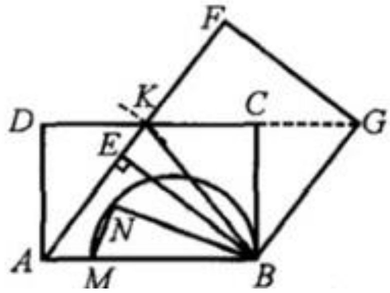
(1) (2)

三、長方形變正方形



1、設一長方形長為 5、寬為 3(如圖) 可由以下方法拼成正方形

方法一：如圖，



①以$\overline{BM}$=4 為直徑作半圓，在半圓上取一點 N，

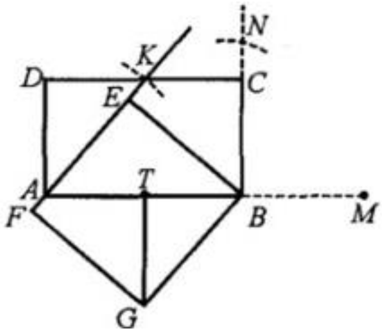
使$\overline{MN}$=1，連接$\overline{BN}$，由勾股定理得$\overline{BN}=\sqrt{15}$。

②以 A 為圓心，$\overline{BN}$長為半徑畫弧，交$\overline{CD}$於 K 點，連接$\overline{AK}$。

③過 B 點作$\overline{BE}$垂直$\overline{AK}$，垂足為 E。

④平移△ABE 至△KGF，平移△ADK 至△BCG，得到四邊形 BEFG 即為正方形。

方法二：如圖，



①延長$\overline{AB}$至 M，使$\overline{BM}=\overline{BC}$。

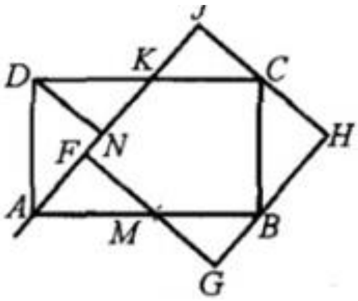
②以 M 為圓心作半圓，交$\overline{BC}$的延長線於 N 點。

③以 A 為圓心，$\overline{BN}$長為半徑畫弧，交$\overline{CD}$於 K 點，連接$\overline{AK}$。

④過 B 點作$\overline{BE}$垂直$\overline{AK}$，垂足為 E。

⑤平移△ADK 至△GTB，四邊形 BCKE 至 GTAF，得到四邊形 BEFG 即為正方形。

方法三：如圖，



①作出$\overline{AK}=\sqrt{15}$。

②過點 D 作$\overline{DN}$垂直$\overline{AK}$，垂足為 N。

③以 B 為圓心，$\overline{DK}$長為半徑畫弧交$\overline{AB}$於 M。

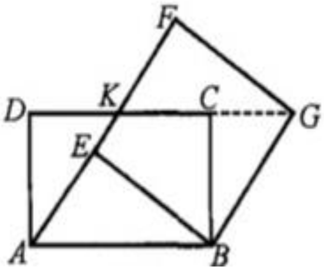
④過點 M 作$\overline{MF}$垂直$\overline{AK}$，垂足為 F。

⑤平移△AND 至△BCH，△DNK 至△MGB，△AMF 至△KCJ，

得到四邊形 HJFG 即為正方形。

2、任意長方形:

同方法一的思考方式

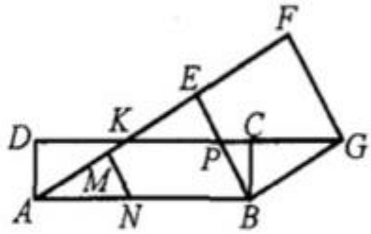


(1)如圖，當$\overline{AE}\leq\overline{AK}$時，點 E 再線段$\overline{AK}$上(與 A 點不重合)，

滿足$\sqrt{b^2}$−ab≤$\sqrt{ab}$時，推得 a<b≤2a，

只需要兩條裁剪線，同方法 1 剪拼成正方形。

(2)如圖 6，$\overline{EK}\le\overline{AK}$時，



點 E 在 AK(與 K 不重合)的延長線上，$\overline{EK}=\overline{AE}-\overline{AK}$，

所以$\sqrt{b^2-ab}-\sqrt{ab}\le\sqrt{ab}$推得 $2a<b\le5a$，

在$\overline{AK}$上截取$\overline{AM}=\overline{EK}$，過 M 做$\overline{MN}$垂直$\overline{AK}$交$\overline{AB}$於 N，

