

# 屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：ROCK THE UR

關鍵詞：遊戲狀態、機率、正負評分法

編號：A1043

製作說明：

- 1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
- 2.編號：自報名系統報名完取得作品編號後，先填寫回作品封面上，再存成 docx 及 pdf 檔後再上傳。
- 3.封面編排由參展作者自行設計。

# ROCK THE UR

## 摘要

本研究在於探討 *The Royal Game of Ur* 擲骰和遊戲狀態，以自製工具和評估方法探究雙方在當前位置、競爭條件和權衡活路中，運用策略及評估策略效果，理解贏家如何在有限條件中爭取獲勝。

## 壹、研究動機

在一次偶然機會發現 *The Royal Game of Ur*，和同學們分享試玩之後，我們發現這個棋盤遊戲設計具有擲骰和搶地盤兩種元素，於是進一步研究規則改編的可能性和評估獲勝方法及特性。

## 貳、研究目的

- 一、瞭解皇家 *Ur* 棋擲骰機率。
- 二、特殊花格對遊戲獲勝的影響。
- 三、不同骰子數量與特殊花格的關係。
- 四、評估贏方獲勝可能性的方法。

## 參、研究設備與器材

- 一、數位紀錄、紙本紀錄、網路遊戲 Game Log。
- 二、自製棋盤與骰子。
- 三、利用 Python 3.9.0 自製骰子生成器。
- 四、Geogebra、文書處理軟體。

## 肆、名詞定義

- 一、rose point 表示特殊格增加的點數，是雙邊遊戲中單格競爭優勢。
- 二、advantage 表示每一格的優勢，以  $| \pm a |$  表示。

## 伍、研究過程及方法

### 一、The Royal Game of Ur

#### 【棋戲規則】

The Royal Game of Ur 中譯「皇家 Ur 棋」(以下簡稱「Ur 棋」)，別稱「二十格棋」(20 squares)，是西元前 2500 年源自於蘇美河流域的雙人對弈遊戲，本研究採用大英博物館考古發掘之古棋盤(Finkel, 2007)。遊戲設計有棋盤一只，黑白雙方各執 5 顆棋子，移動時依據骰子投擲結果決定棋子移動步數，骰子有 4 顆，本研究依據原始棋盤模型繪製如圖 1。

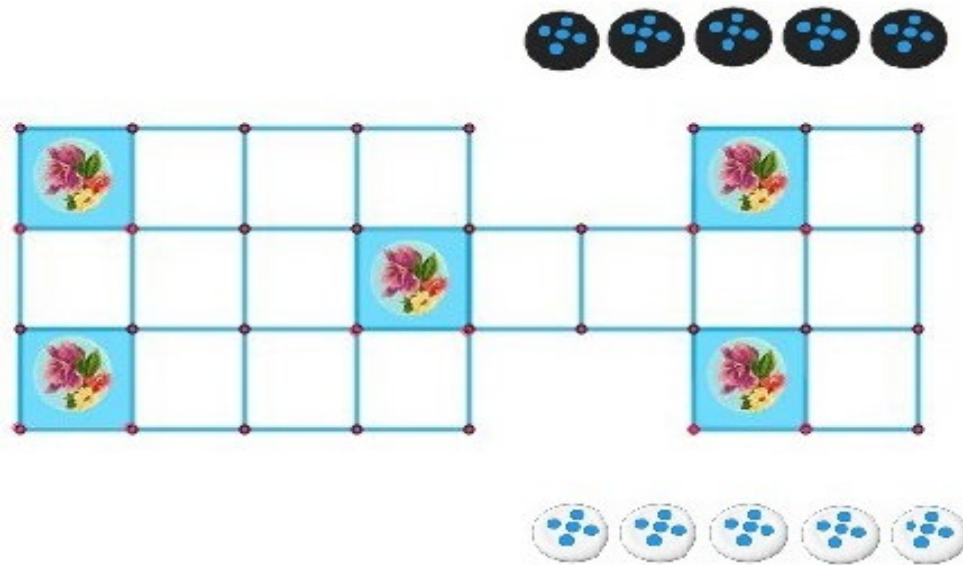


圖 1 皇家烏爾棋盤設計

#### 【Ur 棋部件】

1. 棋盤(board)：共分 A、B、C 三區。A 區是安全區，有 4 格；B 區是競逐區，有 8 格；C 區是安全區，有 2 格。每一個格子只能允許一個棋子停駐。
2. 骰子(tetrahedron dice)：正四面體骰子，四個頂點中有兩個標註顏色，兩個無顏色標註。黑點向上表示骰 1，白點向上表示骰 0，Ur 棋原始設計共使用 4 顆正四面體骰子。

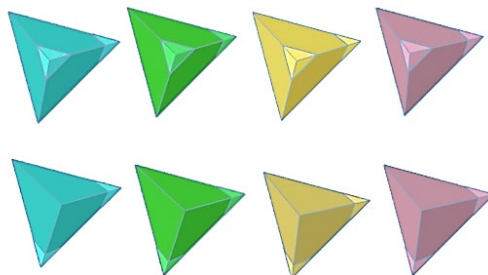
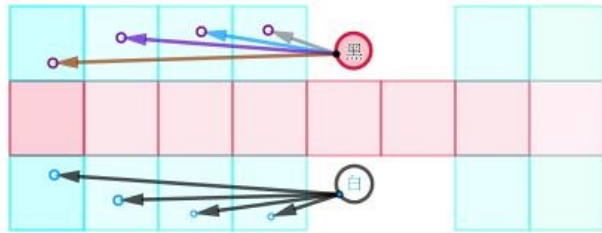


圖 2 正四面體骰子

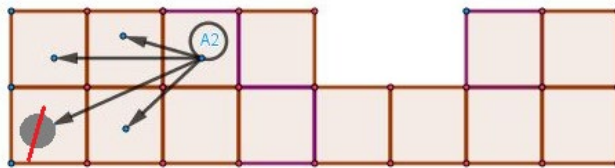
3. 玫瑰叢(Rosette)：分別為棋盤「A 區第 4 格」、「B 區第 4 格」和「C 區第 2 格」，進入這三格玫瑰叢表示玩家可再骰一次且對手不可將其驅趕。

**【遊戲規則】**

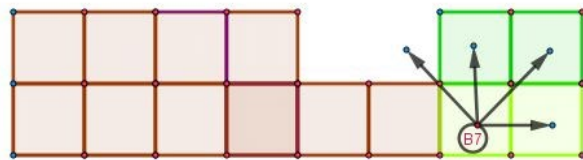
遊戲一開始雙方決定落子順序，依據擲骰結果 0、1、2、3、4 決定行進步數(圖 3)：



進入競逐區 B 開始競逐，後子可將先子驅趕，以下圖為例，黑方先移動到 B1。輪到白方，目前在 A2 位置，若「骰到 3」移動到 B1，則可以將黑子驅趕，黑子必須離開棋盤回到起點等待機會進入(圖 4)：



進入 C 區也是安全區，進入 C 區之後依骰子結果離開棋盤到達終點(圖 5)。



其中一方的 5 顆棋子若早於對手順利到達終點即為贏家，我們繪製原始行進路線分別將 A、B、C 區依序數字編碼如圖 6。

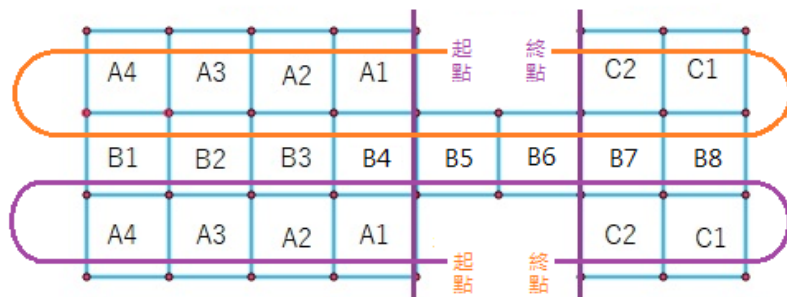


圖 6 雙方棋子行進路徑

## 二、相關文獻回顧與分析

(一) 歷屆科展關於雙人對弈遊戲作品極少，相關作品有全國中小學科學展覽會第 46 屆高中組作品「『矩』棋不定」和第 52 屆國中組「翻滾吧！黑白棋」。前者從  $n \times m$  棋盤中發現兩人博弈的必勝法則並發現特定 Ramsey 數模型關係。後者以勝利條件要求攻方將棋子變成白子，守方以旋轉棋盤因應，並研究雙方優勢及贏方必勝法則。

本研究與前兩者之差異在於探討雙方競逐中運用策略防禦、競爭，在棋子移動步數、移動次數、當前位置與競爭條件、玩家權衡活路、運用策略爭取獲勝機會的方法。

### (二) 研究方向

Ur 棋的變形版本相當多(Luce; Finkel, 2007; Michon, 2020)，有棋盤改變、改變棋子路徑、增加棋子數量等各種版本。本研究採用原始棋盤並進行以下探討：

- (1) 正四面體骰子機率的判斷與運用。
- (2) 玩家可利用玫瑰叢格前進、躲避，玩家利用擲骰結果進入玫瑰叢的策略為何。
- (3) 骰子數量與玫瑰叢密度及數量改變後對遊戲的影響。
- (4) 如何順利劃得最大區域獲得最多地盤，即玩家如何保留最多子並快速圈地離開競爭區到達終點。

### (三) 正四面體骰子機率的判斷與運用

一般使用骰子多為正六面體的六面骰，相關研究頗多。Ur 棋特別之處在於使用正四面體骰，骰子本身有 2 種符號意義，四個點頂分別標記 2 黑 2 白，若以 1 和 0 表示骰出結果之有無，投擲 4 顆骰子可能出現有 0、1、2、3 和 4 點。

表 1 擲 4 顆正四面體骰可能結果

| 擲骰結果 | 骰 0                      | 骰 1                      | 骰 2                      | 骰 3                      | 骰 4                      |
|------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 可能組合 | 0000                     | 1000                     | 1100                     | 1110                     | 1111                     |
|      |                          | 0100                     | 1010                     | 1101                     |                          |
|      |                          | 0001                     | 1001                     | 1011                     |                          |
|      |                          | 0010                     | 0011                     | 0111                     |                          |
|      |                          |                          | 0101                     |                          |                          |
|      |                          |                          | 0110                     |                          |                          |
| 機率   | $\frac{1}{16}$<br>6.25 % | $\frac{4}{16}$<br>25.0 % | $\frac{6}{16}$<br>37.5 % | $\frac{4}{16}$<br>25.0 % | $\frac{1}{16}$<br>6.25 % |

