

屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：索索相連

關 鍵 詞：索瑪立方塊、立體圖形、立方體（最多三個）

編號：A1050



索索相連

摘要

我們從暑假的數學課程認識了索瑪立方塊，並從蒐集資料的過程中，確定找出用索瑪立方塊組成 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體的排列方式和編碼模式，並且從文獻中提到能排出正立方體的各個方塊位置圖為基礎，排出「黑白相間且頂點為白色的 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體」，還有建立了它的索瑪譜。最後比對位置圖後，又找到了 3 組未列在位置圖的正立方體排法，也建立了它們的索瑪譜。

壹、研究動機

因為去年暑假，學校開設了許多課程，其中一項，長得非常像我熟知且拿手的魔術方塊，那就是索瑪立方塊(Soma cube)，我很自信的以為，只要是小學數學問題，就不用花到我三十分鐘來解決，況且這個東西長得一點都不像題目，還比較像是個玩具呢！

結果我徹底錯誤，我花了四十幾分鐘才拼好這看似簡單，實際卻很複雜的索瑪雙色立方體。後來從蒐集到的資料中發現，要排出一個 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體，已經由電腦程式驗證的排法竟然有 240 種，在過內更有人宣稱已經排出 480 種。這樣的說法激起了我的鬥志，讓我和伙伴動身研究這個由丹麥科學家皮亞特·海恩（Piet Hein）發明的數學立方塊。

貳、研究目的

在尋找和閱讀相關的資料和前輩所做過的科展資料中，這次的研究有以下的目的。

- 一、確定以索瑪立方塊組成 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體的排列方式和編碼模式。
- 二、探討 7 種索瑪立方塊在 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體的空間中的位置和組成 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體與否的關係。
- 三、以 14 白和 13 黑的小正立方體，組成堆成 7 種黑白不相連的索瑪立方塊，並找出堆疊成黑白相間且頂點為白色 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體的索瑪譜。

參、研究設備及器材

USL 連接方塊，魔術方塊，電腦，筆記本

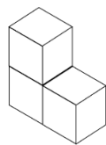
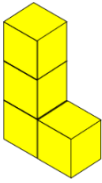


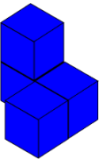
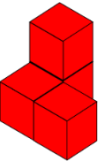

肆、研究過程或方法

一、蒐集索瑪立方塊的相關資料

(一)索瑪立方塊的發明

財團法人台北市九章數學教育基金會孫文先先生在一場演講會提到，索瑪立方塊是由丹麥科學家皮亞特·海恩（Piet Hein）聆聽偉納·海森伯格演講「量子物理」的場合裡構思出來的。原理在於將 4 個以內且大小相同的立方體(表一)，以面相接，構成的所有不規則形狀塊，可以重組成一個較大的立方體。

表一 4 個以內且大小相同的立方體以面相接構成的不規則形狀塊(七種顏色)

編號	1	2	3	4	5	6	7
七色							

(二)國際上索瑪譜的記錄

石峻維、陳盈安、吳孟芳(2015) 在「『索瑪』頻道—索瑪立方塊的研究與探討」一文中提到，國際上通常以圖形的正投影作為圖形的基底，由最前層至最後層，逐一在相對位置上填入索瑪組件的編號。如圖 1 所標示，它的編碼如下：


	編碼	前	中	後
	上	244	447	377
	中	216	366	357
	下	211	265	355

圖 1 七色索瑪立方塊正立方體配置

(三)索瑪立方塊組成 3×3×3 正立方體的排列方式總數

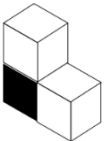
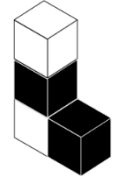


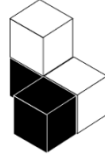


依據九章出版社與孫文先先生的演講資料表示，派克兄弟公司的索瑪立方

塊手冊上宣稱以索瑪立方塊組成 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體的排列方式總數有 240 種結構完全不同的解，並經過電腦程式證實。而孫文先生又提到，拼成 $3 \times 3 \times 3$ 立方體如果不論結構是否相同，其所有解答的個數為 $240 \times 48 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1105920$ 。之後又提了個問題：黑白相間且頂點為黑色的 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體結構不同的解有多少種？如何證明？這個問題就成了我們研究的主要目的。

(四)索瑪立方塊的排列解答

Christoph Peter-Orth(1985)在「 All solutions of the Soma cube puzzle. 」一文列出了 240 種的排列方式，提供了我們很大的參考。我們從這裡訂出「黑白相間且頂點為白色的 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體(如圖 2)結構不同的解那些排列方式？」的研究題目。

表二 黑白不相連的索瑪立方塊

編號	1	2	3	4	5	6	7
白 黑 雙 色							

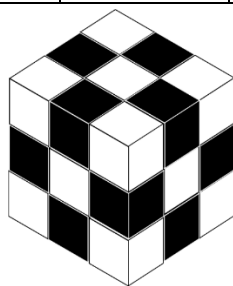


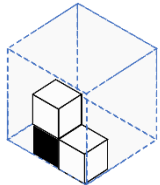
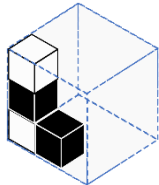
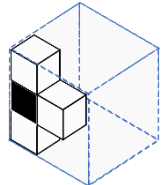
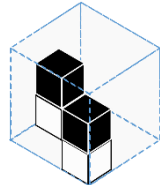
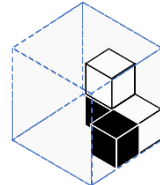
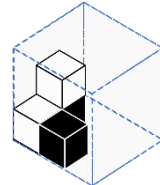
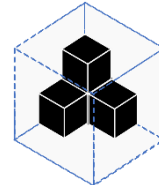
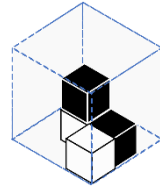
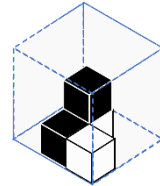
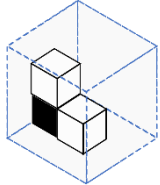
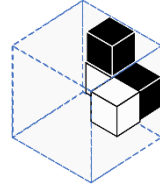
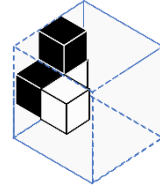
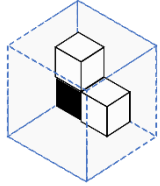
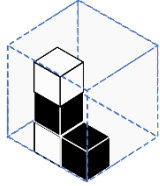
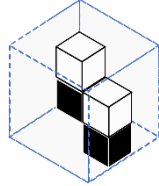
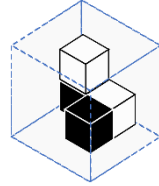
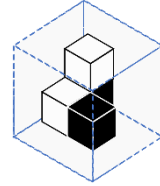

圖 2 黑白相間且頂點為白色的 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體

二、以索瑪立方塊進行如圖 2 黑白相間且頂點為白色的 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體組合排列

(一)七種索瑪立方塊所占正立方體的位置圖

綜合我們蒐集到的資料，都說明了如果要排出像圖 2 那樣子的黑白相間且頂點為白色的 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體，這七種索瑪立方塊在正方體中的位置如表三。

表三 七種索瑪立方塊在 3×3×3 正立方體中的可能位置分配表

編號	1	2	3	4	5	6	7
正常	1-1 	2-1 	3-1 	4-1 	5-1 	6-1 	7-1 
中央					5-2 	6-2 	
虧角	1-3 				5-3 	6-3 	
中央及虧角	1-4 	2-4 		4-4 	5-4 	6-4 	7-4 

(二)以七種黑白相間的索瑪立方塊排出黑白相間且頂點為白色的 3×3×3 正立方體的方式

單純用黑白相間的索瑪立方塊無法準確寫出正立方體的索瑪譜，因此會在排好圖 2 模式的「黑白相間且頂點為白色的 3×3×3 正立方體」後，再運用表一的七色索瑪立方塊配合排出像圖 1 的正立方體，然後再記錄索瑪譜。