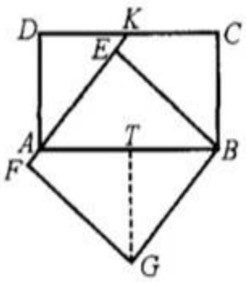
設$\overline{BE}$交$\overline{CD}$於 P，先將△AMN 平移至△KEP，

再將四邊形 MNBE 平移至四邊形 EPGF，則四邊形 BGFE 為所求，

△ADK 平移至△BCG，共要用三條裁剪線剪拼成正方形。

(3)當 b＞5a 時，需進行轉化，方法是經常邊的 n 等分各點，作與寬邊平行的 n-1 條剪切線，在拼成長為$\frac{b}{n}$，寬為$\overline{an}$的新矩形，將新矩形化為(1)、(2)情形之一，繼續拼剪。

同方法二的思考方式

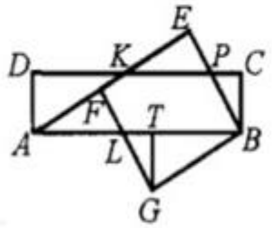


(1)如圖，當$\overline{AE}\le\overline{AK}$時，點 F 在線段$\overline{KA}$延長線上，

滿足$\sqrt{b^2-ab}\le\sqrt{ab}$時，推得 $a<b\le2a$，同方法 2 兩條裁剪線，

就能將矩形拼成正方形。

(2)如圖，當$\overline{EK}\le\overline{AK}$時，



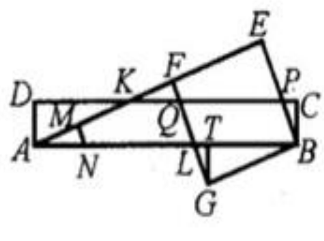
點 F 在線段$\overline{AK}$上，$\overline{EK}=\overline{AE}-\overline{EF}$，

所以$\sqrt{b^2-ab}-\sqrt{ab}\le\sqrt{ab}$推得 $2a<b\le5a$ 時，

設$\overline{GF}$交$\overline{AB}$於 L 將△AFL、△ADK、△BCP 分別平移到△KEP、△GTB、△GTL，

四邊形 BEFG 為所求，用 3 條裁剪線將矩形拼成正方形。

(1)如圖，當$\overline{FK}\le\overline{AK}$時，



點 F 在線段$\overline{AK}$上(與 K 不重合)，則$\overline{FK}=\overline{AE}-\overline{AK}-\overline{EF}\le\overline{AK}$，

所以$\sqrt{b^2-ab}-2\sqrt{ab}\le\sqrt{ab}$，推得 $5a<b\le10a$，在$\overline{AK}$上截取$\overline{AM}=\overline{FK}$，

過 F 作$\overline{FL}$垂直$\overline{AK}$交$\overline{AT}$於 L，設$\overline{BE}$交 CD 於 P，

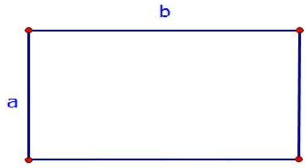
先將△AMN 平移至△KFQ，再將四邊形 MNLF 平移至四邊形 FQPE，

其餘部分案(2)的方式剪拼，四邊形 BGFE 即為所求，用四條裁剪線將矩形拼成正方形。

(2)當 b＞10a 時，方法是常邊的 n 等分各點，作與各寬邊平行的 n-1 條剪切線，

在拼成長為$\frac{b}{n}$，寬為$\overline{an}$的新矩形，將新矩形化為(1)、(2)、(3)情形之一，繼續拼剪。

而我們將任意一個矩形剪開都可以再拼成一個正方形



根據:S 正=S 長=$\overline{ab}$

以(a+b)為直徑作圓

$\overline{AC}$=a，$\overline{BC}$=b

過 C 作垂線與圓交於 D

證明：

$\overline{BD^2}$=b（a+b）=ab+b^2

$\overline{AD^2}$=a（a+b）=a^2+ab

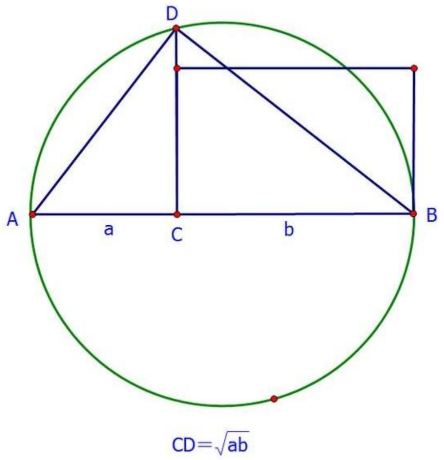
$\overline{BD}$=$\sqrt{ab+b^2}$ =$\sqrt{b(a+b)}$

