屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數 學 科

組　　別：國 小 組

作品名稱：魔 幻 時 鐘

關 鍵 詞：最小公倍數、餘數

編號： A1040

魔幻時鐘

摘要

魔幻時鐘要按壓幾次才能回到原點呢？可以計算出某項組合所需的按壓次數嗎？透過對魔幻時鐘的研究，我得到下列發現 ：

1. 魔幻時鐘〔a、b、c〕回到原點的按壓次數為 a、b、c 的最小公倍數。
2. 當魔幻時鐘〔a、b、c〕的公因數大於 1 時，有些組合就不會出現。
3. 當魔幻時鐘〔a、b、c〕兩兩互質時，所有排列組合都會出現，也必會出現完整的(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)的組合。
4. 當魔幻時鐘〔a、b、c〕兩兩互質時，可以利用餘數法來計算出(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)中 xyz 的數列規則並計算出某組排列的按壓次數。

壹、研究動機

我曾經在書上無意間看見魔幻時鐘，覺得很有趣，後來，我才發現它有許多的可能，所以想要發現其中的秘密……。

貳、研究目的、

一、 探討魔幻時鐘〔a、b、c〕回到原點的按壓次數。
二、 探討魔幻時鐘〔2、3、5〕的規律性，求排列模式 (1,2,3)的按壓次數。
三、 探討魔幻時鐘〔2、3、6〕的規律性，求排列模式 (1,2,3)的按壓次數。
四、 探討魔幻時鐘〔a、b、c〕的類型。
五、 探討排列模式(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)中 x、y、z 的出現規則。
六、 探討如何計算魔幻時鐘排列模式 (1,2,3)的按壓次數。
七、 探討大於三組的魔數時鐘，其排列模式 (x, y ,z,w..)的按壓次數。

參、研究設備與器材

筆、紙和電腦。

肆、研究過程與方法

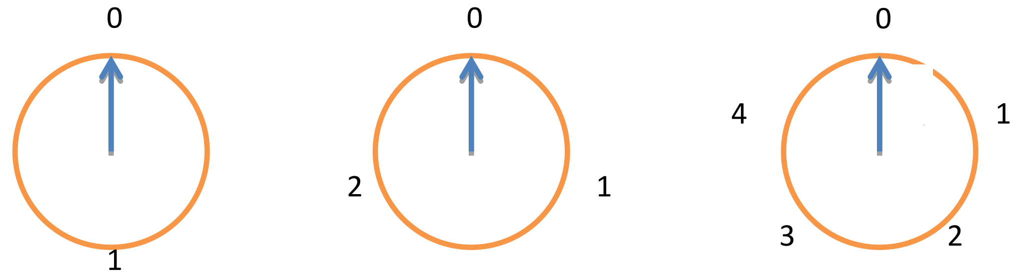
一、 魔幻時鍾〔a、b、c〕介紹與定義

魔幻時鐘〔2、3、5〕

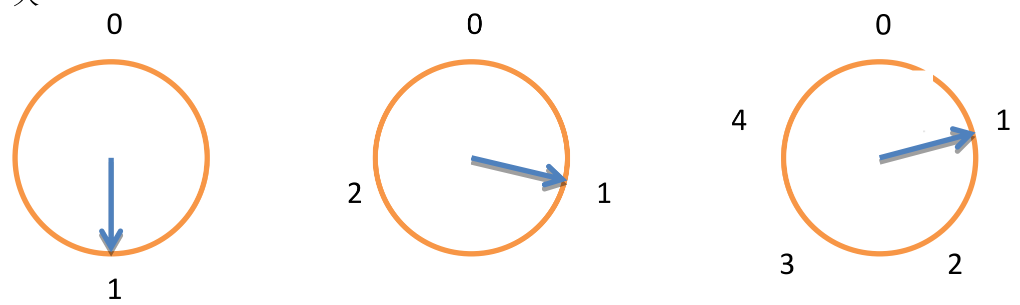
意指有三個時鐘 第一個有 2 個刻度，鐘面數字為 0 , 1;第二個有 3 個刻度，鐘面數字為 0 ,1 ,2; 第三個有 5 個刻度，鐘面數字為 0 , 1 , 2 , 3 , 4