## 【發展工具】

根據以上分析，我們嘗試利用 Python 3.9.0 製作骰子生成器(附錄一)，作為行進步數的依據，進一步以此研究玫瑰叢對遊戲結果的影響。擲骰 1000 次，分為 8 組，逐一比較，以其中 G 組 120 次結果為例表列(表 2~表 3)如下：

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | 4 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 2 | 3 | 1 | 0 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| 4 | 4 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 0 | 4 |
| 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 0 | 4 | 0 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 0 |
| 4 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 4 | 3 | 1 | 3 | 3 | 4 | 3 | 3 | 0 | 3 | 4 | 2 | 0 |

| 10 Rounds |   |   |   |   |   |   |   |   |   | sum | 10 Rounds |   |   |   |   |   |   |   |   |   | sum |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| 2         | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 4 | 3 | 1 | 24  | 4         | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 3 | 2 | 18  |
| 3         | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 3 | 3 | 3 | 0 | 24  | 1         | 2 | 2 | 2 | 3 | 0 | 3 | 1 | 2 | 2 | 18  |
| 4         | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 | 16  | 4         | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 22  |
| 2         | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 3 | 0 | 15  | 3         | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 4 | 23  |
| 3         | 4 | 4 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 25  | 2         | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 0 | 2 | 18  |
| 2         | 4 | 3 | 3 | 1 | 0 | 2 | 3 | 2 | 3 | 23  | 0         | 0 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 0 | 15  |
| 4         | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 24  | 2         | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 21  |
| 2         | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 | 25  | 1         | 2 | 2 | 4 | 1 | 3 | 3 | 0 | 4 | 0 | 20  |
| sum       |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 176 | sum       |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 155 |

若棋盤無玫瑰叢格，先子後子雙方可移動格數計有 120 回合是規則奇偶序，實際使用回合數視玩家運用策略而定。

(四) 玫瑰叢功能：我們以木棒代替骰子試玩原版棋戲，也嘗試 S. Luce(2020) The Royal Game of Ur online 三種版本「人對人」、「人對 AI」、「AI 對 AI」，並試分析各版本 Log，發現只要進入玫瑰叢便可攻可守，因此玫瑰叢有活路、躲避、預備攻擊(警示)、驅趕對手等功能。

### (五) 第一種權重—特殊格權重

依據棋盤各區功能分析有預備位置與競爭優勢區域，期間又有些許差異，以每一格的重要性賦予不同值，再根據競爭優勢、趨近獲勝而給予區別權重，例如進入玫瑰叢加權，A 區 A4 可競爭亦可避險，權值給予 20、

B4 有避險、進新子給予 40、C2 已經在安全區域，不需要擔心被驅逐風險、接近達陣得分故給予 25(圖 7)。

|     |     |     |     |    |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| +20 | +10 | +10 | +10 |    |     | +25 | +25 |
| +5  | +6  | +7  | +40 | +9 | +10 | +11 | +12 |
| +20 | +10 | +10 | +10 |    |     | +25 | +25 |

然而我們認為 *Ur* 棋在行進間不僅要評估棋盤位置優勢或限制，雙方也以棋子能儘快離開 B 區進入 C 區達標，因此雙方如何手邊的 5 顆棋子也是關鍵，因此棋子也應該賦與權重(表 4)。

A 區● 各子出現次數

|     |    |
|-----|----|
| b1  | 4  |
| b2  | 4  |
| b3  | 11 |
| b4  | 3  |
| b5  | 4  |
| sum | 26 |

A 區○ 各子出現次數

|     |    |
|-----|----|
| w1  | 1  |
| w2  | 2  |
| w3  | 13 |
| w4  | 1  |
| w5  | 1  |
| sum | 18 |

B 區● 各子出現次數

|     |    |
|-----|----|
| b1  | 3  |
| b2  | 4  |
| b3  | 15 |
| b4  | 5  |
| b5  | 4  |
| sum | 31 |

B 區○ 各子出現次數

|     |    |
|-----|----|
| w1  | 4  |
| w2  | 2  |
| w3  | 14 |
| w4  | 4  |
| w5  | 4  |
| sum | 28 |

C 區● 各子出現次數

|     |    |
|-----|----|
| b1  | 2  |
| b2  | 2  |
| b3  | 2  |
| b4  | 2  |
| b5  | 4  |
| sum | 12 |

C 區○ 各子出現次數

|     |   |
|-----|---|
| w1  | 2 |
| w2  | 3 |
| w3  | 0 |
| w4  | 2 |
| w5  | 1 |
| sum | 8 |





Round 42~58

| ● A | ●*A | ● B | ●*B | ● C | ●*C | ● A | ●*A | ● B | ●*B | ● C | ●*C |    |    |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|
| 0   | 0   | 3   | 10  | 30  | 0   | 0   | 0   | 2   | 40  | 80  | 0   | 0  | 0  |
| 1   | 10  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 3   | 11  | 33  | 0   | 0  | 0  |
| 0   | 0   | 3   | 10  | 30  | 0   | 0   | 0   | 1   | 11  | 11  | 0   | 0  | 0  |
| 1   | 20  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 9   | 9   | 0   | 0  | 0  |
| 3   | 10  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 3   | 20  | 60  | 0   | 0  | 0  |
| 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 5   | 100 | 500 | 0   | 0   | 0   | 3   | 10 | 30 |
| 0   | 0   | 0   | 2   | 9   | 18  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 12 | 12 |
| 0   | 0   | 0   | 2   | 11  | 22  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 25 | 25 |

Round 59~74

| b1 b2 b3 b4 b5<br>5 4 3 2 1 |     |     |     |     |     | b1 b2 b3 b4 b5<br>5 4 3 2 1 |      |     |     |      |     |     |     |
|-----------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----------------------------|------|-----|-----|------|-----|-----|-----|
| ● A                         | ●*A | ● B | ●*B | ● C | ●*C | ● A                         | ●*A  | ● B | ●*B | ● C  | ●*C |     |     |
| 0                           | 0   | 3   | 11  | 33  | 0   | 0                           | 0    | 3   | 9   | 27   | 0   | 0   | 0   |
| 3                           | 10  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0                           | 0    | 3   | 11  | 33   | 0   | 0   | 0   |
| 3                           | 20  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0                           | 0    | 0   | 0   | 0    | 2   | 25  | 50  |
| 0                           | 0   | 3   | 10  | 30  | 0   | 0                           | 0    | 0   | 0   | 0    | 2   | 100 | 200 |
| 0                           | 0   | 3   | 9   | 27  | 0   | 0                           | 0    | 3   | 9   | 27   | 0   | 0   | 0   |
| 0                           | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 100                         | 100  | 0   | 0   | 0    | 3   | 11  | 33  |
| 0                           | 0   | 2   | 11  | 22  | 0   | 0                           | 0    | 0   | 0   | 0    | 3   | 25  | 75  |
| 3                           | 20  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0                           | 0    | 0   | 0   | 0    | 3   | 100 | 300 |
|                             |     |     |     |     |     | 1170                        | 1150 |     |     | 1875 |     |     |     |

【順向依序遞減】方第 1 顆棋子 b1 賦予權值 1、b2 權值 2、b3 權值 3...，計算每一步權值後加總。

【反向依序遞減】黑方第 1 顆棋子 b1 賦予權值 5、b2 權值 4、b3 權值 3...，計算每一步權值後加總，後分析贏方獲勝可能原因。

分別換算權值之後比較雙方總值可以判斷輸贏。以棋局編號 1120 黑子權重計算以第二種為反向依序遞減，白方值 4095 大於黑方值 3052，白方勝。

(六)第二種權重—正負評分法

我們參考極大極小值演算法，將第一種權重改良，改以正負值表示每一步當下雙方平衡狀態，例如落子序為黑先白後則以正值「+」表示黑方，負值「-」表示白方，分別將其在每一回落子所在位置註記，再分別以有避險條件之有無分析輸贏結果影響(圖 8)。

|                                |                                |                                |                                | Start                          | End                              |                                  |                                  |  |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--|
| +4<br>A <sub>4</sub>           | +3<br>A <sub>3</sub>           | +2<br>A <sub>2</sub>           | +1<br>A <sub>1</sub>           | 0                              | +15                              | +14<br>C <sub>1</sub>            | +13<br>C <sub>2</sub>            |  |
| (5-3) (-5+3)<br>B <sub>1</sub> | (6-3) (-6+3)<br>B <sub>2</sub> | (7-3) (-7+3)<br>B <sub>3</sub> | (8-3) (-8+3)<br>B <sub>4</sub> | (9-3) (-9+3)<br>B <sub>5</sub> | (10-3) (-10+3)<br>B <sub>6</sub> | (11-3) (-11+3)<br>B <sub>7</sub> | (12-3) (-12+3)<br>B <sub>8</sub> |  |
| -4<br>A <sub>4</sub>           | -3<br>A <sub>3</sub>           | -2<br>A <sub>2</sub>           | -1<br>A <sub>1</sub>           | 0                              | -15                              | -14<br>C <sub>1</sub>            | -13<br>C <sub>2</sub>            |  |

## 陸、研究討論與結果

### 一、擲骰工具分析

【分布】依投擲結果 0、1、2、3、4，分別出現 1、4、6、4、1 種組合方式，合計 16 種，我們進一步將 4 顆骰子可能結果和投擲 3 顆、5 顆骰子，與可能結果比較，公平骰子  $n$  顆骰子出現  $k$  點機率關係如下：

$n$  為骰子數  $k$  為骰出的點數

$$\text{出現 } k \text{ 點機率：} \frac{C_k^n}{2^n}$$

$$\text{例如 } \frac{C_3^4}{2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

【工具分析】我們以 Python3.9.0 製作骰子生成器並分別測試 4 顆骰子執行 1000 次與 10000 次結果，分析擲骰結果分布並與 Deutsch (2020) 研究結果比較以確認是否可行。