$\overline{AD}$=$\sqrt{a(a+b)}$

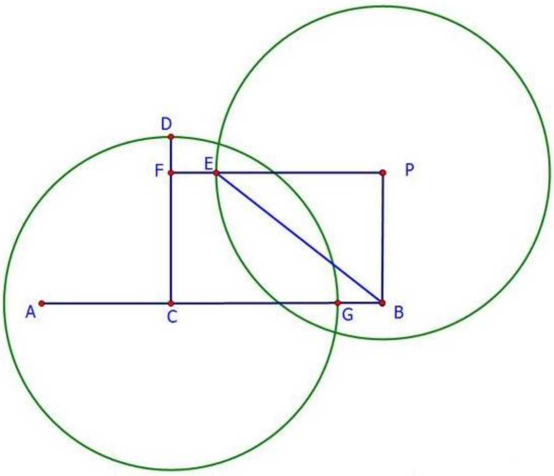
CD=$\frac{\sqrt{b(a+b)\times a(a+b)}}{a+b}$

=$\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{a+b}$

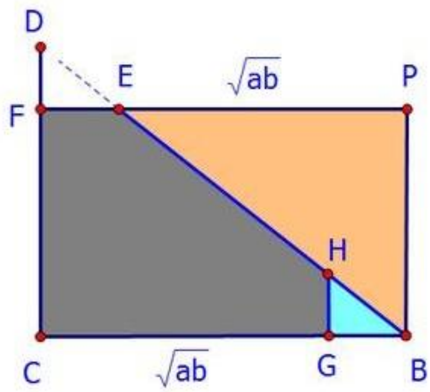
=$\sqrt{ab}$

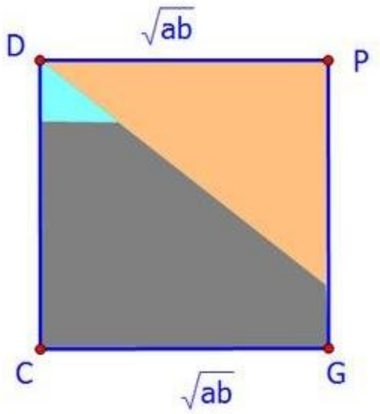


如下圖，以 C 為圓心，$\overline{CD}$長為半徑作圓，交矩形一邊於點 E，作$\overline{BN}$垂直$\overline{CE}$剪開後拼合得正方形，面積為$\overline{ab}$。也可以按如下方式將矩形剪開後得正方形，如圖：以$\overline{CD}$長為半徑，分別作圓 C、圓 P 與矩形交於點 G、E。