伍、研究結果

一、以索瑪立方塊排出 3×3×3 的正立方體

我們用表一的 7 個索瑪立方塊，排出 3×3×3 的正立方體，從方塊的形狀，找出哪些方塊會占用正立方體中的八個頂點，以及其他位置。再藉由不同的顏色塊，可以鎖定每個號碼在正立方體中的位置。後來，就依照表三這

些方塊在正立方體中的位置和擺放方式，用表一和表二的索瑪立方塊排出了許多樣式顏色排列的 3×3×3 正立方體，並且記錄下它們的排法，製作索瑪譜。

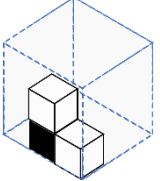
二、七種方塊配置的排列方式

依照第一項的做法，我們把白黑色的七種立方塊排成「黑白相間且頂點為白色的 3×3×3 正立方體」後記錄，得到了下列的結果：

(一)編號 1

1.正常排列(1-1)

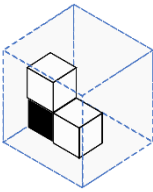
表四 編號 1-1 位置正方體的索瑪譜

1-1		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	2 4 4	4 4 7	3 7 7	3 3 3	4 3 7	2 7 7	3 3 3	4 3 7	4 7 7
	中	2 1 6	3 6 6	3 5 7	4 1 6	4 6 6	2 5 7	4 1 6	4 6 6	2 5 7
	下	2 1 1	2 6 5	3 5 5	4 1 1	2 6 5	2 5 5	2 1 1	2 6 5	2 5 5
		1-1-1			1-1-2			1-1-3		
	上	3 4 2	4 4 2	4 2 2	3 4 4	4 4 2	2 2 2	3 3 3	4 3 2	2 2 2
	中	3 1 7	3 7 7	5 5 6	3 1 7	3 7 7	5 5 6	4 1 7	4 7 7	5 5 6
	下	3 1 1	5 6 7	5 6 6	3 1 1	5 6 7	5 6 6	4 1 1	5 6 7	5 6 6
		1-1-4			1-1-5			1-1-6		
	上	2 2 2	4 3 2	3 3 3	3 3 3	4 3 7	2 7 7	3 3 3	4 3 7	4 7 7
	中	4 1 7	5 7 7	5 5 6	4 1 5	4 6 5	2 6 7	4 1 5	4 6 5	2 6 7
下	4 1 1	5 6 7	5 6 6	4 1 1	2 5 5	2 6 6	2 1 1	2 5 5	2 6 6	
	1-1-7			1-1-8			1-1-9			
上	2 4 4	4 4 7	3 7 7							
中	2 1 5	3 6 5	3 6 7							
下	2 1 1	2 5 5	3 6 6							
	1-1-10									

用 1-1 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3×3×3 正立方體，找到了 10 種排列方式。

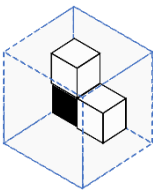
2. 虧角排列(1-3)

表五 編號 1-3 位置正方體的索瑪譜

1-3		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	2 4 4	4 4 5	3 5 5	5 5 3	7 5 3	7 7 3	5 5 2	7 5 2	7 7 2
	中	2 6 6	1 6 5	3 3 7	5 6 2	1 6 3	7 4 4	5 6 2	1 6 3	7 4 4
	下	2 2 6	1 1 7	3 7 7	6 6 2	1 1 2	4 4 2	6 6 3	1 1 3	4 4 3
		1-3-1			1-3-2			1-3-3		
	上	5 5 2	7 5 2	7 7 2	5 5 2	7 5 2	7 7 4	2 2 2	4 4 2	3 4 4
	中	5 6 2	1 6 4	7 3 4	5 6 2	1 6 4	7 3 4	5 5 6	1 5 6	3 3 7
	下	6 6 4	1 1 4	3 3 3	6 6 2	1 1 4	3 3 3	5 6 6	1 1 7	3 7 7
		1-3-4			1-3-5			1-3-6		
	上	4 2 2	4 4 2	3 4 2	3 2 2	3 3 2	3 4 2	2 2 3	2 3 3	2 4 3
	中	5 5 6	1 5 6	3 3 7	5 5 6	1 5 6	4 4 7	5 5 6	1 5 6	4 4 7
	下	5 6 6	1 1 7	3 7 7	5 6 6	1 1 7	4 7 7	5 6 6	1 1 7	4 7 7
	1-3-7			1-3-8			1-3-9			
上	7 7 2	7 6 2	6 6 2	7 7 4	7 6 2	6 6 2				
中	7 3 2	1 5 4	6 5 2	7 3 4	1 5 4	6 5 2				
下	3 3 3	1 1 4	5 5 4	3 3 3	1 1 4	5 5 2				
	1-3-10			1-3-11						

用 1-3 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體，找到了 11 種排列方式。

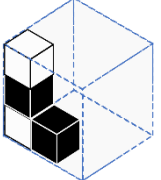
3. 中央及虧角排列(1-4)

1-4		<p>無法排出「黑白相間且頂點為白色的 $3 \times 3 \times 3$ 的正立方體」，因為這個位置的頂點是黑色。</p>
-----	---	---

(二)編號 2

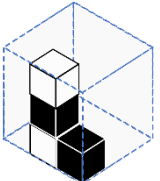
1.正常排列(2-1)

表六 編號 2-1 位置正方體的索瑪譜

2-1		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	2 4 4	4 4 5	3 5 5	2 6 6	4 3 6	3 3 3	2 7 7	6 5 7	6 5 5
	中	2 6 6	1 6 5	3 3 7	2 1 1	4 4 6	5 5 7	2 4 7	1 4 3	6 6 5
	下	2 2 6	1 1 7	3 7 7	2 2 1	5 4 7	5 7 7	2 2 3	1 4 3	1 4 3
		2-1-1			2-1-2			2-1-3		
	上	2 4 3	4 4 7	4 7 7	2 4 3	4 4 7	4 4 7	2 4 3	4 4 7	4 7 7
	中	2 3 3	1 5 5	6 6 7	2 3 3	6 5 5	6 6 7	2 3 3	1 5 6	1 1 7
	下	2 2 3	1 6 5	1 6 5	2 2 3	6 1 5	1 1 5	2 2 3	5 5 6	5 6 6
		2-1-4			2-1-5			2-1-6		
	上	2 4 3	4 4 7	4 4 7	2 4 3	6 4 1	6 6 1	2 4 3	4 4 5	4 5 5
	中	2 3 3	1 5 6	1 1 6	2 3 3	6 4 1	7 4 5	2 3 3	1 6 5	6 6 7
	下	2 2 3	5 5 6	5 6 6	2 2 3	7 5 5	7 7 5	2 2 3	1 1 7	6 7 7
		2-1-7			2-1-8			2-1-9		
	上	2 4 3	7 4 4	7 7 4	2 4 3	1 4 5	1 5 5	2 4 3	7 4 4	7 7 4
	中	2 3 3	5 6 1	7 6 6	2 3 3	1 4 5	6 4 7	2 3 3	5 6 1	7 1 1
	下	2 2 3	5 6 1	5 5 1	2 2 3	6 6 5	6 7 7	2 2 3	5 6 6	5 5 6
		2-1-10			2-1-11			2-1-12 (1-3-3)		
	上	2 4 3	7 3 3	7 7 3	7 7 4	7 4 4	2 4 3	2 4 3	5 1 3	5 1 3
	中	2 4 4	5 6 1	7 1 1	7 1 1	6 5 1	2 3 3	2 4 4	5 5 3	6 1 7
下	2 2 4	5 6 1	5 5 6	6 6 5	6 5 5	2 2 3	2 2 4	6 6 7	6 7 7	
	2-1-13 (1-3-4)			2-1-14 (1-3-5)			2-1-15 (1-3-6)			
上	2 4 3	7 1 3	1 1 3	2 4 3	4 4 5	4 5 5	2 4 3	7 3 3	7 7 3	
中	2 4 4	7 7 3	7 6 5	2 3 3	1 7 5	1 6 6	2 4 4	6 6 1	7 5 5	
下	2 2 4	6 5 5	6 6 5	2 2 3	7 7 6	1 7 6	2 2 4	6 5 1	6 5 1	
	2-1-16 (1-1-4)			2-1-17 (1-1-7)			2-1-18 (1-1-8)			