表 9 測試擲骰 10000 次結果與 Deutsch 研究比較

| 4 顆骰子點數總和  | 0    | 1     | 2     | 3     | 4    |
|------------|------|-------|-------|-------|------|
| 測試次數(次)    | 648  | 2494  | 3736  | 2504  | 618  |
| 本研究(%)     | 6.48 | 24.94 | 37.36 | 25.04 | 6.18 |
| Deutsch(%) | 6.25 | 25    | 37.5  | 25    | 6.25 |
| 差異(%)      | 0.23 | 0.06  | 0.14  | 0.04  | 0.07 |

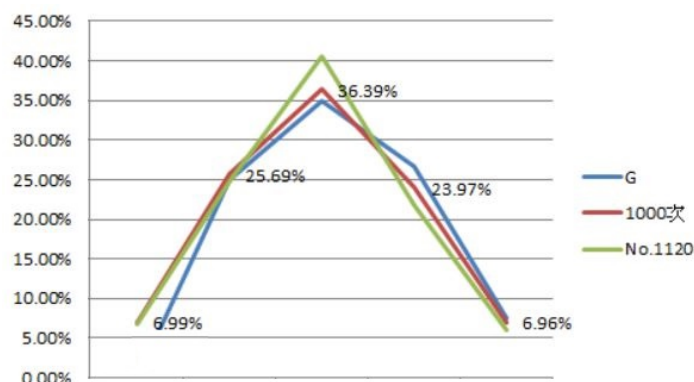
兩者比較後，發現各點數 分布差異皆小於 1%，於是我們捨網路版 Game log 改採自制隨機生成結果作為對奕工具。我們將 1000 次擲骰結果拆分為 8 組，作為研究約束雙方棋子單回合移動依據。

表 10 擲骰 1000 點數分布狀態

| 組別   | 次數   | 骰 0    | 1 點    | 2 點    | 3 點    | 4 點   |
|------|------|--------|--------|--------|--------|-------|
| A    | 120  | 7.00%  | 25.30% | 36.30% | 24.70% | 6.70% |
| B    | 120  | 7.50%  | 18.33% | 45.83% | 21.67% | 6.67% |
| C    | 120  | 6.67%  | 31.67% | 34.17% | 21.67% | 5.83% |
| D    | 120  | 5.83%  | 26.67% | 32.50% | 29.17% | 5.83% |
| E    | 120  | 10.83% | 30.00% | 35.00% | 15.00% | 9.17% |
| F    | 120  | 4.17%  | 29.17% | 34.17% | 26.67% | 5.83% |
| G    | 120  | 5.83%  | 25.00% | 35.00% | 26.67% | 7.50% |
| H    | 160  | 8.13%  | 19.38% | 38.13% | 26.25% | 8.13% |
| 全體合計 | 1000 | 6.99%  | 25.69% | 36.39% | 23.97% | 6.96% |

以 G 組 120 次、1000 次與棋局編號 1120 比較，擲骰結果、次數與機率分布如下 (表 11、圖 10)：

| 擲骰結果 | 次數 | 分布百分比  |
|------|----|--------|
| 0    | 9  | 6.77%  |
| 1    | 33 | 24.81% |
| 2    | 54 | 40.60% |
| 3    | 29 | 21.80% |
| 4    | 8  | 6.02%  |



【確認比較結果】與網路遊戲擲骰結果(編號 1120)比較，後者總次數 133 回，棋局結束，扣除骰 0 結果黑方 5 次、白方 4 次，得到實際移動 124 次。我們比較自製生成器與多次嘗試網路遊戲的擲骰結果，發現我們的擲骰結果穩定，各點數出現機率與理論值接近。

## 二、特殊格權重

這是為有玫瑰花叢設計，我們將棋子依出場序編號，同時考慮棋子運用多寡而給予權重，順向與逆向權重計算有明顯差異(表 12)。

| ○ 權重小→大 |      |      | ● 權重小→大 |     |      |
|---------|------|------|---------|-----|------|
| A 區     | B 區  | C 區  | A 區     | B 區 | C 區  |
| 1090    | 1190 | 1875 | 710     | 953 | 1575 |
| 4155    |      |      | 3238    |     |      |

| ○ 權重大→小 |      |      | ● 權重大→小 |     |      |
|---------|------|------|---------|-----|------|
| A 區     | B 區  | C 區  | A 區     | B 區 | C 區  |
| 1070    | 1150 | 1875 | 690     | 937 | 1425 |
| 4095    |      |      | 3052    |     |      |

【結果】雙向評估結果可以判斷白方勝，特殊格權重只能讓贏家累積分數但無法判斷使用何種策略取勝。特殊格權重法僅適用於有玫瑰花叢棋盤，無玫瑰花叢或改變玫瑰花叢密度需發展其他評估方法。

## 三、以正負評分法分析贏家取勝條件及策略

以【G 組】擲骰結果、無玫瑰花、原始棋盤下棋，棋局結束合計 68 回合，黑方移動總格數 90，白方移動總格數 87。

以擲骰結果來看，黑方骰 0 無法移動次數較多，但骰 4 可移動格數較多，擲骰次數雖然呈現大致對稱分布，卻無法判斷輸贏所在(表 13~表 15)。

| 黑方 | 次數 | 百分比    | 白方 | 次數 | 百分比    |
|----|----|--------|----|----|--------|
| 0  | 4  | 9.30%  | 0  | 2  | 4.65%  |
| 1  | 8  | 18.60% | 1  | 10 | 23.26% |
| 2  | 16 | 37.21% | 2  | 19 | 44.19% |
| 3  | 10 | 23.26% | 3  | 9  | 20.93% |
| 4  | 5  | 11.63% | 4  | 3  | 6.98%  |
| 合計 | 43 |        | 合計 | 43 |        |

|                     |    |                     |    |
|---------------------|----|---------------------|----|
| 2 2 3 3 2 2 2 4 3 1 | 24 | 4 1 1 2 2 1 0 2 3 2 | 18 |
| 3 2 3 4 2 1 3 3 3 0 | 24 | 1 2 2 2 3 0 3 1 2 2 | 18 |
| 4 2 2 2 1 0 2 1 1 1 | 16 | 4 1 1 3 3 1 2 1 3 3 | 22 |
| 2 2 2 1 1 0 2 2 3 0 | 15 | 3 2 2 2 3 2 2 2 1 4 | 23 |
| 3 4 4               | 11 | 2 2 2               | 6  |
| 總移動格數               | 90 | 總移動格數               | 87 |

| 棋子 | 整數拆解              | 總步數 | End | Moves | 步數組合                 |
|----|-------------------|-----|-----|-------|----------------------|
| b1 | 2+2+3+3+1+3+1     | 15  | *   | 7     | 1, 2, 3              |
| b2 | 1+1+1+1+2+2+3+2+2 | 15  | *   | 9     | 1, 2, 3              |
| b3 | 3+1+3+3+2+3       | 15  | *   | 7     | 1, 2, 3              |
| b4 | 1+1+3+3+2+1+3     | 14  | <15 | 7     | 1, 2, 3              |
| b5 | 1+2+1+3           | 7   | <15 | 4     | 1, 2, 3 & kicked out |
| b5 | 4                 | 4   | <15 | 1     | 4                    |
| 合計 |                   |     |     | 35    |                      |
| w1 | 2+2+2+3+3         | 15  | *   | 6     | 2, 3                 |
| w2 | 4+2+3+3+1+2       | 15  | *   | 6     | 1, 2, 3, 4           |
| w3 | 3+4+2+3+2+1       | 15  | *   | 6     | 1, 2, 3, 4           |
| w4 | 1+4+2+3+2+2+1     | 15  | *   | 7     | 1, 2, 3, 4           |
| w5 | 4+2+1+2+2+2+2     | 15  | *   | 7     | 1, 2, 4              |
| 合計 |                   |     |     | 32    |                      |

此為 G 組骰運用於無玫瑰花叢棋盤，實走 68 步，W5>B3，白方勝。我們發現沒有玫瑰花叢格可供避險且骰 0 已列入考慮。我們猜想擲骰結果能得知移動格數，也能從整數分拆得知贏方，卻無法以此得知贏家策略，由於總移動格數與骰子評估無法判斷輸贏，因此我們想找到更清楚的判斷方式。

【風險評估】同一局以每一輪棋子移動選擇來評估風險，亦即選擇大於 1，如何評估己方優勢及對手優勢避險，作為棋子移動依據。我們認為贏家評估棋路必須判斷風險，雙邊競逐時選與不選被對手驅逐的可能性有多高，判斷策略除了所在位置、玫瑰叢有無或多寡，都必須考慮對手目前棋盤位置以及己方選擇數量考慮移動棋子和位置，風險評估計有 15 種狀態(game state) (表 16)。

| 種類   | 機率     | 種類      | 機率      | 種類         | 機率     |
|------|--------|---------|---------|------------|--------|
| 4    | 6.25%  | 2       | 37.50%  | 2, 3       | 62.5%  |
| 1    | 25.00% | 2, 4    | 43.75%  | 1, 2, 4    | 68.75% |
| 3    | 25.00% | 1, 3    | 50.00 % | 2, 3, 4    | 68.75% |
| 1, 4 | 31.25% | 1, 3, 4 | 56.25%  | 1, 2, 3    | 87.50% |
| 3, 4 | 31.25% | 1, 2    | 62.50%  | 1, 2, 3, 4 | 93.75% |

【移動策略】評估風險一無玫瑰花叢棋盤 (表 17~23)(圖 11~16)