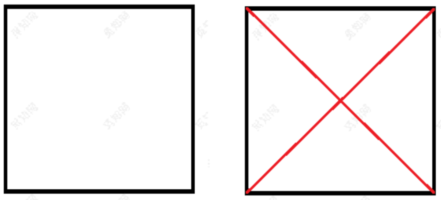


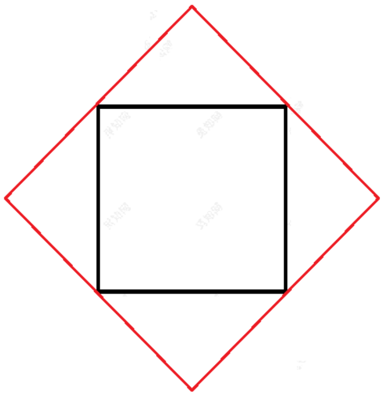
$\overline{GH}$垂直$\overline{BC}$



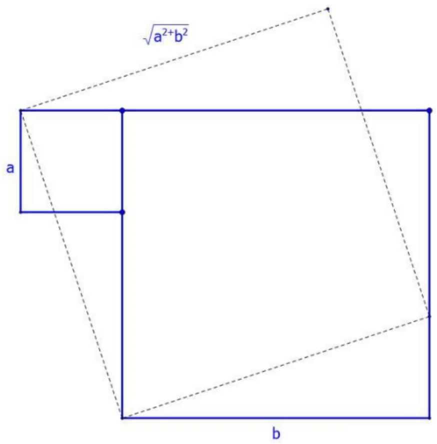


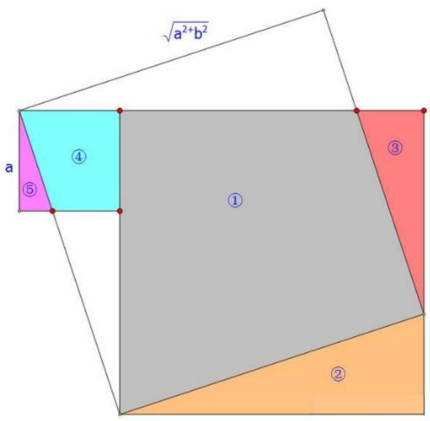
而任意兩個正方形可以剪開再拼成一個更大的正方形，我們先嘗試以兩塊相同的正方形，拼成一塊更大的正方形。

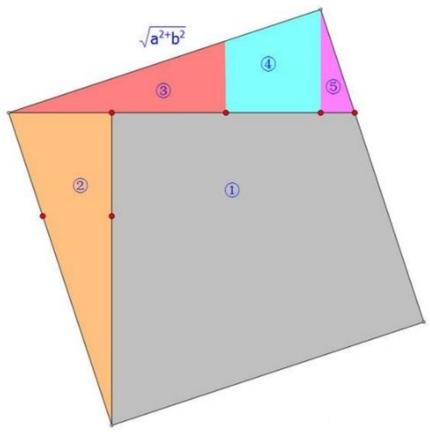




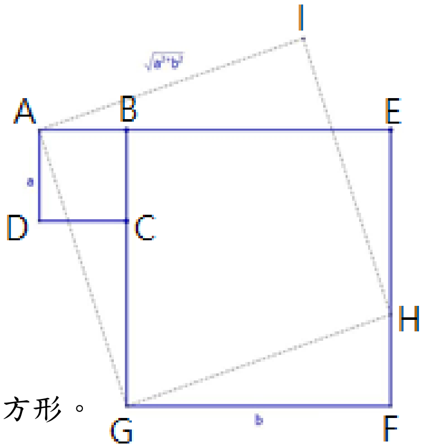
接著，我們再嘗試以一大一小的正方形







證明：



如圖，小正方形的邊長為 a，大正方形的邊長為 b

，所以由畢氏定理可知$\overline{AG} = \sqrt{a^2 + b^2}$，

在$\overline{EF}$上取$\overline{FH}$=a，可證明ΔABG ≅ ΔHFG(SAS)，

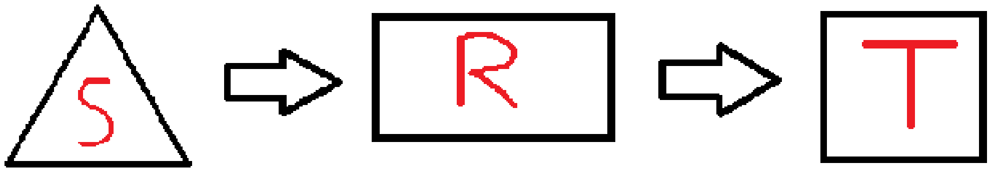
所以∠AGH= 90°，進而可做出正方形 AGHI。

透過上述的方法，我們就可以將任意兩正方形拼成一塊大正方形。

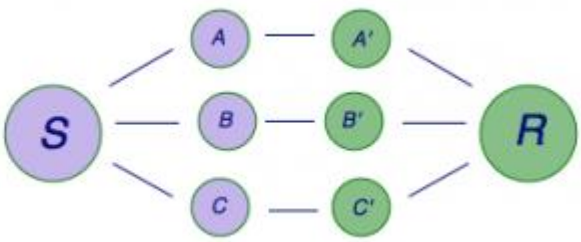
因此，按照這樣的思路，任意兩個面積相等的多邊形，剪成許多三角形以後，通過以上一系列的步驟，可以拼成相同面積的正方形。具記載這個問題提出有上千年的歷史了，而大約 200 年前，才將其解決。