用 2-1 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3x3x3 正立方體，找到了 11 種排列方式(2-1-1 到 2-1-11)，經過和編號 1-3 對比後發現了 2-1-12 到 2-1-15 四種重複的排列法。比對編號 1-1，也找到了 3 種重複的排法(2-1-8，3-1-21 到 3-1-25)。

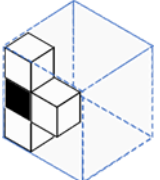
2.中央及虧角排列(2-4)

<p>2-4</p> 	<p>無法排出「黑白相間且頂點為白色的 3x3x3 的正立方體」，因為這個位置的頂點是黑色。</p>
--	--

(三)編號 3

1.正常排列(3-1)

表七 編號 3-1 位置正方體的索瑪譜

3-1		前 中 後			前 中 後			前 中 後		
			上	3 2 2	1 6 5	1 5 5	3 2 2	5 1 6	1 1 6	3 2 2
	中	3 3 2	1 6 5	6 6 7	3 3 2	5 6 6	5 5 7	3 3 2	1 6 6	5 5 6
	下	3 4 2	4 4 7	4 4 7	3 4 2	4 4 7	4 7 7	3 4 2	4 4 7	4 7 7
		3-1-1			3-1-2			3-1-3		
	上	3 2 2	5 5 7	3 2 2	3 2 2	7 1 5	7 7 5	3 2 2	7 1 5	1 1 5
	中	3 3 2	1 5 6	3 3 2	3 3 2	1 1 6	7 5 5	3 3 2	7 7 6	7 7 5
	下	3 4 2	4 4 6	3 4 2	3 4 2	4 4 6	4 6 6	3 4 2	4 4 6	4 4 6
		3-1-4			3-1-5			3-1-6		
	上	3 4 2	6 4 4	6 4 4	3 4 2	7 4 4	7 7 4	3 5 2	7 5 5	7 7 4
	中	3 3 2	6 7 7	5 5 7	3 3 2	5 6 1	7 6 6	3 3 2	1 6 5	7 4 4
	下	3 2 2	5 1 7	5 1 1	3 2 2	5 6 1	5 5 1	3 2 2	1 6 6	1 4 6
		3-1-7			3-1-8 (1-1-1)			3-1-9		
	上	3 2 2	6 6 1	6 4 1	3 4 2	7 4 4	7 7 4	3 7 7	1 1 7	2 2 6
	中	3 3 2	5 6 1	4 4 7	3 3 2	5 6 1	7 1 1	3 3 7	1 6 5	2 6 6
	下	3 5 2	5 5 7	4 7 7	3 2 2	5 6 6	5 5 6	3 5 5	4 4 5	2 4 4
		3-1-10			3-1-11 (1-3-2)			3-1-12 (1-3-1)		
	上	3 2 2	6 6 5	6 5 5	3 4 2	4 4 2	4 4 2	3 4 2	4 4 7	4 7 7
	中	3 3 2	1 6 5	1 1 7	3 3 7	1 6 5	6 6 5	3 3 2	1 5 6	1 1 7
	下	3 4 2	4 4 7	4 7 7	3 7 7	1 1 7	6 5 5	3 2 2	5 5 6	5 6 6
		3-1-13 (1-3-3)			3-1-14 (1-3-4)			3-1-15 (1-3-5)		
	上	3 2 2	6 5 5	6 6 5	3 7 7	1 1 7	5 6 6	3 4 2	4 4 7	4 7 7
	中	3 3 2	6 5 1	7 1 1	3 3 7	1 5 6	5 5 6	3 3 2	1 5 6	1 1 7
	下	3 4 2	7 4 4	7 7 4	3 4 2	4 4 2	4 2 2	3 2 2	5 5 6	5 6 6
		3-1-16 (1-3-9)			3-1-17 (1-3-7)			3-1-18 (1-3-8)		
	上	3 7 7	1 1 7	5 6 6	3 7 7	1 1 7	5 6 6	3 5 5	1 6 6	1 7 6
	中	3 3 7	1 5 6	5 5 6	3 3 7	1 5 6	5 5 6	3 3 5	1 7 5	7 7 6

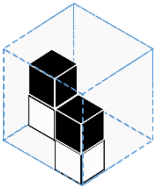
3-1		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	下	3 4 4	4 4 2	2 2 2	3 4 2	4 4 2	4 2 2	3 4 4	4 4 2	2 2 2
		3-1-19 (1-3-6)			3-1-20 (1-3-10)			3-1-21 (1-1-4)		
	上	3 5 5	1 6 6	1 7 6	3 2 2	6 7 7	6 7 1	3 4 2	4 4 2	4 2 2
	中	3 3 5	1 7 5	7 7 6	3 3 2	5 7 1	6 6 1	3 3 7	1 6 6	1 5 6
	下	3 4 2	4 4 2	4 2 2	3 4 2	5 4 4	5 5 4	3 7 7	5 5 7	1 5 6
		3-1-22 (1-1-5)			3-1-23 (1-1-7)			3-1-24 (1-1-8)		
	上	3 4 4	4 4 2	2 2 2						
	中	3 3 7	1 6 6	1 5 6						
	下	3 7 7	5 5 7	1 5 6						
		3-1-25 (1-1-9)								

用 3-1 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3x3x3 正立方體，找到了 11 種排列方式(3-1-1 到 3-1-11)，另外藉由比對編號 1-3，又找到了 10 種和 1-3 重複的排法(3-1-10 到 3-1-20)，比對編號 1-1，也找到了 6 種重複的排法(3-1-8，3-1-21 到 3-1-25)。

(四)編號 4

1.正常排列(4-1)

表八 編號 4-1 位置正方體的索瑪譜

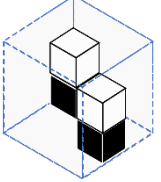
4-1		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	2 4 3	7 1 3	7 7 3	2 4 3	5 1 3	5 1 3	2 4 1	7 3 1	3 3 3
	中	2 4 4	1 1 3	7 6 5	2 4 4	5 5 3	6 1 7	2 4 4	7 7 1	7 6 5
	下	2 2 4	6 6 5	6 6 5	2 2 4	6 6 7	6 7 7	2 2 4	6 5 5	6 6 5
		4-1-1 (1-1-4)			4-1-2			4-1-3		
	上	2 4 3	6 3 3	6 6 3	2 4 3	2 3 3	2 2 3	3 4 3	3 3 2	3 2 2
	中	2 4 4	6 5 1	7 5 5	7 4 4	6 5 1	6 5 1	7 4 4	6 5 1	6 5 1
	下	2 2 4	7 1 1	7 7 5	7 7 4	7 5 5	6 6 1	7 7 4	7 5 5	6 6 1
		4-1-4			4-1-5			4-1-6		
	上	3 4 2	3 3 2	3 2 2	5 4 2	5 5 2	1 2 2	2 4 3	2 3 3	2 2 3
	中	5 4 4	5 6 1	7 1 1	7 4 4	1 5 6	1 3 6	5 4 4	5 6 1	7 1 1
	下	5 5 4	7 6 6	7 1 6	7 7 4	7 6 6	3 3 3	5 5 4	7 6 6	7 7 6
		4-1-7			4-1-8			4-1-9		
	上	3 4 2	3 3 2	3 2 2	2 4 3	7 3 3	7 7 3	3 4 2	2 3 3	2 2 3
	中	7 4 4	5 5 1	5 6 1	2 4 4	5 6 1	7 1 1	7 4 4	6 5 1	6 5 5
	下	7 7 4	7 6 6	5 6 1	2 2 4	5 6 6	5 5 6	7 7 4	7 1 1	6 6 5