Round 1~10

| ROUND | 黑先白後 |    | 可選擇移動格數 | 選擇說明：尚有其他選擇為何，評估已經在棋盤內棋子的風險  |
|-------|------|----|---------|--|
|       | ●    | ○  |         |  |
| 1     | 1    | A2 | 1       | x  |
| 2     |      | A2 | 1       | x  |
| 3     | 1    | A4 | 1       | x  |
| 4     |      | A4 | 2       | 白 1 到 B2 亦可，但先到 B2 容易被趕走，根據經驗法則以及骰出 2 的機率 37.5%  |
| 5     | 2    | A1 | 2       | 黑 1 到 B1 亦可，但根據經驗法則及骰出 1 和 3 的機率高達 50%，評估對手 W2 骰 1、W1 骰 3 都可以進入 B1                                 |
| 6     |      | B2 | 2       | 白 2 被趕走機會 37.5%，因為 B1 緊追在後，只差兩步，骰 2 的機率就是 37.5%。   |
| 7     | 3    | A3 | 2       | 黑 1 到 B3 亦可，但根據經驗法則及骰出 1 的機率高達 25%，評估對手 W2 骰 1 都可以進入 B3  |
| 8     |      | B5 | 3       | 白 1 到 B1 或白 3 到 A3 這兩種選擇，不動的理由是，如果對方到 B1 會有黑 1 黑 2 黑 3，分別為 1、2、4 步，則機率高達 68.75%，如果白 3 到 A3 影響會在下回。 |
| 9     | 2    | A2 | 2       | 黑 1 到 B1 亦可，但根據經驗法則及骰出 3 的機率高達 25%，評估對手 W1 骰 3 可以進入 B1。  |
| 10    |      | B8 | 2       | 白 1 到 B1 亦可，但根據經驗法則及骰出 1、2、3 的機率高達 87.5%，評估對手 B1 骰 1、B3 骰 2、B2 骰 3 有三種選擇。                          |

|                 |      |      |      |       |    |    |       |         |  |
|-----------------|------|------|------|-------|----|----|-------|---------|--|
| No Rosette 1-10 |      |      |      | Start |    |    |       | Succeed |  |
| 3 b1            | 7 b3 | 1 b1 | 5 b2 | b1    |    |    |       |         |  |
|                 |      | 9 b2 |      | b2    |    |    |       |         |  |
| A4              | A3   | A2   | A1   |       |    | C1 | C2    |         |  |
|                 | 6 w2 |      |      | 8 w2  | B6 | B7 | 10 w2 |         |  |
| B1              | B2   | B3   | B4   | B5    |    |    | B8    |         |  |
| 4 w2            |      | 2 w1 |      | w1    |    | C1 | C2    |         |  |
| A4              | A3   | A2   | A1   |       |    |    |       |         |  |

### Round 11~20

| ROUND | ● | 目前位置 | ○  | 可選擇移動格數 | 選擇說明：尚有其他選擇為何，評估已經在棋盤內棋子的風險               |  |
|-------|---|------|----|---------|---|--|
| 11    | 4 | A1   |    | 2       | 黑 1 到 B1 亦可，但被趕走機率是 25%，白 1 到 B1 的機率是 25% |  |
| 12    |   |      | C1 | 2       | 1   | 決定讓白 2 儘快離開 B 區，進入安全區，儘快得分。目標在得分。                                      |
| 13    | 1 | B3   |    | 3       | 黑 2 到 B1 可，風險 25%；黑 3 到 B2，風險是 6.25%，     |  |
| 14    |   | EXIT |    | 2       | 1   | 成功達陣   |
| 15    | 1 | B6   |    | 3       | 黑 2 到 B1 可，風險 25%；黑 3 到 B2，風險是 6.25%，     |  |
| 16    |   | A4   |    | 1       | 1   | X  |
| 17    | 1 | B7   |    | 1       |   | X  |
| 18    |   |      | B2 | 1       | 1   | 敵方到 3 或 4 也要評估，到 3 黑 3 到 B2，還有到 4 會是黑 1 到 B2，被趕走風險是 31.25%，但沒有發生，安全躲過。 |
| 19    | 3 | A4   |    | 1       |   | X  |
| 20    |   |      | B5 | 1       | 1   | 只能進新子或儘快離開 B 區，避敵且進入安全區達陣，才能得分。這回移動目標在得分。                              |

|       |      |       |       |      |       |       |       |  |
|-------|------|-------|-------|------|-------|-------|-------|--|
| 3 b1  | 7 b3 | 1 b1  | 5 b2  | b1   |       |       |       |  |
| 19 b3 |      | 9 b2  | 11 b4 | b2   |       |       |       |  |
| A4    | A3   | A2    | A1    |      |       | C1    | C2    |  |
|       | 6 w2 | 13 b1 |       | 8 w2 | 15 b1 | 17 b1 | 10 w2 |  |
| B1    | B2   | B3    | B4    | B5   | B6    | B7    | B8    |  |
| 4 w2  |      | 2 w1  |       | w1   | 14 w2 |       | 12 w2 |  |
| 16 w1 |      |       |       | w2   |       | C1    | C2    |  |
| A4    | A3   | A2    | A1    |      |       |       |       |  |

## Round 21~30

| ROUND | ● | 目前位置 | ○ | 可選擇移動格數 | 選擇說明：尚有其他選擇為何，評估已經在棋盤內棋子的風險  |
|-------|---|------|---|---------|--|
| 21    | 1 | C2   |   | 1       | 儘快離開 B 區，目標在得分。  |
| 22    |   | A3   | 3 | 1       | 白 1 目前沒有威脅，對方所在位置距離大於 4。   |
| 23    | 3 | B3   |   | 2       | 黑 2 到 B1 可，風險 37.5%；這一步本身的風險是 6.25%。   |
| 24    |   | X    |   |         | 先後子 ORDER 不變。白運氣不好骰到 0，如果是 4 就可以驅逐剛到 B3 的白 3，骰 0 骰 4 都是 6.25%  |
| 25    | 5 | A4   |   | 4       | 黑 2 到 B2 風險 31.25%(3,4)、黑 3 到 B7 風險 37.5%(2)、黑 4 到 B1 風險 43.25%(2,4)，W3 骰 4 的機會很低 6.25%，所以不動黑 3，進新子的目的在累積資源。                             |
| 26    |   | B8   | 1 | 3       | 白 3 到 B2 亦可，遇到黑 5 或黑 2 的風險分別為 37.5%(骰 2)或 6.25%(骰 4)，合計 43.25%。  |
| 27    | 3 | B6   |   | 2       | 目標在避敵儘快得分。也可以動黑 2 但分險很高，會遇到白 3 若骰 2 風險高達 37.5%。B3 避敵的必要性在於如果白 3 骰 4 風險雖然不高，只有 6.25%，但就是會被趕走。所以權衡之下要避敵還要得分，所以累積資源黑 2 先慢一點，先讓黑 3 趕快進入 C 區。 |
| 28    |   | EXIT | 1 | 2       | 白 3 到 B2 亦可，遇到黑 5 或黑 2 的風險分別為 37.5%(骰 2)或 6.25%(骰 4)，合計 43.25%。  |
| 29    | 3 | B8   |   | 2       | 黑 5 到 B2 亦可，遇到白 3 的風險為 25%。  |
| 30    |   | A1   | 4 | 1       | 白 3 到 A4 亦可，但是要進新子，補充資源  |

|                     |                     |                      |               |                     |                      |                      |
|---------------------|---------------------|----------------------|---------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| 3<br>19<br>24<br>A4 | 7<br>b3             | 1<br>9<br>b2         | 5<br>11<br>b4 | b1<br>b2<br>b3      | 21<br>b1             |                      |
| B1                  | 6<br>18<br>w2<br>w1 | 13<br>23<br>b1<br>b3 | B4            | 8<br>20<br>w2<br>w1 | 15<br>27<br>b1<br>b3 | 17<br>b1             |
| 4<br>16<br>w2<br>w1 | 22<br>w3            | 2<br>w1              | 30<br>w4      | w1<br>w2            | 14<br>28<br>w2<br>w1 | 12<br>w2             |
| A4                  | A3                  | A2                   | A1            | B5                  | B6                   | B7                   |
|                     |                     |                      |               |                     |                      | 10<br>26<br>w2<br>w1 |
|                     |                     |                      |               |                     |                      | 29<br>b3             |
|                     |                     |                      |               |                     |                      | C2                   |
|                     |                     |                      |               |                     |                      | B8                   |



## Round 31~40

| ROUND | ● | 目前位置 | ○ | 可選擇移動格數 | 選擇說明：尚有其他選擇為何，評估已經在棋盤內棋子的風險   |
|-------|---|------|---|---------|---|
| 31    | 3 | EXIT |   | 3       | 黑 5 到 B3，黑 2 到 B1 亦可，白 3 骰到 4 的機率是 6.25%。白 3 骰到 2 的機率是 37.5%。兩者都有可能被驅逐。                               |
| 32    |   | A4   | 5 | 3       | 白 4 到 B1，白 3 到 B3 亦可，黑 5 骰 1，黑 2 骰 3，黑 4 骰 4，分別是 25%、25%、6.25%，白 4 被驅逐的機率總合是 56.25%；黑 5 骰 3 的機率是 25%。 |
| 33    | 5 | B3   |   | 2       | 黑 2 到 B1 亦可，白 5 骰 1，白 3 骰 2，白 4 骰 4，分別是 25%、37.5%、6.25%，黑 2 被驅逐的機率總和是 6.25%。此步被驅逐的機率是 31.25%，風險較低。    |
| 34    |   | B2   | 5 | 2       | 白 3 到 B1 亦可，黑 2 骰 3，黑 4 骰 4，分別是 25%、6.25%，白 3 被驅逐的機率總和是 31.25%。此步被驅逐的機率是 6.25%，風險較低。                  |
| 35    | 1 | EXIT |   | 2       | or 黑 5 到 B4，面對下一步白子移動可能出現的危機，被趕走的機率從 31.25% 增加為 37.5%。<br>其實最後結果被趕走了，被 W5 一步就趕走了。                     |
| 36    |   | B3   | 5 | 1       | 避敵優先，趕敵其次。  |
| 37    | 2 | A3   |   | 1       | X，不能進新子也不能前進，因為黑 4 被黑 2 卡住，因為前方有黑 4 卡住了進新子的可能性。   |
| 38    |   | B5   | 5 | 2       | 白 3 到 B1 亦可，但黑 2 骰 2，黑 4 骰 4，分別是 37.5%、6.25%，白 3 被驅逐的機率總和是 43.75%。此步被逐的機率為 0%，避敵優先。                   |
| 39    | 2 |      |   | 2       | 黑 4 到 A2 亦可，但可以進新子的機率只有 31.25%。此步可以進新子的機率是 62.5%，機率較高。  |
| 40    |   | B7   | 5 | 2       | 白 3 到 B1 亦可，黑 2 骰 1，黑 4 骰 4，機率分別是 25%、6.25%，機率總和是 31.25%。被逐的機率為 0%，避敵優先。                              |