如果多邊形 S 和 T 的面積相等，那麼可以將三角形 S 剪成有限個多邊形，然後重新拼接成正方形 T。

這個看起來難以入手的問題其實並不難，首先，這是一個一般的問題，並且剪拼操作是可逆的（所謂可逆，就是如果可以由 A 得到 B，就可以反向由 B 還原出 A），因此我們考慮尋找一個特殊的中間狀態 R，將問題轉化為一般到特殊的問題：

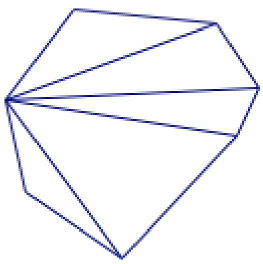


接下來，我們思考如何選擇合適的 R，剪拼的過程如圖所示：



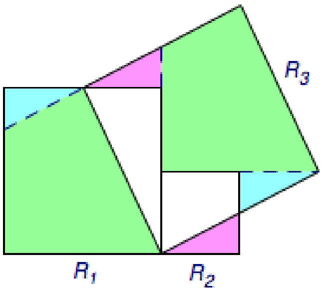
為了使得問題變得簡單，由 S 剪成的「剪裁組」A、B、C，以及最後對於 R 的拼接用到的「拼接組」A’、B’、C’，這兩組圖形應該選擇同一類型多邊形，此時我們的問題變成了三個小問題：

1. 如何將 S 劃分成同一種多邊形 A？
2. 如何將一系列同類型的多邊形 A’、B’、C’合併成一個多邊形 R？
3. 如何將多邊形 A 剪拼成另外一種多邊形 A’？（即使 A 和 A’是同一類型的多邊形，也需要考慮如何剪拼）



對於問題 1，很明顯選擇將任意多邊形劃分成若干個小三角形是很容易的。對於問題 2，必須結合問題 3 一起考慮，因為多邊形 A’的選擇必須起到「承前啟後」的作用，問題 2 的本質為「可由三角形剪拼」，問題 3 的本質為「可以合併」，很明顯，問題 3 更具有挑戰性。

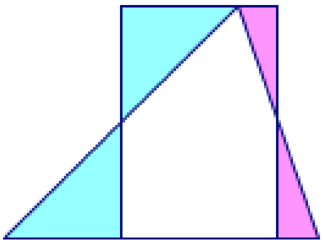
事實上，如果我們思考形如「f(a)+f(b)=f(c)」的問題時，勾股定理 a2+b2=c2 一定不能被忽視，考慮到我們可以將 A’和 R 定為正方形了。

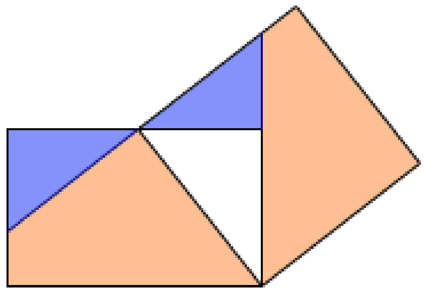


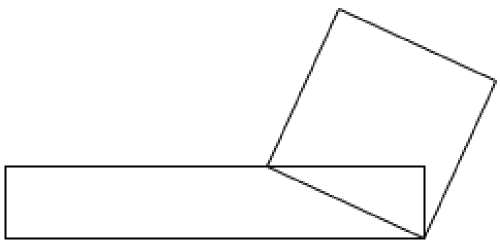
　　現在重新審視一下問題，原來的問題被簡化為了問題 2：「任何一個三角形可以剪拼成正方形」，勝利就在眼前了！

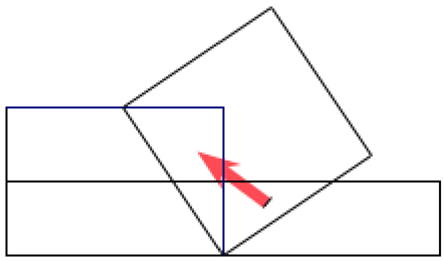
三角形剪拼成最接近正方形的多邊形—矩形是容易的：

　　因此問題又一次的簡化為了「任何一個矩形可以剪拼成正方形」．關於這個問題，我們熟知一個「不完美」的結論（下右圖說明了這個結論為什麼不完美），任意一個長寬比不大於 2 的矩形都可以剪拼成一個正方形：