4-1		前	中	後	前	中	後	前	中	後
		4-1-10			4-1-11 (1-3-4)			4-1-12 (1-3-5)		
	上	3 4 2	3 3 2	2 2 3	2 4 3	2 3 3	2 2 3	3 4 2	3 3 2	3 2 2
	中	7 4 4	6 5 1	6 5 5	7 4 4	6 5 1	6 5 5	5 4 4	5 7 1	6 7 7
	下	7 7 4	7 1 1	6 6 5	7 7 4	7 1 1	6 6 5	5 5 4	6 6 1	6 7 1
		4-1-13 (1-3-9)			4-1-14 (1-3-8)			4-1-15 (1-1-7)		
	上	2 4 3	2 3 3	2 2 3	2 4 3	7 3 3	7 7 3			
	中	5 4 4	5 7 1	6 7 7	2 4 4	6 6 1	7 5 5			
	下	5 5 4	6 6 1	6 7 1	2 2 4	6 5 1	6 5 1			
		4-1-16 (1-1-6)			4-1-17 (1-1-8)					

用 4-1 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3x3x3 正立方體，找到了 10 種排列方式。另外藉由比對編號 1 的立方塊，又找到了 10 種和編號 1-3 重複的排法(4-1-11 到 4-1-14)，還有 3 種和編號 1-1 重複的排法(4-1-1，4-1-15 到 4-1-17)。

2.中央及虧角(4-4)

表九 編號 4-4 位置正方體的索瑪譜

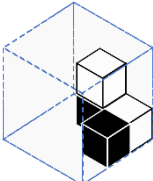
4-4		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	1 7 7	2 4 7	2 2 2	7 7 6	7 4 6	5 5 1	6 6 1	7 4 5	7 7 5
	中	1 3 7	1 4 4	5 5 6	7 6 6	5 4 4	5 1 1	6 1 1	6 4 4	7 5 5
	下	3 3 3	5 6 4	5 6 6	2 2 2	2 3 4	3 3 3	2 2 2	2 3 4	3 3 3
		4-4-1			4-4-2			4-4-3		
	上	6 6 1	7 4 5	7 7 5	7 7 6	7 4 6	5 5 1	3 7 7	6 4 7	6 6 2
	中	6 1 1	6 4 4	7 5 5	7 6 6	5 4 4	5 1 1	3 3 7	6 4 4	5 5 2
	下	3 3 3	2 3 4	2 2 2	3 3 3	2 3 4	2 2 2	3 1 1	5 1 4	5 2 2
		4-4-4			4-4-5			4-4-6		
	上	1 7 7	6 4 7	6 6 2	2 7 7	6 4 7	6 6 3	2 2 2	7 4 2	7 7 3
	中	1 1 7	6 4 4	5 5 2	2 1 7	6 4 4	5 3 3	6 1 1	5 4 4	7 3 3
下	3 3 3	5 1 4	5 2 2	2 1 1	2 5 4	5 5 3	6 6 1	5 6 4	5 5 3	
	4-4-7			4-4-8			4-4-9			
	上	2 2 2	6 4 2	6 6 3						
	中	7 1 1	6 4 4	5 3 3						
	下	7 7 1	7 5 4	5 5 3						
		4-4-10								

用 4-4 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3x3x3 正立方體，找到了 10 種排列方式。

(五)編號 5

1.正常排列(5-1)


表十 編號 5-1 位置正方體的索瑪譜

5-1		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	3 4 4	3 1 7	3 1 1	3 3 3	4 1 7	4 1 1	2 2 2	4 1 7	4 1 1
	中	4 4 2	3 7 7	6 5 7	4 3 2	4 7 7	6 5 7	4 3 2	4 7 7	6 5 7
	下	2 2 2	6 6 5	6 5 5	2 2 2	6 6 5	6 5 5	3 3 3	6 5 5	6 5 5
		5-1-1			5-1-2			5-1-3		
	上	3 4 2	3 1 7	3 1 1	1 1 2	4 3 7	3 3 3	3 3 3	4 3 7	4 7 7
	中	4 4 2	3 7 7	6 5 7	4 1 2	4 7 7	6 5 7	4 1 1	4 6 1	2 5 7
	下	4 2 2	6 6 5	6 5 5	4 2 2	6 6 5	6 5 5	2 6 6	2 6 5	2 5 5
		5-1-4			5-1-5			5-1-6		
	上	3 3 3	4 3 7	2 7 7	3 4 4	4 4 7	2 7 7	2 4 4	4 4 7	3 7 7
	中	4 1 1	4 6 1	2 5 7	3 1 1	3 6 1	2 5 7	2 1 1	3 6 1	3 5 7
	下	4 6 6	2 6 5	2 5 5	3 6 6	2 6 5	2 5 5	2 6 6	2 6 5	3 5 5
		5-1-7			5-1-8			5-1-9		
	上	1 4 4	1 3 7	3 3 3	1 4 2	1 3 7	3 3 3	2 7 1	2 7 7	2 6 6
	中	4 4 2	1 7 7	6 5 7	4 4 2	1 7 7	6 5 7	4 1 1	4 7 6	2 5 6
	下	2 2 2	6 6 5	6 5 5	4 2 2	6 6 5	6 5 5	3 3 3	4 3 5	4 5 5
	5-1-10			5-1-11			5-1-12 (1-1-1)			
上	4 7 1	2 7 7	2 6 6	2 7 1	2 7 7	3 6 6	3 7 1	2 7 7	2 6 6	
中	4 1 1	4 7 6	2 5 6	2 1 1	3 7 6	3 5 6	3 1 1	3 6 6	2 5 6	
下	3 3 3	4 3 5	2 5 5	2 4 4	4 4 5	3 5 5	3 4 4	4 4 5	2 5 5	
	5-1-13 (1-1-5)			5-1-14 (1-1-7)			5-1-15 (1-1-6)			

用 5-1 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3x3x3 正立方體，找到了 11 種排列方式。另外藉由比對編號 1 的立方塊，又找到了 4 種和編號 1-1 重複的排法(5-1-12 到 4-1-15)。

2.中央(5-2)


表十一 編號 5-2 位置正方體的索瑪譜

5-2		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	2 2 4	2 4 4	2 4 3	2 2 2	2 4 4	4 4 3	3 2 2	3 3 2	3 4 2
	中	7 1 1	6 5 1	6 3 3	7 1 1	6 5 1	6 3 3	7 1 1	6 5 1	6 4 4
	下	7 7 5	7 5 5	6 6 3	7 7 5	7 5 5	6 6 3	7 7 5	7 5 5	6 6 4
		5-2-1			5-2-2			5-2-3		
	上	2 2 3	2 3 3	2 4 3	1 6 4	1 4 4	2 4 3	1 6 3	1 3 3	2 4 3
	中	7 1 1	6 5 1	6 4 4	7 6 6	1 5 6	2 3 3	7 6 6	1 5 6	2 4 4
	下	7 7 5	7 5 5	6 6 4	7 7 5	7 5 5	2 2 3	7 7 5	7 5 5	2 2 4
		5-2-4			5-2-5			5-2-6		
	上	1 6 4	1 4 4	3 4 2	3 6 4	3 4 4	3 4 2	4 6 1	4 1 1	3 3 3
	中	7 6 6	1 5 6	3 3 2	7 6 6	3 5 6	1 1 2	7 6 6	4 5 6	4 3 2
下	7 7 5	7 5 5	3 2 2	7 7 5	7 5 5	1 2 2	7 7 5	7 5 5	2 2 2	
	5-2-7			5-2-8			5-2-9			
上	4 6 3	4 3 3	1 1 3							
中	7 6 6	4 5 6	4 1 2							
下	7 7 5	7 5 5	2 2 2							
	5-2-10									