|              |              |              |              |              |                |                |                |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|----------------|
| 3 b1         | 7 b3         | 1 b1         | 5 b2         | b1           | 31 b3          | 21 b1          |                |
| 19 b3        | 37 b2        | 9 b2         | 11 b4        | b2           | 35 b1          |                |                |
| 24 b5        |              |              |              | b3           |                |                |                |
| 39 b2        |              |              |              | b4           |                |                |                |
| A4           | A3           | A2           | A1           |              |                | C1             | C2             |
|              | 6 w2         | 13 b1        |              | 8 w2         | 15 b1          | 17 b1          | 10 w2          |
|              | 18 w1        | 23 b3        |              | 20 w1        | 27 b3          | 40 w5          | 26 w1          |
|              | 34 w5        | 33 b5        |              | 38 w5        |                |                | 29 b3          |
|              |              | 36 w5        |              |              |                |                |                |
| (5-3) (-5+3) | (6-3) (-6+3) | (7-3) (-7+3) | (8-3) (-8+3) | (9-3) (-9+3) | (10-3) (-10+3) | (11-3) (-11+3) | (12-3) (-12+3) |
| B1           | B2           | B3           | B4           | B5           | B6             | B7             | B8             |
| 4 w2         | 22 w3        | 2 w1         | 30 w4        | w1           | 14 w2          |                | 12 w2          |
| 16 w1        |              |              |              | w2           | 28 w1          |                |                |
| 32 w5        |              |              |              | w3           |                |                |                |
| A4           | A3           | A2           | A1           |              |                | C1             | C2             |

## Round 41~50

| ROUND | ● | 目前位置 | ○  | 可選擇移動格數 | 選擇說明：尚有其他選擇為何，評估已經在棋盤內棋子的風險  |  |
|-------|---|------|----|---------|--|--|
| 41    | 4 | A2   |    | 2       | 黑 2 到 B1 亦可，白 3 骰 2，白 4 骰 4，機率分別是 37.5%、6.25%，機率總和是 43.75%。此步被驅逐的機率為 0%，沒有風險。  |  |
| 42    |   |      | C1 | 5       | 2  | 白 3 到 B2 亦可，黑 2 骰 2，黑 4 骰 3，機率分別是 37.5%、25%，機率總和是 62.5%。此步被驅逐的機率為 0%，得分優先。             |
| 43    | 2 | B2   |    | 1       | X  |  |
| 44    |   |      | B1 | 4       | 2  | 白 3 到 B3 亦可，黑 2 骰 1 的機率是 25%。此步被驅逐的機率也是 25%，雖然風險相同，但動白 4 才有可能吃掉黑 2，動白 3 反而有可能會被黑 2 驅逐。 |
| 45    | 2 | B4   |    | 2       | 避敵優先，被驅逐的機率從 50%減少為 25%。   |  |
| 46    |   |      | B3 | 4       | 2  | 避敵優先，被驅逐的機率從 25%減少為 0%，雖然動白 5 可以得分，但白 5 已在安全區。   |
| 47    | 2 | B8   |    | 2       | 黑 4 到 B1 亦可，白 3 骰 2 的機率是 37.5%。此步被驅逐的機率是 6.25%，風險較低，且黑 2 被驅逐的機率從 25%減少為 6.25%。 |  |
| 48    |   |      | B6 | 4       | 2  | 白 3 到 B2 亦可，黑 4 骰 4 的機率為 6.25%。此步被驅逐的機率為 0%，沒有風險。                                      |
| 49    | 2 | C1   |    | 1       | 到安全格優先。  |  |
| 50    |   |      | X  |         | X  |  |

|                                       |   |  |                |                                 |                                  |                                  |                                  |
|---------------------------------------|---|--|----------------|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 3<br>19<br>24<br>39<br>A <sub>4</sub> | 7<br>37<br>b3<br>b2                         | 1<br>9<br>41<br>A <sub>2</sub>                           | 5<br>11<br>b4  | b1<br>b2<br>b3<br>b4            | 31<br>35<br>b3<br>b1             | 21<br>b1                         | 49<br>b2                         |
| 44<br>w4                              | 6<br>18<br>34<br>43<br>w2<br>w1<br>w5<br>b2 | 13<br>23<br>33<br>36<br>46<br>b1<br>b3<br>b5<br>w5<br>w4 | 45<br>b2       | 8<br>20<br>38<br>w2<br>w1<br>w5 | 15<br>27<br>48<br>b1<br>b3<br>w4 | 17<br>40<br>47<br>b1<br>w5<br>b2 | 10<br>26<br>29<br>w2<br>w1<br>b3 |
| B <sub>1</sub>                        | B <sub>2</sub>                              | B <sub>3</sub>   | B <sub>4</sub> | B <sub>5</sub>                  | B <sub>6</sub>                   | B <sub>7</sub>                   | B <sub>8</sub>                   |
| 4<br>16<br>32<br>A <sub>4</sub>       | 22<br>w3                                    | 2<br>w1  | 30<br>w4       | w1<br>w2<br>w3                  | 14<br>28<br>w2<br>w1             |                                  | 12<br>42<br>w2<br>w5             |
| A <sub>4</sub>                        | A <sub>3</sub>                              | A <sub>2</sub>   | A <sub>1</sub> |                                 |                                  | C <sub>1</sub>                   | C <sub>2</sub>                   |

## Round 51~60

| ROUND | ● | 目前位置 | ○  | 可選擇移動格數 | 選擇說明：尚有其他選擇為何，評估已經在棋盤內棋子的風險             |   |
|-------|---|------|----|---------|---|---|
| 51    | 5 | A1   |    | 1       | 進新子補充資源。                                |   |
| 52    |   |      | B8 | 4       | 2                                       | 白 3 到 B1 亦可，黑 4 骰 3，黑 5 骰 4，機率分別是 25% 和 6.25%，被驅逐的機率總合為 31.25%。此步被的機率為 0%，避敵優先。 |
| 53    | 2 | EXIT |    | 1       | 得分優先。                                   |   |
| 54    |   |      | B3 | 3       | 1                                       | X   |
| 55    | 4 | B1   |    | 2       | 黑 5 到 A4 亦可，但是動黑 4 有可能驅逐白 3 的機率比動黑 5 高。 |   |
| 56    |   |      | B5 | 3       | 2                                       | 白 5 到 EXIT，白 4 到 C2 亦可，兩者被驅逐的風險都為 0%，避敵優先。                                      |
| 57    | 4 | B4   |    | 2       | 黑 5 到 A4 亦可，但是動黑 4 可以吃掉對手的機率比動黑 5 高。    |   |
| 58    |   |      | C2 | 4       | 2                                       | 白 5 到 EXIT，白 3 到 B7 亦可，黑 4 骰 1，黑 4 骰 3 的機率分別是 25% 和 25%，被驅逐的機率總和是 50%。          |
| 59    | 5 | A3   |    | 2       | 黑 4 到 B6 亦可，白 3 骰 1 的機率是 25%。           |   |
| 60    |   |      | B8 | 3       | 1                                       | 被驅逐的機率從 25% 減少為 6.25%。  |

|       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 3 b1  | 7 b3  | 1 b1  | 5 b2  | b1    | 31 b3 | 21 b1 | 49 b2 |
| 19 b3 | 37 b2 | 9 b2  | 11 b4 | b2    | 35 b1 |       |       |
| 24 b5 | 59 b5 | 41 b4 | 51 b5 | b3    | 53 b2 |       |       |
| 39 b2 |       |       |       | b4    |       |       |       |
| A4    | A3    | A2    | A1    |       |       | C1    | C2    |
| 44 w4 | 6 w2  | 13 b1 | 45 b2 | 8 w2  | 15 b1 | 17 b1 | 10 w2 |
| 55 b4 | 18 w1 | 23 b3 | 57 b4 | 20 w1 | 27 b3 | 40 w5 | 26 w1 |
|       | 34 w5 | 33 b5 |       | 38 w5 | 48 w4 | 47 b2 | 29 b3 |
|       | 43 b2 | 36 w5 |       | 56 w3 |       |       | 52 w4 |
|       |       | 46 w4 |       |       |       |       |       |
|       |       | 54 w3 |       |       |       |       |       |
| B1    | B2    | B3    | B4    | B5    | B6    | B7    | B8    |
| 4 w2  | 22 w3 | 2 w1  | 30 w4 | w1    | 14 w2 | 58 w4 | 12 w2 |
| 16 w1 |       |       |       | w2    | 28 w1 |       | 42 w5 |
| 32 w5 |       |       |       | w3    |       |       |       |
| A4    | A3    | A2    | A1    |       |       | C1    | C2    |

### Round 61~68

| ROUND | ● | 目前位置 | ○ | 可選擇移動格數 | 選擇說明：尚有其他選擇為何，評估已經在棋盤內棋子的風險                                |
|-------|---|------|---|---------|--|
| 61    | 5 | A4   |   | 2       | 黑 4 到 B5 亦可，兩者被驅逐的機率都是 0%，但是要儘快讓黑 5 達成目標。                  |
| 62    |   | EXIT | 4 | 1       | 達成目標。  |
| 63    | 4 | B6   |   | 2       | 黑 5 到 B2 亦可，兩者被驅逐的風險都為 0%，但是黑 4 有較大的機率可以吃掉白 3。             |
| 64    |   | C2   | 3 | 2       | 白 5 到 EXIT 亦可，如果動白 5，白 3 被驅逐的機率是 37.5%，動白 3，兩者被驅逐的機率都是 0%。 |
| 65    | 1 | B7   |   | 2       | 黑 5 到 B1 亦可，但是要儘快讓黑 4 達成目標。                                |
| 66    |   | EXIT | 3 | 1       | 達成目標。  |
| 67    | 4 | C2   |   | 2       | 黑 5 到 B3 亦可，但是要儘快讓黑 4 達成目標。                                |
| 68    |   | EXIT | 3 | 1       | 達成目標。  |