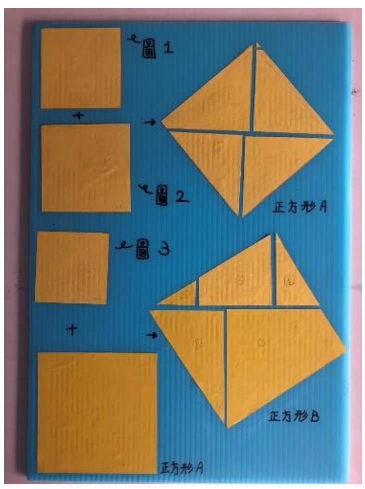




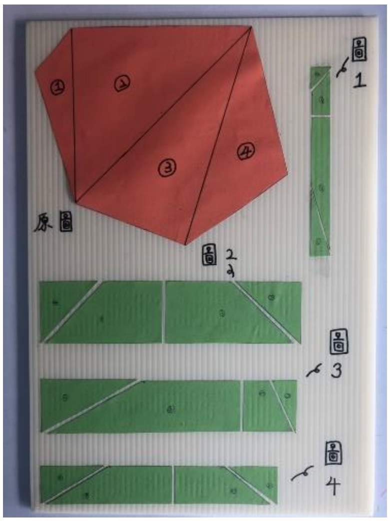


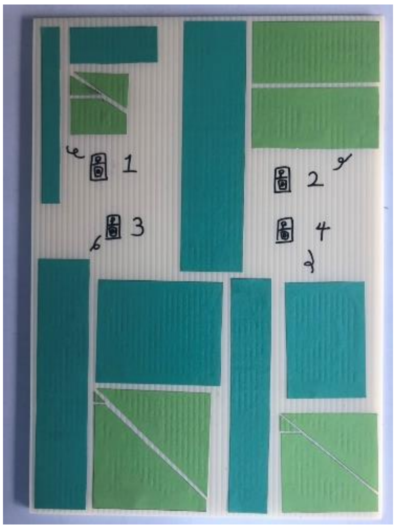
四、接下來我們就結合、利用上述的方法，分別將五邊形、六邊形、七邊形、八邊形裁切轉拼成正方形