用 5-2 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3x3x3 正立方體，找到了 10 種排列方式。

3.虧角(5-3)

表十二 編號 5-3 位置正方體的索瑪譜

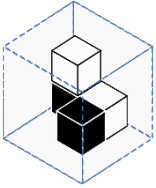
5-3		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	7 7 4	7 1 1	6 5 1	7 7 4	7 1 1	6 5 1	7 7 3	7 1 1	6 5 1
	中	7 4 4	6 6 5	6 5 5	7 4 4	6 6 5	6 5 5	7 3 3	6 6 5	6 5 5
	下	3 4 2	3 3 2	3 2 2	2 4 3	2 3 3	2 2 3	4 4 3	2 4 4	2 2 2
		5-3-1			5-3-2			5-3-3		
	上	7 7 3	7 1 1	6 5 1	7 7 3	2 1 1	7 3 3	7 7 3	7 3 3	6 5 3
	中	7 3 3	6 6 5	6 5 5	7 1 1	6 6 5	6 6 5	7 1 1	6 6 5	6 5 5
	下	4 4 3	2 4 4	2 2 2	4 4 1	2 4 4	2 4 4	2 4 1	2 4 4	2 2 4
		5-3-4			5-3-5			5-3-6		
	上	7 7 3	7 3 3	1 5 6	7 7 3	7 3 3	1 5 3	3 6 6	2 1 1	2 5 1
	中	7 6 6	1 6 5	1 5 5	7 6 6	1 6 5	1 5 5	3 6 7	3 6 5	2 5 5
下	2 4 6	2 4 4	2 2 4	4 4 6	2 4 4	2 2 2	3 7 7	4 4 7	2 4 4	

5-3		前	中	後	前	中	後	前	中	後
		5-3-7			5-3-8			5-3-9		
	上	2 6 6	2 1 1	3 5 1						
	中	2 6 7	3 6 5	2 5 5						
	下	2 7 7	4 4 7	3 4 4						
		5-3-10								

用 5-3 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3×3×3 正立方體，找到了 10 種排列方式。

4.中央及虧角(5-4)

表十三 編號 5-4 位置正方體的索瑪譜

5-4		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	2 1 1	2 5 6	2 6 6	4 1 1	2 5 6	2 6 6	3 1 1	2 5 6	2 6 6
	中	4 1 5	4 5 5	2 6 7	4 1 5	4 5 5	2 6 7	3 1 5	3 5 5	2 6 7
	下	3 3 3	4 3 7	4 7 7	3 3 3	4 3 7	2 7 7	3 4 4	4 4 7	2 7 7
		5-4-1			5-4-2			5-4-3		
	上	2 1 1	2 5 6	3 6 6	3 3 3	7 3 3	6 5 3	3 3 3	4 5 6	4 6 6
	中	2 1 5	3 5 5	3 6 7	1 5 5	6 6 5	6 5 5	4 3 5	4 5 5	2 6 7
	下	2 4 4	4 4 7	3 7 7	1 4 4	2 4 4	2 2 2	2 1 1	2 1 7	2 7 7
		5-4-4			5-4-5			5-4-6		
	上	1 2 2	7 5 2	7 7 2	3 3 3	4 5 7	4 7 7	3 4 4	3 5 7	3 7 7
	中	1 1 5	6 5 5	7 4 4	4 3 5	4 5 5	6 1 7	4 4 5	3 5 5	6 1 7
下	6 6 3	6 3 3	4 4 3	2 2 2	6 6 2	6 1 1	2 2 2	6 6 2	6 1 1	
	5-4-7			5-4-8			5-4-9			
上	6 6 2	6 5 2	1 2 2							
中	7 6 5	1 5 5	1 4 4							
下	7 7 3	7 3 3	4 4 3							
	5-4-10									

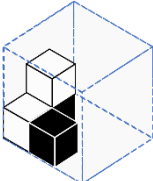
用 5-4 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3×3×3 正立方體，找到了 10 種排列方式。

(六)編號 6

1.正常(6-1)

表十四 編號 6-1 位置正方體的索瑪譜

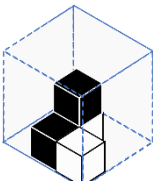
6-1		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	1 7 4	7 7 4	3 3 3	1 7 2	7 7 4	3 3 3	1 7 2	7 7 2	2 2 2
	中	1 1 2	6 7 4	5 3 4	1 1 2	6 7 4	5 3 4	1 1 2	6 7 3	4 3 2

6-1		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	下	6 6 2	6 5 2	5 5 2	6 6 2	6 5 2	5 5 4	6 6 3	6 5 3	3 3 3
		6-1-1			6-1-2			6-1-3		
	上	1 7 3	7 7 3	4 4 3	7 7 3	7 4 2	1 1 2	7 7 3	7 3 3	1 3 3
	中	1 1 2	6 7 3	5 4 4	7 3 3	6 4 4	5 1 2	7 4 2	6 4 4	5 1 4
	下	6 6 2	6 5 2	5 5 2	6 6 3	6 5 4	5 5 2	6 6 2	6 5 2	5 5 2
		6-1-4			6-1-5			6-1-6		
	上	7 7 1	7 1 1	3 3 3	7 7 3	7 1 3	4 4 3	7 7 4	7 1 4	3 3 3
	中	7 4 2	6 4 4	5 3 4	7 1 2	6 1 3	5 4 4	7 1 2	6 1 4	5 3 4
	下	6 6 2	6 5 2	5 5 2	6 6 2	6 5 2	5 5 2	6 6 2	6 5 2	5 5 2
		6-1-7			6-1-8			6-1-9		
	上	7 7 2	7 1 2	4 4 2	1 7 2	1 1 4	3 3 3	1 7 4	1 1 4	3 3 3
	中	7 1 2	6 1 3	5 4 4	7 7 2	6 7 4	5 3 4	7 7 2	6 7 4	5 3 4
	下	6 6 2	6 5 3	5 5 3	6 6 2	6 5 2	5 5 4	6 6 2	6 5 2	5 5 2
		6-1-10			6-1-11 (1-1-4)			6-1-12 (1-1-5)		
	上	1 7 3	1 1 3	4 4 3	1 7 2	1 1 2	4 4 2	3 4 2	3 1 1	3 5 1
中	7 7 2	6 7 3	5 4 4	7 7 2	6 7 3	5 4 4	4 4 2	3 6 5	7 5 5	
下	6 6 2	6 5 2	5 5 2	6 6 3	6 5 3	5 5 3	4 2 2	7 6 6	7 7 6	
	6-1-13 (1-1-6)			6-1-14 (1-1-7)			6-1-15 (1-1-9)			

用 6-1 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3×3×3 正立方體，找到了 10 種排列方式。

2. 中央(6-2)

表十五 編號 6-2 位置正方體的索瑪譜


6-2		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	2 4 4	4 4 7	3 7 7	3 4 4	4 4 7	2 7 7	3 3 3	4 3 7	2 7 7
	中	2 5 5	3 6 1	3 5 7	3 1 1	3 6 1	2 5 7	4 1 1	4 6 1	2 5 7
	下	2 6 6	2 6 5	3 5 5	3 6 6	2 6 5	2 5 5	4 6 6	2 6 5	2 5 5
		6-2-1			6-2-2			6-2-3		
	上	3 3 3	4 3 7	4 7 7	3 4 4	4 4 5	2 1 1	2 4 4	4 4 5	3 1 1
	中	4 1 1	4 6 1	2 5 7	3 5 5	3 6 5	2 1 7	2 5 5	3 6 5	3 1 7
	下	2 6 6	2 6 5	2 5 5	3 6 6	2 6 7	2 7 7	2 6 6	2 6 7	3 7 7
		6-2-4			6-2-5			6-2-6		
	上	3 3 3	4 3 5	2 1 1	3 3 3	4 3 5	4 1 1	2 1 1	4 1 5	3 3 3
	中	4 5 5	4 6 5	2 1 7	4 5 5	4 6 5	2 1 7	2 5 5	4 6 5	4 3 7
下	4 6 6	2 6 7	2 7 7	2 6 6	2 6 7	2 7 7	2 6 6	2 6 7	4 7 7	
	6-2-7			6-2-8			6-2-9			