白方獲勝

【平衡狀態】實際評估時，以棋局當下(game state)黑方白方位置權值表示有利的一方以及優勢劣勢處境。以為 No R-G 整局雙方落子示意(表 17)，逐步計算遊戲當下狀態值，整局結束之後計算總和(表 24)。

|                     |                     |                     |                     |                |                |                      |                      |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------|----------------|----------------------|----------------------|
| 3 b1                | 7 b3                | 1 b1                | 5 b2                | b1             | 31 b3          | 21 b1                | 49 b2                |
| 19 b3               | 37 b2               | 9 b2                | 11 b4               | b2             | 35 b1          | 67 b4                |                      |
| 24 b5               | 59 b5               | 41 b4               | 51 b5               | b3             | 53 b2          |                      |                      |
| 39 b2               |                     |                     |                     | b4             |                |                      |                      |
| 61 b5               |                     |                     |                     | b5             |                |                      |                      |
| (4) A <sub>4</sub>  | (3) A <sub>3</sub>  | (2) A <sub>2</sub>  | (1) A <sub>1</sub>  | 0              | 15             | (14) C <sub>1</sub>  | (13) C <sub>2</sub>  |
| 44 w4               | 6 w2                | 13 b1               | 45 b2               | 8 w2           | 15 b1          | 17 b1                | 10 w2                |
| 55 b4               | 18 w1               | 23 b3               | 57 b4               | 20 w1          | 27 b3          | 40 w5                | 26 w1                |
|                     | 34 w5               | 33 b5               |                     | 38 w5          | 48 w4          | 47 b2                | 29 b3                |
|                     | 43 b2               | 36 w5               |                     | 56 w3          | 63 b4          | 65 b4                | 52 w4                |
|                     |                     | 46 w4               |                     |                |                |                      | 60 w3                |
|                     |                     | 54 w3               |                     |                |                |                      |                      |
| (5-3) (-5+3)        | (6-3) (-6+3)        | (7-3) (-7+3)        | (8-3) (-8+3)        | (9-3) (-9+3)   | (10-3) (-10+3) | (11-3) (-11+3)       | (12-3) (-12+3)       |
| B <sub>1</sub>      | B <sub>2</sub>      | B <sub>3</sub>      | B <sub>4</sub>      | B <sub>5</sub> | B <sub>6</sub> | B <sub>7</sub>       | B <sub>8</sub>       |
| 4 w2                | 22 w3               | 2 w1                | 30 w4               | w1             | 14 w2          | 58 w4                | 12 w2                |
| 16 w1               |                     |                     |                     | w2             | 28 w1          | 64 w3                | 42 w5                |
| 32 w5               |                     |                     |                     | w3             | 62 w4          |                      |                      |
|                     |                     |                     |                     | w4             | 66 w5          |                      |                      |
|                     |                     |                     |                     | w5             | 68 w3          |                      |                      |
| (-4) A <sub>4</sub> | (-3) A <sub>3</sub> | (-2) A <sub>2</sub> | (-1) A <sub>1</sub> | 0              | -15            | (-14) C <sub>1</sub> | (-13) C <sub>2</sub> |

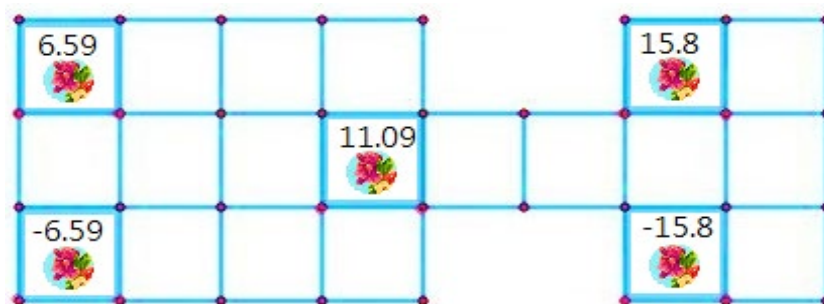
| 黑方有利 平衡狀態 白方有利 |   |       |   | 黑方有利 平衡狀態 白方有利 |       |   |   |      |
|----------------|---|-------|---|----------------|-------|---|---|------|
| Round          |   | +     | 0 | -              | Round | + | 0 | -    |
| 1              | 黑 | 2     |   |                | 35    | 黑 |   | 0    |
| 2              | 白 |       | 0 |                | 36    | 白 |   | -5   |
| 3              | 黑 | 2     |   |                | 37    | 黑 |   | -4   |
| 4              | 白 |       |   | -2             | 38    | 白 |   | -6   |
| 5              | 黑 |       |   | -1             | 39    | 黑 |   | -5   |
| 6              | 白 |       | 0 |                | 40    | 白 |   | -7   |
| 7              | 黑 | 3     |   |                | 41    | 黑 |   | -6   |
| 8              | 白 |       | 0 |                | 42    | 白 |   | -11  |
| 9              | 黑 | 1     |   |                | 43    | 黑 |   | -12  |
| 10             | 白 |       |   | -2             | 44    | 白 |   | -13  |
| 11             | 黑 |       |   | -1             | 45    | 黑 |   | -11  |
| 12             | 白 |       |   | -5             | 46    | 白 |   | -13  |
| 13             | 黑 |       |   | -5             | 47    | 黑 |   | -10  |
| 14             | 白 |       |   | -7             | 48    | 白 |   | -13  |
| 15             | 黑 |       |   | -4             | 49    | 黑 |   | -8   |
| 16             | 白 |       |   | -6             | 50    | 白 |   | -8   |
| 17             | 黑 |       |   | -5             | 51    | 黑 |   | -7   |
| 18             | 白 |       |   | -4             | 52    | 白 |   | -9   |
| 19             | 黑 |       |   | -3             | 53    | 黑 |   | -7   |
| 20             | 白 |       |   | -6             | 54    | 白 |   | -8   |
| 21             | 黑 |       | 0 |                | 55    | 黑 |   | -8   |
| 22             | 白 |       |   | -3             | 56    | 白 |   | -10  |
| 23             | 黑 |       |   | -3             | 57    | 黑 |   | -7   |
| 24             | 白 |       |   | -3             | 58    | 白 |   | -12  |
| 25             | 黑 | 1     |   |                | 59    | 黑 |   | -10  |
| 26             | 白 |       |   | -2             | 60    | 白 |   | -13  |
| 27             | 黑 | 1     |   |                | 61    | 黑 |   | -12  |
| 28             | 白 |       |   | -5             | 62    | 白 |   | -13  |
| 29             | 黑 |       |   | -3             | 63    | 黑 |   | -11  |
| 30             | 白 |       |   | -4             | 64    | 白 |   | -16  |
| 31             | 黑 | 2     |   |                | 65    | 黑 |   | -15  |
| 32             | 白 |       |   | -2             | 66    | 白 |   | -17  |
| 33             | 黑 |       |   | -2             | 67    | 黑 |   | -11  |
| 34             | 白 |       |   | -1             | 68    | 白 |   | -12  |
| 小計             |   | 12    |   | -79            | 小計    |   | 0 | -330 |
| 合計             |   | 黑方 12 |   | 白方 -409        |       |   |   |      |

本局以正負評分法計算得到黑方權值 12，白方權值 409(取絕對值)，白方獲勝，亦即我們設計的正負評分法有利於判斷贏方優勢所在。

#### 四、玫瑰叢的影響力

##### 【玫瑰叢密度】

1. 保命策略：我們將原版棋盤改編，設計每 3 格或每 5 格一叢玫瑰的棋盤。棋局中發現玫瑰叢可避險的特性促使雙方亟欲將棋子進入該格，並且停留以進新子或將例如停留在 B4 格，不會被對手驅逐，因此運行策略會以進新子或快速進入 C 區為主。
2. 原始棋盤刻意將第三格玫瑰叢設計於制 C2 格，增加對奕風險，提升遊戲刺激。玫瑰叢密度依 A4、B4、B8 安排，風險會降低，我們以  $a$  表示玫瑰花格的優勢(advantage)，每一個玫瑰叢格值都高於其他空白格， $a=|\pm x|$ ，不同玫瑰花密度則有不同優勢(圖 18、19)。

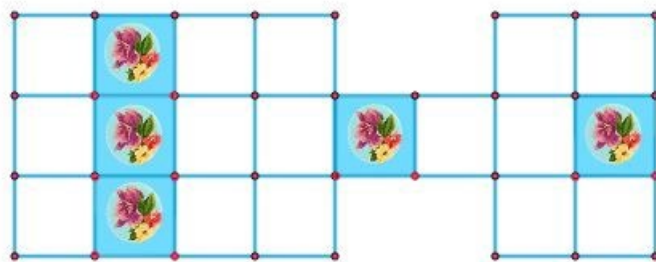


|    |       |       |       |        |           |            |       |       |
|----|-------|-------|-------|--------|-----------|------------|-------|-------|
| 先子 | 6.59  | 3.37  | 2.14  | 0.98   | <u>0</u>  | <u>15</u>  | 15.8  | 12.81 |
|    | 4.94  | 5.75  | 6.88  | 11.09  | 9.09      | 9.61       | 9.96  | 10.45 |
|    | B1    | B2    | B3    | B4     | <b>B5</b> | <b>B6</b>  | B7    | B8    |
| 後子 | -4.94 | -5.75 | -6.88 | -11.09 | -9.09     | -9.61      | -9.96 | -10.5 |
|    | -6.59 | -3.37 | -2.14 | -0.98  | <u>0</u>  | <u>-15</u> | -15.8 | -12.8 |

3. 距離玫瑰叢 1 格的 B3 和 B5 卻很少有棋子停留，當落子於玫瑰叢的時候，棋子停留的時間長也比 B 區其他非玫瑰叢來得長。正因為玫瑰叢有避險以及進新子累積資源的功能，因此玩家在評估遊戲狀態時，會思考「除非移動玫瑰叢有必要性」才會離開，因此玫瑰叢成為避險工。倘若離開則是以快速進入安全區為主要考慮，例如儘快讓棋子進

入 C 區以求達陣，此時離開玫瑰叢才是最好的選擇，玩家才願意放掉手中的籌碼。

4. 以我們改編的 3 格玫瑰叢及顆 3 骰子為例，玫瑰叢出現在 A3、B2、B5、B8 四格，優勢值各為  $|\pm 5.33|$ 、 $|\pm 8.53|$ 、 $|\pm 11.98|$ 、 $|\pm 13.89|$ ，C 區兩格皆為安全區，其優勢值依然較 B8 低(圖 20)，換言之，玫瑰花叢確實有明顯優勢。