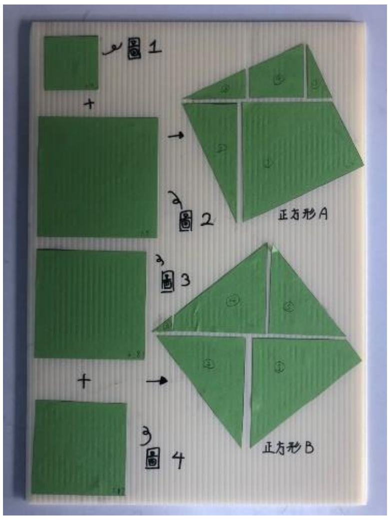
1. 五邊形裁切轉拼成正方形

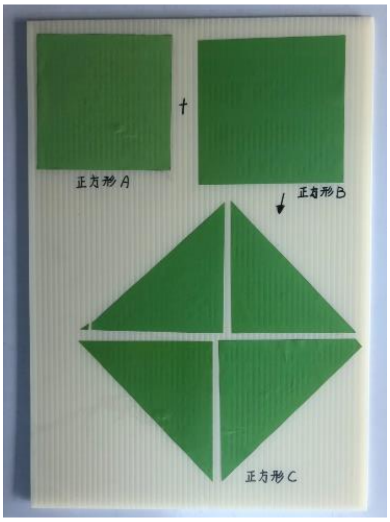


2. 六邊形裁切轉拼成正方形

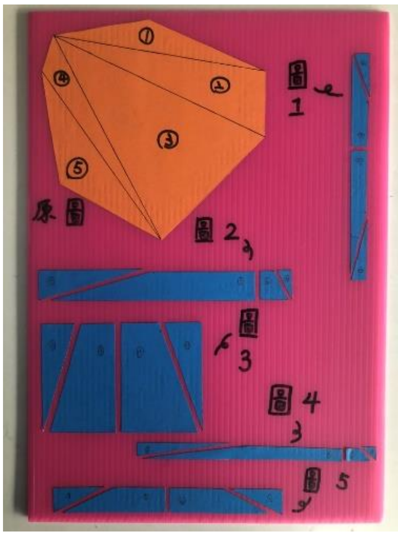


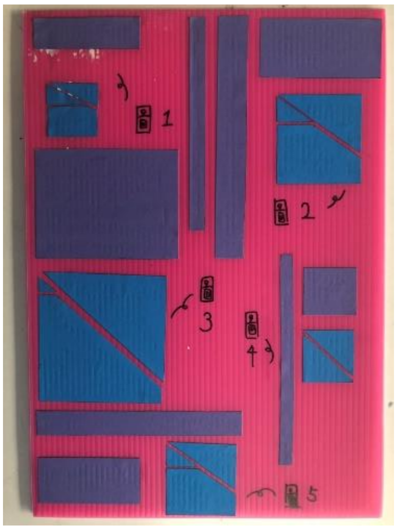


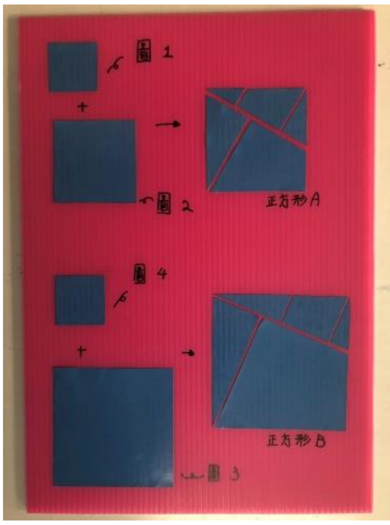


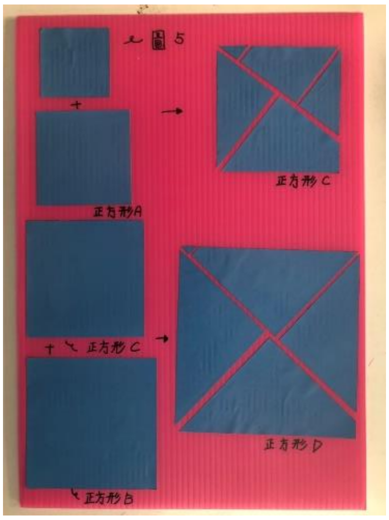


3. 七邊形裁切轉拼成正方形

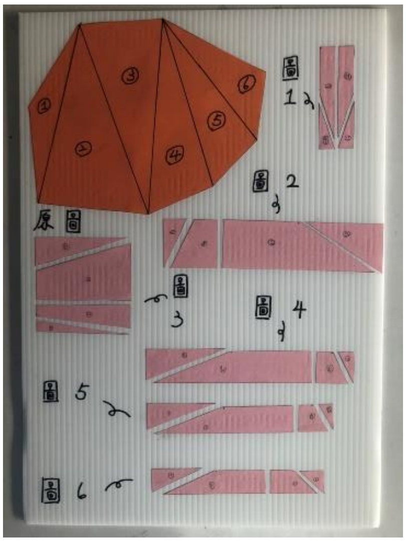


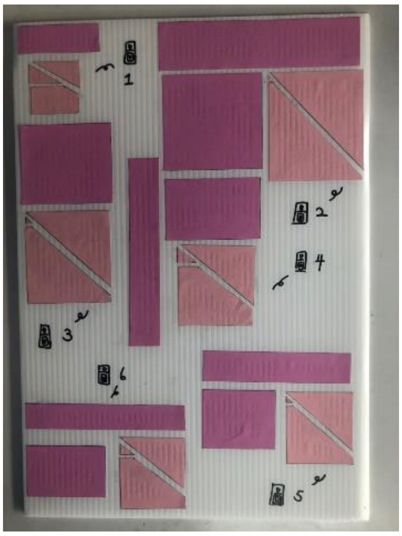


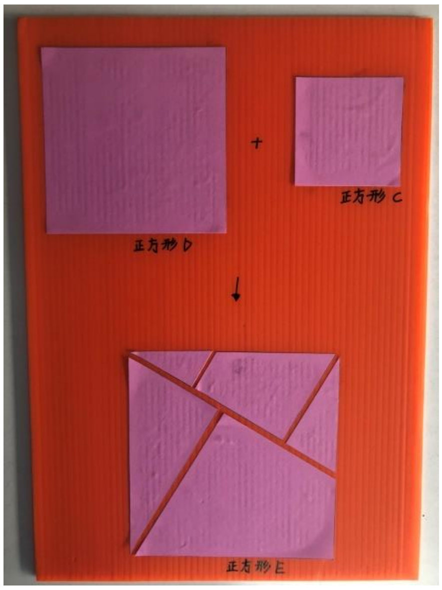


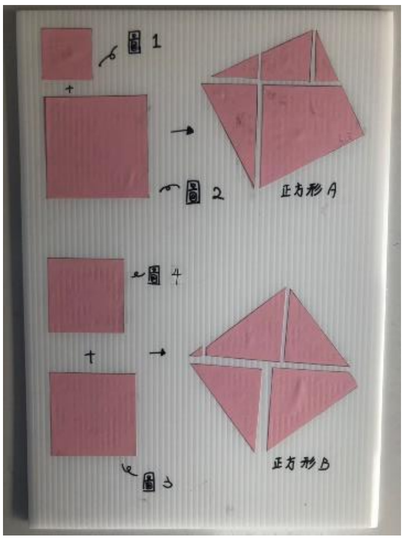


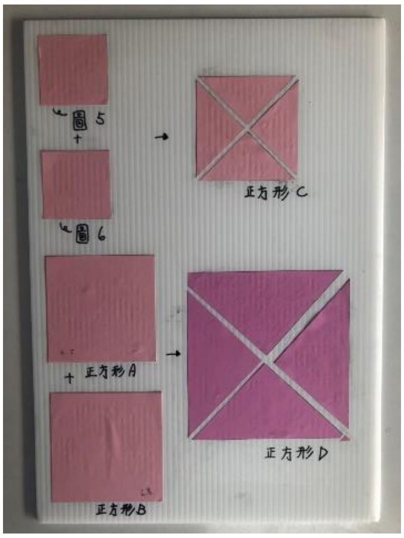
4. 八邊形裁切轉拼成正方形











伍、研究結果

到這裡，我們的證明就結束了，總結一下：

（一）任意一個多邊形都可以剪裁成有限個三角形。

（二）任意一個三角形都可以剪拼成一個矩形。

（三）任意一個矩形都可以剪拼成一個長寬比不大於 2 的矩形。

（四）任意一個長寬比不大於 2 的矩形都可以剪拼成一個正方形。

（五）有限個正方形可以剪拼成一個正方形。

（六）一個任意一個多邊形可以剪拼成正方形。

陸、討論