6-2		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	4 1 1	4 1 5	3 3 3						
	中	2 5 5	4 6 5	4 3 7						
	下	2 6 6	2 6 7	2 7 7						
		6-2-10 (1-1-10)								

用 6-2 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3×3×3 正立方體，找到了 10 種排列方式。另外也藉著比對編號 1，找到和編號 1-1 重複的排列 1 種。

3. 虧角(6-3)

表十六 編號 6-3 位置正方體的索瑪譜


6-3		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	4 4 2	6 4 4	1 1 3	4 4 3	6 4 4	1 1 2	3 3 3	6 3 4	1 1 2
	中	6 6 2	6 5 3	7 1 3	6 6 3	6 5 3	7 1 2	6 6 4	6 5 4	7 1 2
	下	5 5 2	7 5 2	7 7 3	5 5 3	7 5 2	7 7 2	5 5 4	7 5 2	7 7 2
		6-3-1			6-3-2			6-3-3		
	上	3 3 3	6 3 4	1 1 4	4 4 1	6 4 4	3 3 3	4 4 2	6 4 4	3 3 3
	中	6 6 4	6 5 4	7 1 2	6 6 1	6 5 1	7 3 2	6 6 2	6 5 1	7 3 1
	下	5 5 2	7 5 2	7 7 2	5 5 2	7 5 2	7 7 2	5 5 2	7 5 2	7 7 1
		6-3-4			6-3-5			6-3-6		
	上	1 1 2	6 1 4	3 3 3	1 1 4	6 1 4	3 3 3	2 2 2	6 5 2	5 5 4
	中	6 6 2	6 5 4	7 3 1	6 6 2	6 5 4	7 3 4	6 6 1	6 5 1	7 5 5
下	5 5 2	7 5 2	7 7 1	5 5 2	7 5 2	7 7 2	4 4 1	7 4 4	7 7 5	
	6-3-7			6-3-8			6-3-9			
上	1 1 4	6 1 2	2 2 2							
中	6 6 4	6 5 4	7 5 5							
下	3 3 3	7 3 4	7 7 5							
	6-3-10									

用 6-3 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3×3×3 正立方體，找到了 10 種排列方式。

4. 中央及虧角(6-4)

表十七 編號 6-4 位置正方體的索瑪譜

6-4		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	1 1 3	7 6 5	7 7 5	3 3 3	7 6 5	7 7 5	1 1 4	7 6 5	7 7 5
	中	6 1 3	6 6 3	7 5 5	6 3 1	6 6 1	7 5 5	6 1 4	6 6 4	7 5 5
	下	4 4 3	2 4 4	2 2 2	4 4 1	2 4 4	2 2 2	3 3 3	2 3 4	2 2 2


6-4		前	中	後	前	中	後	前	中	後
		6-4-1			6-4-2			6-4-3		
	上	1 1 4	7 6 5	7 7 5	3 3 3	7 6 5	7 7 5	3 3 3	7 6 5	7 7 5
	中	6 1 4	6 6 4	7 5 5	6 3 1	6 6 1	7 5 5	6 3 1	6 6 1	7 5 5
	下	3 3 3	2 3 4	2 2 4	2 4 1	2 4 4	2 2 4	2 4 1	2 4 4	2 2 4
		6-4-4			6-4-5			6-4-6		
	上	1 1 2	5 6 2	5 5 3	1 1 3	5 6 2	5 5 2	1 1 4	5 6 2	5 5 2
	中	6 1 2	6 6 3	7 5 3	6 1 3	6 6 3	7 5 2	6 1 4	6 6 4	7 5 2
	下	4 4 2	7 4 4	7 7 3	4 4 3	7 4 4	7 7 2	3 3 3	7 3 4	7 7 2
		6-4-7 (1-1-1)			6-4-8			6-4-9 (1-1-2)		
	上	1 1 2	5 6 2	5 5 2						
中	6 1 4	6 6 4	7 5 2							
下	3 3 3	7 3 4	7 7 4							
	6-4-10									

用 6-4 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3x3x3 正立方體，找到了 10 種排列方式。

(七)編號 7

1.正常

表十八 編號 7-1 位置正方體的索瑪譜

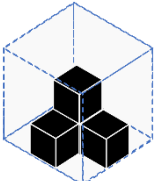
7-1		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	3 4 2	5 4 4	5 5 4	2 4 3	6 4 1	6 6 1	3 4 2	6 4 1	6 6 1
	中	3 1 2	3 6 6	7 5 6	2 3 3	6 4 1	7 4 5	3 3 2	6 4 1	7 4 5
	下	3 1 2	7 1 2	7 7 6	2 2 3	7 5 5	7 7 5	3 2 2	7 5 5	7 7 5
		7-1-1			7-1-2			7-1-3		
	上	3 4 2	6 4 1	6 6 1	3 4 2	1 4 5	1 5 5	1 1 2	5 5 4	5 5 3
	中	3 3 2	6 4 1	7 6 5	3 3 2	1 4 5	6 4 7	6 1 2	4 4 3	7 5 3
	下	3 2 2	7 5 5	7 7 5	3 2 2	6 6 7	6 7 7	6 6 2	7 6 2	7 7 3
		7-1-4			7-1-5			7-1-6		
	上	1 1 3	5 4 4	5 5 2	2 2 3	6 5 1	6 6 1	3 2 2	6 5 1	6 6 1
	中	6 1 3	4 4 3	7 5 2	2 3 3	6 5 1	7 5 5	3 3 2	6 5 1	7 5 5
下	6 6 3	7 3 2	7 7 2	2 4 3	7 4 4	7 7 4	3 4 2	7 4 4	7 7 4	
	7-1-7			7-1-8			7-1-9			
上	2 2 4	6 5 1	6 6 1	2 2 2	6 5 1	6 6 1	3 3 3	5 1 4	1 1 4	
中	2 4 4	6 5 1	7 5 5	2 4 4	6 5 1	7 5 5	7 3 4	5 6 4	5 5 2	
下	2 4 3	7 3 3	7 7 3	4 4 3	7 3 3	7 7 3	7 7 2	7 6 2	6 6 2	
	7-1-10			7-1-11			7-1-12 (1-1-8)			

7-1		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	3 3 3	5 1 4	1 1 2						
	中	7 3 4	5 6 4	5 5 2						
	下	7 7 4	7 6 2	6 6 2						
		7-1-13 (1-1-9)								

用 7-1 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3×3×3 正立方體，找到了 11 種排列方式。另外也藉著比對編號 1，找到和編號 1-1 重複的排列 2 種(7-1-12、7-1-13)。