0 是起點 15 是終點

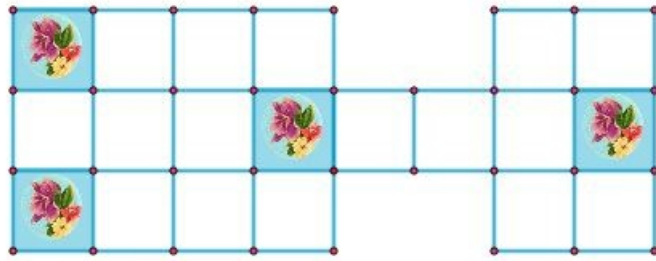
|      |      |      |      |          |           |       |       |
|------|------|------|------|----------|-----------|-------|-------|
| 4.25 | 5.33 | 2.01 | 0.98 | <u>0</u> | <u>15</u> | 13.83 | 12.88 |
| 4.81 | 8.53 | 6.67 | 7.67 | 11.98    | 9.53      | 10.53 | 13.89 |

|       |       |       |       |          |            |       |       |
|-------|-------|-------|-------|----------|------------|-------|-------|
| -4.81 | -8.53 | -6.67 | -7.67 | -12      | -9.53      | -10.5 | -13.9 |
| -4.25 | -5.33 | -2.01 | -0.98 | <u>0</u> | <u>-15</u> | -13.8 | -12.9 |

以玫瑰叢及周圍格子的棋子停留狀況來看，發現玫瑰叢確實是玩家喜好的格子，15-b2 表示在第 15 回合黑方第二個子落在 B1(表 24)。

資料編號 3R-3 dices

| 棋盤位置   | B1             | B2   | B3             |
|--------|----------------|--|----------------|
| 棋子停留狀態 | 15-b2<br>55-w5 | 6-w2 59-w4<br>13-w1 64-w3<br>23-w4 69-w5<br>26-b3 29-b1<br>47-b5 49-b4 | 62-w4<br>69-w5 |
| 停留次數   | 2              | 10   | 2              |



0 是起點 15 是終點

|      |      |      |       |      |      |       |       |
|------|------|------|-------|------|------|-------|-------|
| 5.59 | 3.37 | 2.14 | 0.98  | 0    | 15   | 13.76 | 12.81 |
| 4.94 | 5.75 | 6.88 | 10.96 | 8.75 | 9.04 | 9.6   | 13.72 |

|       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| -4.94 | -5.75 | -6.88 | -11.1 | -8.75 | -9.04 | -9.6  | -13.7 |
| -5.59 | -3.37 | -2.14 | -0.98 | 0     | -15   | -13.8 | -12.8 |

圖 21 四顆骰子和四朵玫瑰叢優勢

當同一方骰到特定點數無法動彈時，予以扣除不計，以骰到 4、3、2、1 為例

$$\text{骰到 } 4 \rightarrow 4 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{骰到 } 3 \rightarrow 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{骰到 } 2 \rightarrow 2 \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{骰到 } 1 \rightarrow 1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}$$

當骰到特定點數可以驅逐對方則加分。



$$\begin{aligned}
f(x) = & x - \left(4 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}\right) - \left(3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}\right) - \left(2 \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}\right) \\
& - \left(1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}\right) + \left[(x+4) \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{8}\right] + \left[(x+3) \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8}\right] \\
& + \left[(x+2) \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{8}\right] + \left[(x+1) \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8}\right] - \left[x \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{8}\right] \\
& - \left[x \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8}\right] - \left[x \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{8}\right] - \left[x \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8}\right] - \left(4 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}\right) \\
& - \left(3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}\right) - \left(2 \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}\right) - \left(1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}\right) \\
& + \textit{rose points (2 points)}
\end{aligned}$$

【小結】原版玫瑰叢的位置設計使 2-2、3-1、4 都可以到 A4 玫瑰叢，在 A4 且骰到 4 就可以到 B4 玫瑰叢，機會僅 6.25%，可遇不可求。而 B1 到 B3 都較危險，玩家盡可能避免選擇到這 3 格。在 B4 不管骰到 0~4 都無法離開 B 區至少要骰 2 次才能離開 B 區，而 C2 玫瑰叢因為一定要骰到 1 才能離開，很大機率會無法動彈。顯然玫瑰叢是為了增加遊戲刺激度而設計。

### 五、以 1 顆棋子與單格棋盤判斷雙方獲勝機會

為了從單顆棋子看雙方對奕衍生出競爭態勢，我們將 Ur 棋簡化以判斷先子的優勢。以樹狀圖  $T_{Ur}$  表示玩家如何權衡遊戲狀態。

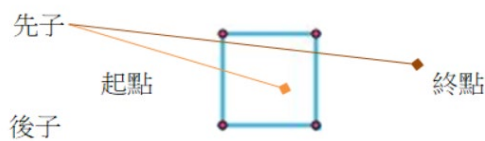


圖 22 雙方單顆棋子對弈狀態

Ur 棋雖名為 20 格棋，考量起點與終點佔有位置，實為 24 格棋。我們判斷單顆棋子所有路徑可能，任一方從起點離開棋盤到達終點需要 15 步；從整數分割來看可以綜合評估擲骰結果與移動次數；如果將遊戲簡化為 1 顆棋子移動則可以用來評估先子有無優勢。示意如圖 23：

|       |      |     |         |         |         |         |         |         |
|-------|------|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| B     | E    | W   | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 2       |
| start | grid | End | round 1 | round 2 | round 3 | round 4 | round 5 | round 6 |

圖 23 BEW000002 表示競爭態勢

在六回合中不同骰子點數的所有組合，例如骰到 012012，我們發現「如果先子贏一定會比對手多 1 步」(圖 24~26)。

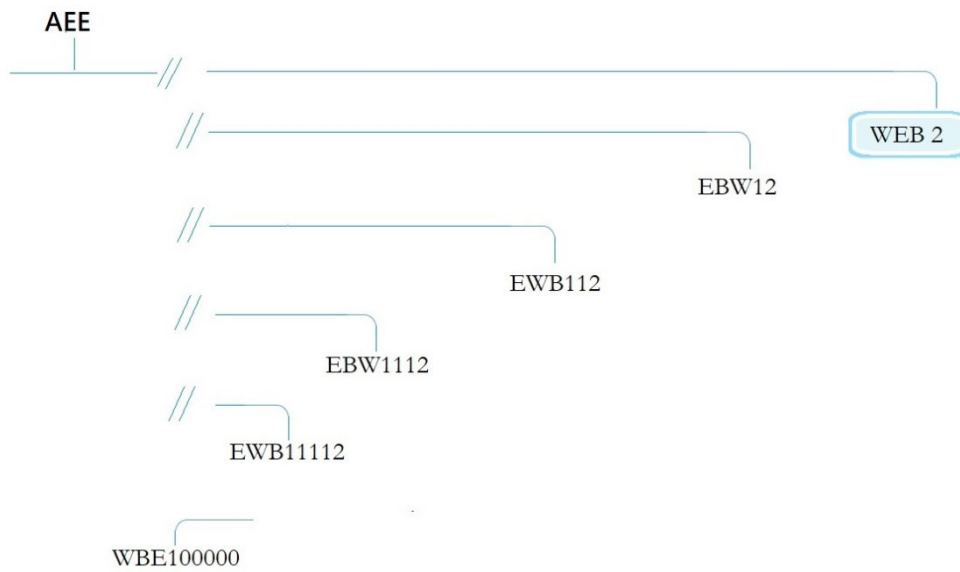


圖 24 遊戲狀態 6 階示意

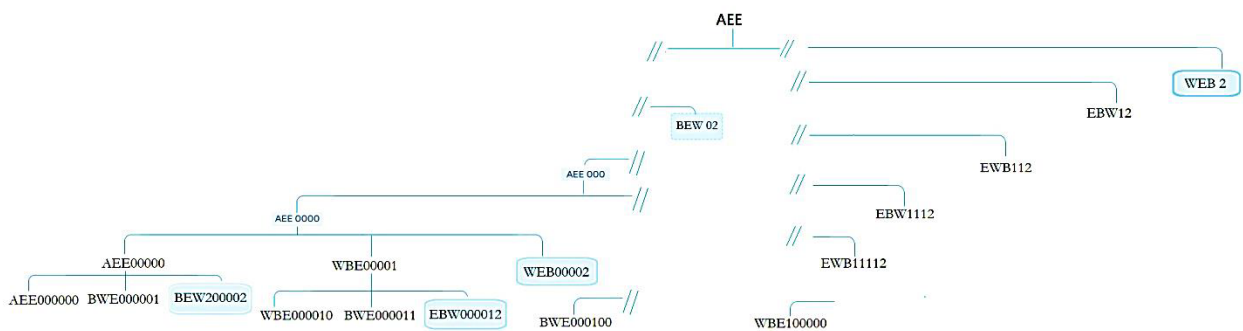
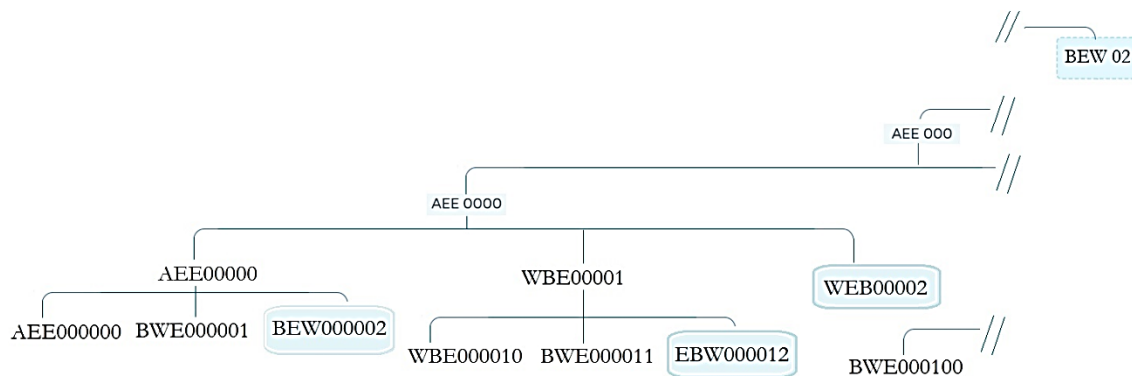