在我們操作這個研究當中，我們遇到了幾個問題。首先，在切割轉換圖形時，我們發現如果直接以任意多邊形所裁切的三角形，再轉拼成的長方形去做轉換時其圖形會變得碎小而不易拼貼，所以我們就改用先用色紙剪一個跟原本拼貼的長方形毫無別致的圖形來替代，解決了這個問題。

後來，我們又發覺如果使用原本的方法（任意多邊形→三角形→長方形→較小的正方形→大正方形）去操作的話，似乎有點太過繁雜，所以我們開始思考拼貼的過程是否可以精簡，於是上網查詢資料希望得到答案，不過可惜的是，網路上並沒有讓任意多邊形直接轉換成正方形的方法，不過有正多邊形不需經過繁多的過程間接拼成正方形的做法，我們也親自實驗證明這是可行的。

然而，在長方形轉拼成正方形的過程中，若長方形的長寬比過大時，照原本的方法會無法將其拼成正方形，經由討論後，我們決定先將長方形的長邊取中點對切後，拼成另一個新的長方形，再由此長方形用原本的方法裁切，發現這是可行的。

此外，當我們在操作最後一個步驟時，又發現了兩個相同的正方形轉拼成大正方形，無法使用我們慣用的方法去做轉拼，雖然前面資料有提供我們解決方法，但在我們討論後找到了另一種方法，就是將兩正方形依對角線去做裁切，在拼成正方形

柒、結論

本研究主要是以任意多邊形轉拼成正方形作探討，從一開始對幾何的好奇，逐漸激起想了解的熱忱，上網查資料發現許多從來沒思考過的假設，老師也建議我們去親自作證實，慢慢做起實驗、研究，以色紙為材料進行裁切，以網路上的方法為依據一步步操作，儘管遇到了問題老師也會在旁悉心指導，最後終於將三角形經由裁剪後，轉拼成正方形，也可以將任意長方形裁剪後，轉拼成正方形，甚至能將任意多邊形裁剪後，轉拼成正方形。

捌、參考資料及其他

https://kknews.cc/education/4nn3mvq.html

http://study.ck.tp.edu.tw

https://twsf.ntsec.gov.tw/