2. 中央及虧角

表十九 編號 7-4 位置正方體的索瑪譜

7-4		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	5 5 4	5 4 4	3 4 2	5 5 4	5 4 4	2 4 3	5 5 3	5 3 3	2 4 3
	中	6 6 1	5 7 1	3 3 2	6 6 1	5 7 1	2 3 3	6 6 1	5 7 1	2 4 4
	下	6 7 1	6 7 7	3 2 2	6 7 1	6 7 7	2 2 3	6 7 1	6 7 7	2 2 4
		7-4-1			7-4-2			7-4-3 (1-1-5)		
	上	5 5 3	5 3 3	4 4 3	3 3 3	4 3 6	4 6 6	3 3 3	4 3 6	2 6 6
	中	6 6 1	5 7 1	2 4 4	4 1 1	4 7 5	2 6 5	4 1 1	4 7 5	2 6 5
	下	6 7 1	6 7 7	2 2 2	2 7 1	2 7 7	2 5 5	4 7 1	2 7 7	2 5 5
		7-4-4			7-4-5			7-4-6		
	上	3 4 4	4 4 6	2 6 6	2 4 4	4 4 6	3 6 6	2 4 3	6 4 4	6 6 4
	中	3 1 1	3 7 5	2 6 5	2 1 1	3 7 5	3 6 5	2 3 3	6 7 5	1 1 5
	下	3 7 1	2 7 7	2 5 5	2 7 1	2 7 7	3 5 5	2 7 3	2 7 7	1 5 5
		7-4-7			7-4-8			7-4-9		
	上	2 4 3	6 3 3	6 6 3	3 5 5	4 4 5	2 4 4	2 5 5	4 4 5	3 4 4
	中	2 4 4	6 7 5	1 1 5	3 5 6	3 7 6	2 1 1	2 5 6	3 7 6	3 1 1
	下	2 7 4	2 7 7	1 5 5	3 6 6	2 7 7	2 7 1	2 6 6	2 7 7	2 7 1
	7-4-10			7-4-11 (1-1-7)			7-4-12 (1-1-6)			

用 7-2 的方式來排頂點為白色且白黑相間的 3×3×3 正立方體，找到了 10 種排列方式。另外也藉著比對編號 1，找到和編號 1-1 重複的排列 2 種(7-4-11、7-4-12)。

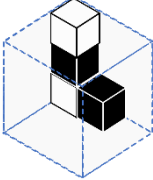
三、額外的排法

在排編號 1 索瑪立方體位置和紀錄索瑪譜的時候，我們發現不在前面表三內的排法，如下列表二十、表二十一、表二十二。

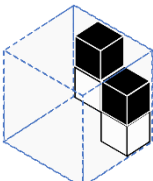
表二十 編號 1-5 位置正方體的索瑪譜

1-5		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	2 7 7	4 3 7	3 3 3	4 7 7	4 3 7	3 3 3	2 7 7	4 4 7	3 4 4
	中	2 6 7	4 5 5	4 1 5	2 6 7	4 5 5	4 1 5	2 6 7	3 5 5	3 1 5
	下	2 6 6	2 5 6	4 1 1	2 6 6	2 5 6	2 1 1	2 6 6	2 6 6	3 1 1
		2-1-1			2-1-2			2-1-3		
	上	3 7 7	4 4 7	2 4 4	2 7 7	4 4 7	3 4 4	3 7 7	4 4 7	2 4 4
	中	3 6 7	3 5 5	2 1 5	2 5 7	3 5 6	3 1 6	3 5 7	3 5 6	2 1 6
	下	3 6 6	2 5 6	2 1 1	2 5 5	2 6 6	3 1 1	3 5 5	2 6 6	2 1 1
		2-1-4			2-1-5			2-1-6		
	上	2 7 7 8	4 3 7	3 3 3	4 7 7	4 3 7	3 3 3	4 6 6	2 6 7	2 7 7
	中	2 5 7	4 5 6	4 1 6	2 5 7	4 5 6	4 1 6	4 5 6	4 5 5	2 1 7
下	2 5 5	2 6 6	4 1 1	2 5 5	2 6 6	4 1 1	3 3 3	4 3 5	2 1 1	
	2-1-7			2-1-8			2-1-9			

表二十一 編號 2-5 位置正方體的索瑪譜

2-5		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	虧角									
	上	4 7 7	4 4 7	2 4 3	7 7 4	7 4 4	2 4 3	7 7 3	7 3 3	2 4 3
	中	1 1 7	1 6 5	2 3 3	7 1 1	6 5 1	2 3 3	7 1 1	6 5 1	2 4 4
	下	6 5 5	6 6 5	2 2 3	6 6 5	6 5 5	2 2 3	6 6 5	6 5 5	2 2 4
	上	1 6 6	1 4 6	2 4 3	5 5 1	5 4 1	2 4 3	5 5 3	5 4 3	2 4 3
	中	5 4 7	1 4 6	2 3 3	7 4 6	5 4 1	2 3 3	7 4 6	5 4 3	2 1 1
	下	5 7 7	5 5 7	2 2 3	7 7 6	7 6 6	2 2 3	7 7 6	7 6 6	2 2 1
	上	5 5 3	5 4 3	2 4 3	3 6 6	4 4 6	2 4 4	1 6 4	1 4 4	2 4 3
	中	7 4 6	5 4 3	2 1 1	3 3 7	1 5 6	2 5 5	4 7 6 6	1 5 6	2 3 3
	下	7 7 6	7 6 6	2 2 1	3 7 7	1 1 7	2 2 5	7 7 5	7 5 5	2 2 3
	上	1 6 3	1 3 3	2 4 3						
	中	7 6 6	1 5 6	2 4 4						
	下	7 7 5	7 5 5	2 2 4						

表二十二 編號 2-5 位置正方體的索瑪譜

4-5 		前	中	後	前	中	後	前	中	後
	上	1 5 3	1 1 3	2 4 3	7 7 3	7 1 3	2 4 3	3 1 2	3 1 2	3 4 2
	中	5 5 7	5 6 3	2 4 4	7 5 6	1 1 3	2 4 4	7 1 2	3 6 6	5 4 4
	下	6 7 7	6 6 7	2 2 4	5 5 6	5 6 6	2 2 4	7 7 6	7 5 6	5 5 4
	上	2 5 3	1 3 3	1 4 3	7 7 3	7 3 3	1 4 3	1 1 3	7 1 3	2 4 3
	中	2 5 6	1 5 5	7 4 4	7 5 5	1 6 6	1 4 4	7 5 6	7 7 3	2 4 4
	下	2 2 6	7 6 6	7 7 4	2 2 5	2 6 5	2 6 4	5 5 6	5 6 6	2 2 4
	上	3 3 3	7 3 1	2 4 1	7 7 3	7 3 3	2 4 3	3 2 2	3 1 1	2 2 3
	中	7 5 6	7 7 1	2 4 4	7 6 6	5 5 1	2 4 4	6 5 2	3 5 5	6 6 7
	下	5 5 6	5 6 6	2 2 4	5 6 1	5 6 1	2 2 4	6 6 2	7 6 5	6 7 7
	上	2 2 3	2 1 3	2 4 3						
	中	6 6 7	1 1 3	5 4 4						
	下	6 7 7	6 5 7	5 5 4						

這三個表內的排列法，經過比對後，確定沒有在前面編號 1、2、4 三種索瑪立方塊的索瑪譜中出現，可以確定並沒有重複。

陸、討論

一、黑白相間的索瑪立方塊的顏色順序

在掌握以索馬立方塊排出 $3 \times 3 \times 3$ 的正立方體的模式後，我們可以很快的排出正立方體，尤其像孫文先生提到的，每一組都可以移動三個以內的元件成為新的排法。可是我們在記錄時遇到一個問題，編號 4、5、6 的立方塊，4-1 和 4-2 的顏色順序必須相反，5-1 與 5-4 和 5-2 與 5-3 也必須相反，6-1 與 6-4 和 6-2 與 6-3 也是，這可以用翻轉的方式做到如表二十三所列出的排法，這樣才能排出「黑白相間且頂點為白色的 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體」。

表二十三 七種顏色的索瑪立方塊與對應形狀的黑白相間索瑪立方塊配置表

編號	1	2	3	4	5	6	7
七色							
白黑雙色				 4-4 或 4-1	 5-1、5-4 或 5-2、5-3	 6-1、6-4 或 6-2、6-3	

上表中的編號 4、5、6 在翻轉之後成為另一種黑白排列的方式，而能排出黑白相間的正立方體，我們在排正立方體的時候有注意到這個條件，進一步就排出了符合 5-2、5-3、6-2、6-3 位置排列的正立方體。