圖 25 六回合優勢評估(節錄)

【說明】A=all 表黑白棋子皆在起點。E=Empty，W=白子，B=黑子，以  $T_6$  BEW000002 為例，藍框表示贏家，計算只有一格的 UR 棋的獲勝機率， $P$  指機率， $n$  指回合數。 $p_n$  指玩家在第  $n$  回合獲勝的機率。



$$p_1 = 1 \cdot \frac{1}{4}$$

第一回合獲勝的機率：1 乘以「骰到 2」的機率，達 25%。

$$p_2 = (1 - p_1) \cdot \frac{1}{4}$$

第二回合獲勝的機率：經過第二回合的機率  $(1 - p_1)$  乘「骰到 2」的機率，即  $(1 - p_1) \times 25\%$ 。

$$p_3 = \left[ (1 - p_1 - p_2) \cdot \frac{2^0}{2^3} \cdot \frac{1}{2} \right] + \left[ (1 - p_1 - p_2) \cdot \frac{2^3 - 2^0}{2^3} \cdot \frac{1}{4} \right]$$

第三合獲勝的機率：經過第三回合的機率即一、二回合皆沒有獲勝的機率  $(1 - p_1 - p_2)$  乘「骰到 1」才能獲勝(50%)的情況，例 WBE10，狀況在 WBE，各骰到 1 和 0，在  $2^3$  中有  $2^0$  個，其餘的皆需要「骰到 2」才能獲勝(25%)。

$$p_4 = \left[ (1 - p_1 - p_2 - p_3) \cdot \frac{2^1}{2^4} \cdot \frac{1}{2} \right] + \left[ (1 - p_1 - p_2 - p_3) \cdot \frac{2^4 - 2^1}{2^4} \cdot \frac{1}{4} \right]$$

第四合獲勝的機率：經過第四回合的機率  $(1 - p_1 - p_2 - p_3)$  乘「骰到 1」才能獲勝(50%)的情況，在  $2^4$  中有  $2^1$  個，其餘的皆需要骰到 2 才能獲勝(25%)。

$$p_5 = \left[ (1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \cdot \frac{2^2 + 2^0}{2^5} \cdot \frac{1}{2} \right] + \left[ (1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \cdot \frac{2^5 - 2^2 - 2^0}{2^5} \cdot \frac{1}{4} \right]$$

第五合獲勝的機率：經過第五回合的機率  $(1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4)$  乘「骰到 1」才能獲勝(50%)的情況有在  $2^5$  中有  $2^2$  種狀況以及第三回合無法動彈的(WBE102)有  $2^0$  種狀況，其餘的皆需要骰到 2 才能獲勝(25%)。

$$p_n = \left[ (1 - p_1 - p_2 - p_3 \cdots p_{n-3} - p_{n-2} - p_{n-1}) \cdot \frac{2^{n-3} + 2^{n-5}}{2^n} \cdot \frac{1}{2} \right] + \left[ (1 - p_1 - p_2 - p_3 \cdots p_{n-3} - p_{n-2} - p_{n-1}) \cdot \frac{2^n - 2^{n-3} - 2^{n-5}}{2^n} \cdot \frac{1}{4} \right]$$

以此推估第  $n$  合獲勝的機率：經過第  $n$  回合的機率  $(1 - p_1 - p_2 - p_3 \cdots p_{n-3} - p_{n-2} - p_{n-1})$  乘以「骰到 1」才能獲勝(50%)的情況，在  $2^n$  中有  $2^{n-3}$  及第  $n-2$  回合無法動彈的有  $2^{n-5}$  種狀況，其餘的皆需要骰到 2 才能獲勝(25%)。

## 六、五顆棋子產生的棋局可能性

若以  $p$  表示棋子的數量， $a$  表黑方尚未動用到、在起點和到達終點的棋子數， $b$  為黑方到達終點的棋子， $c$  為白方尚未動用到、在起點和到達終點的棋子數， $d$  為白方到達終點的棋子。 $e$  為黑方在 A 區和 C 區的子。

$$\sum_{a=0}^p \left( \sum_{b=0}^a \left( \sum_{c=0}^p \left( \sum_{d=0}^c \left( \sum_{e=0}^{p-a} p_e^6 \times p_{p-a-e}^8 \times p_{p-c}^{14-p+a+e} \right) \right) \right) \right)$$

第 1、2 個加總代表黑方在起點到終點的棋子分配有 00、01、02、03...32、40、41、50 等，第 3、4 個加總則代表白方在起點到終點的子的分配，第 5 個加總表示先 P6 代表 A 區和 C 區的格子數，取  $e$  即黑方在 A 區和 C 區的子，乘 P8 表示 B 區的格子數，取黑方在 B 區的子即  $p-a-e$ ，乘  $P_{14-p+a+e}$  表示 14-黑方在 B 區「佔位」的子，取  $p-c$  即白方的子。

## 柒、 研究結論

- 一、判斷擲骰機率依骰子數不同得到  $\frac{C_k^n}{2^n}$  種可能。
- 二、使用正負評分法可以判斷每一步對黑白方的優劣勢。
- 三、被對手驅趕的風險可經由對手數量及其所具有之優勢評估。
- 四、玫瑰叢的設計增加雙方移動次數、移動步數與風險，玫瑰花叢佔有優勢：  
4 骰 4 玫瑰原版，玫瑰叢分別為 A4、B4 和 C2，其優勢值分別為  $|\pm 6.59|$ 、 $|\pm 11.09|$ 、 $|\pm 15.8|$ ；  
3 骰 3 玫瑰版本，玫瑰花叢分別為 A3、B2、B5 和 B8，其優勢值分別為  $|\pm 5.33|$ 、 $|\pm 8.53|$ 、 $|\pm 11.98|$ 、 $|\pm 13.89|$ ；  
4 骰 4 玫瑰版本玫瑰花叢分別為 A4、B4、B8，其優勢值分別為  $|\pm 5.59|$ 、 $|\pm 10.96|$ 、 $|\pm 13.72|$ 。
- 五、本研究得到棋局結果推估有幾種可能，五顆棋子產生的可能性為：

$$\sum_{a=0}^p \left( \sum_{b=0}^a \left( \sum_{c=0}^b \left( \sum_{d=0}^c \left( \sum_{e=0}^{p-a} p_e^6 \times p_{p-a-e}^8 \times p_{p-c}^{14-p+a+e} \right) \right) \right) \right) \right)$$

## 捌、 未來研究方向

本研究僅限於單顆棋子與單格棋盤輸贏之可能性，未來可以嘗試判斷變形棋盤與玫瑰花叢格關係，也可以延伸研究單格或更多、2 顆棋子以上的策略運用以判斷輸贏機會。

## 玖、參考文獻

- 平震傑(2011)。Shoot? Or not?—以全決策盒分析循環賽局之最佳策略。全國中小學科學展覽會第 46 屆高中組作品書。
- 吳孟芷、林亭仔、林庭瑋(2012)。「翻滾吧！黑白棋」。全國中小學科學展覽會第 52 屆國中組數學科作品書。
- 張鎮華(2017)。演算法觀點的圖論。臺北市：台大出版中心出版。
- 陳健儒、陳樟中、林芷音、董佳玲(2006)。「『矩』棋不定」。全國中小學科學展覽會第 46 屆高中組作品書。

The British Museum. Tom Scott vs. Irving Finkel: *The Royal Game of Ur*. Play through International Tabletop Day 2017. 2020/9/5 retrieved from

<https://www.youtube.com/watch?v=WZskjLq040I>

Deutsch, M. “*Solving the Game of UR*”. 2020/10/5 retrieved from

<http://matthewdeutsch.com/projects/game-of-ur/>.

Dauben, J. Senechal, M (2017). *Math at the Met. Amid the museum's 2 million works of art lie numerous mathematical curiosities*. Mathematical Intelligencer. 2020/10/5 retrieved from

<https://www.scientificamerican.com/article/math-at-the-met/>

Finkel, I. *Finkel I L 2007a / On the Rules for the Royal Game of Ur*. The British Museum.

2020/9/5 retrieved from <https://www.britishmuseum.org/collection/term/BIB9988>

Luce, S. *About the Royal Game of Ur*. 2020/10/5 retrieved from

<https://royalgameofuronline.com/>

Michon, G. P. (2020). *Royal game of Ur. Game of Twenty Squares*. 2020/9/5 retrieved from

<http://www.numericana.com/answer/ur.htm>

Tang, M. K. H., Tse, W. H, Zhao, V. R., Yap, A. Y. H. *Approaching The Royal Game of Ur with Genetic Algorithms and ExpectiMax*. 2020/10/5 retrieved from <https://home.cse.ust.hk/~yqsong/teaching/comp3211/projects/2017Fall/G27.pdf>

## 附錄、自製骰子生成器

```
#導入程式庫
from random import randint,seed

def Dice_L(Dice_number,Dice_sides,Dice_white_dot):

    #設定變數
    Average = 0 #平均值
    Point_sum = [] #骰的總點數
    Point_number = [] #點數總計
    for a in range(len(Dice_white_dot) + 1):
        Point_number.append(0)

    #耗時估算
    Time = Dice_number * 0.00006
    print('Generating data... please wait {} second!'.format(Time))

    #骰骰子
    for x in range(Dice_number):
        Dice = len(Dice_white_dot) #骰子數
        Point = 0 #點數
        for y in range(Dice):
            seed()
            Dice_point = randint(1,Dice_sides)
            if(Dice_point <= Dice_white_dot[y]):
                Point += 1
        Point_sum.append(Point)
        Point_number[Point] += 1
        Average += Point
    Average /= Dice_number

    #列印資料
    print('\nData:\n\t{}'.format(Point_sum))
    print('\n----...----')
    print('Summary:')
    for z in range(len(Point_number)):
        Percentage = Point_number[z] / Dice_number * 100 #占百分比率
        print('\t{} : {:.2f} %\t{} times'.format(z,Percentage,Point_number[z]))
    print('\n----...----')
    print('Average: {:.3f}'.format(Average))
```