二、確認重複排列的方式

一開始我們嘗試排列，都沒有想到重複的機會，所以就憑著組合一次就有一次經驗的方式，立刻記錄下索瑪譜，避免已經排列過的方式，在立方塊每個位置都是以自己動手嘗試排列的條件下，每個位置的排列都有 10 種以上的可能。

而在以編號 1 到 7 在各位置的基準排列過後，從編號 1-1 的位置開始，轉動有顏色的索瑪立方塊 3x3x3 正立方體，找到編號 2 到 7 的置放位置，並對照這些編號的位置，可以找出編號 2 到 7 在該位置的新排列法，是一開始排出的。正因為一開始沒有先把立方體轉到找後面的編號的位置，沒有干擾了那個時候的排列，才另外找到每組的另種排法。

三、不在文獻中出現的排列方式

我們查閱到的資料，都顯示要排出雙色相間的 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體，是依照表三所列出來的位置來排，才能排出正立方體。可是我們照著這樣排完，興致一來又排了所想到的每一個編號的可能位置的正立方體，結果找到了像表二十一 編號 1-5 立方塊、表二十二 編號 2-5 立方塊、表二十三 編號 4-5 立方塊共 3 種新的位置排列的索瑪譜，因為不管怎麼轉動，1-5 和編號 1 的其他、2-5 和編號 2 的其他，還有 4-5 也不會和編號 4 的其他位置的排列有重複的排列，所以可以確定這 3 種是不在其他文獻中出現的排列方式。

四、文獻中所列但無法排出所定條件的正立方體之索瑪立方塊的位置配置

儘管我們照著文獻來進行排列，但仍然出現像編號 1-4、編號 2-4 兩種配置方法的立方塊，無法排列出我們所定的「黑白相間且頂點為白色的 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體」，因為這兩個配置方式會使「黑色位在頂點」，不符合原先我們的設定：頂點為白色。

五、總排法應該以編號 3 的積木為最佳基準

因為編號 3 的積木只有一種位置可以排，所以如果要排出全部的方法，當然就是以編號 3 的全部方法做參考點，還要每個編號的立方塊排列的方式再一一比對，才有機會真正找到「黑白相間且頂點為白色的 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體」的全部排法。

柒、結論

一、依文獻中所提七個編號的索瑪立方塊於不同位置排列出黑白相間且頂點為白色的 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體方法多可行，其中兩個位置無法排出所要求的立方體

我們的研究方法是依照查到的文獻資料來設定各個編號的索瑪立方塊在正立方體中的位置，結果發現其中編號 1-4、編號 2-4 的配置，會使頂點成為黑色，就不符合原先設定的頂點為白色，建議這 2 個編號的排列法從表格中移除。

二、在研究過程中找到不在文獻中出現的排列方式

在排列正立方體的過程中，從產生疑問：像編號 1-5、2-5、4-5 等三種立方塊的位置，為什麼沒有列在表格中？就在嘗試了幾次後，發現確實有排出所定立方體的方式，如表二十、二十一、二十二。

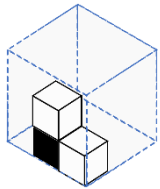
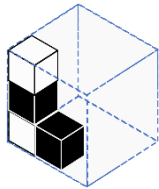
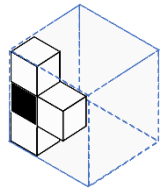
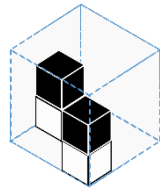
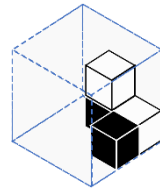
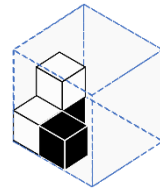
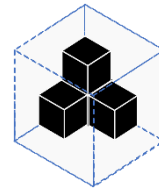
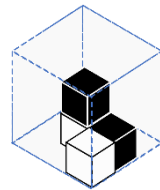
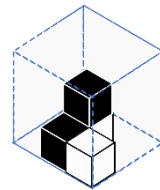
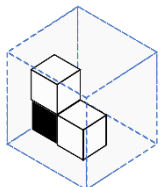
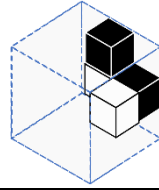
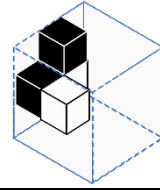
三、單一個編號的方塊需要翻轉才能符合實驗目的所說的可以排列出來的索瑪立方塊配置圖

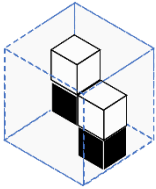
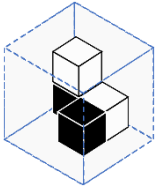
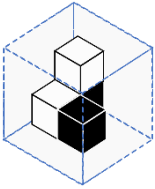


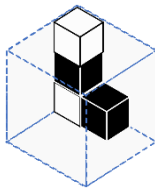
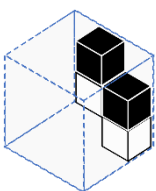
在 3x3x3 正立方體中，編號 4、5、6 在排列時需要翻轉，才能排列出符合設定的頂點為白色且黑白相間的正立方體。

四、能排列出「黑白相間且頂點為白色的 3x3x3 正立方體」的索瑪立方塊配置方式

在嘗試過所有的排列後，我們歸納出如表二十四的索瑪立方塊在 3x3x3 正立方體內的配置圖，和許多文獻資料中像表三的配置有三個差異，希望能再針對這方面繼續研究。

表二十四 排列出「黑白相間且頂點為白色的 3x3x3 正立方體」的索瑪立方塊配置方式

編號	1	2	3	4	5	6	7
正常	1-1 	2-1 	3-1 	4-1 	5-1 	6-1 	7-1 
中央					5-2 	6-2 	
虧角	1-3 				5-3 	6-3 	

編號	1	2	3	4	5	6	7
中央及虧角	1-4 原-無法 排出正立方體	2-4 原-無法 排出正立方體		4-4 	5-4 	6-4 	7-4 
其他	1-5 	2-5 		4-5 			

五、以編號 3 的積木為基準總排法可以找到全部排列的方法

如上表二十四，編號 3 的積木只有一種位置可以排，如果要排出全部的方法，以編號 3 的全部方法做參考點，再對每個編號的立方塊排列的方式一一比對，這樣有機會真正找到「黑白相間且頂點為白色的 3x3x3 正立方體」的全部排法。在這次的研究中沒能完成這項工作，我們會繼續努力把它完成。

捌、參考文獻資料

1. Martin Gardner(著)，葉偉文(譯)(2003)。迷宮、黃金比、索馬立方體。臺北，天下文化。
- 2.索瑪立方塊(Soma Cube) -九章出版社。網路查詢，2018/07/12 取自 <http://www.chiuchang.com.tw/toy/somacube.html>
- 3.孫文先，索瑪立方塊。財團法人台北市九章數學教育基金會。網路查詢，2020/08/02 取自 <http://tw.classf0001.uschoolnet.com/css000000096242/cm4k-1287718554-9450-6351.ppt>
- 4.石峻維、陳盈安、吳孟芳(2015)，「索瑪」頻道—索瑪立方塊的研究與探討。中華民國第 55 屆中小學科學展覽會。網路查詢(2020/08/02) 取自 <https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/55/pdf/030418.pdf>
5. SOMA Figures. 網路查詢(2020)取自 <http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/FIGURES/FIGURES.HTM>
6. 索瑪立方體 (SOMA CUBE)，網路查詢，2018/07/12 取自 <http://web.thu.edu.tw/linch/www/soma.pdf>

7. 正立方體的切割 - 智慧幾何聯盟(2020)。網路查詢，2020/09/20 取自 <http://www2.kuas.edu.tw/prof/cjh/2003puzzle/student/index4.htm>
8. ChristophPeter-Orth. All solutions of the Soma cube puzzle. *Discrete Mathematics* Volume 57, Issues 1–2, November 1985, Pages 105-121. Retrieved November 21, 2020, from <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X85901608>