每按一次走一格

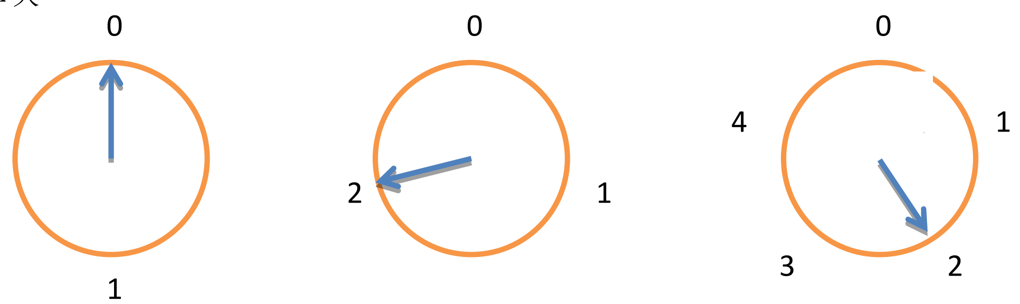
起始點



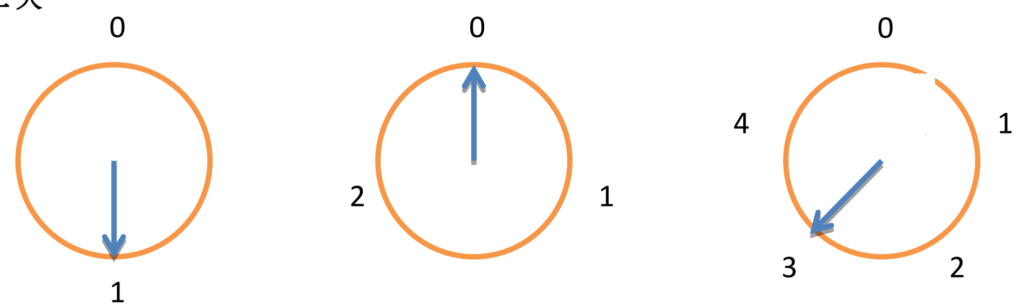
第一次



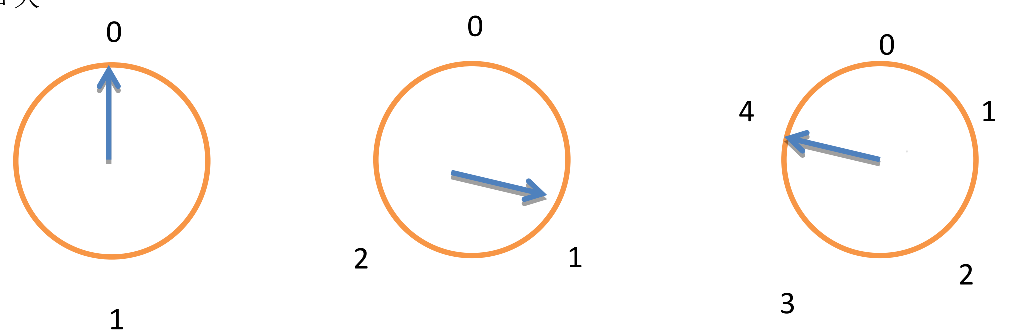
第二次



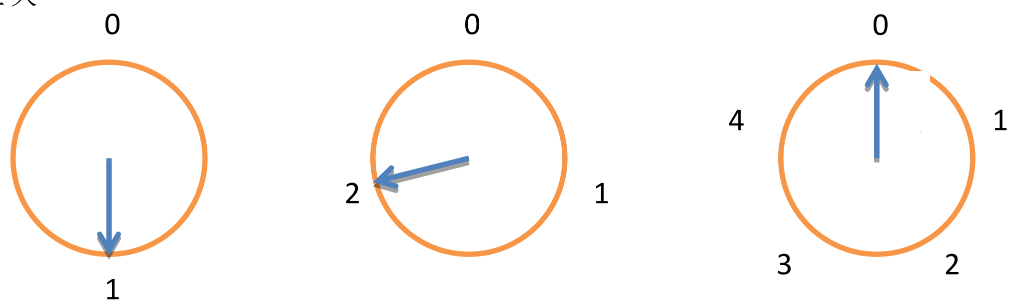
第三次



第四次



第五次



以數字簡化每次的組合型態，記錄如下:

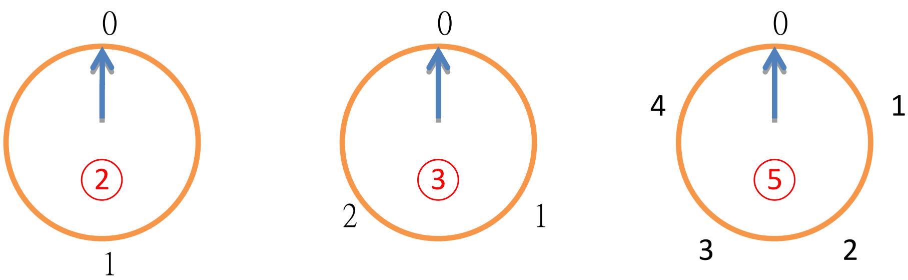
魔幻時鐘〔2、3、5〕 ＝起始點（ 0,0,0 ）→（ 1,1,1 ）→（ 0,2,2 ）→（ 1,0,3 ）→（ 0,1,4 ）→（ 1,2,0 ）→ ……………………

二、 探討魔幻時鐘〔2、3、5〕與魔幻時鐘〔2、3、6〕回到原點的按壓次數。

研究過程：

將魔幻時鐘〔2、3、5〕及魔幻時鐘〔2、3、6〕每按一次所得的結果表列出來，進行分析與研究

1、 魔幻時鐘〔2、3、5〕

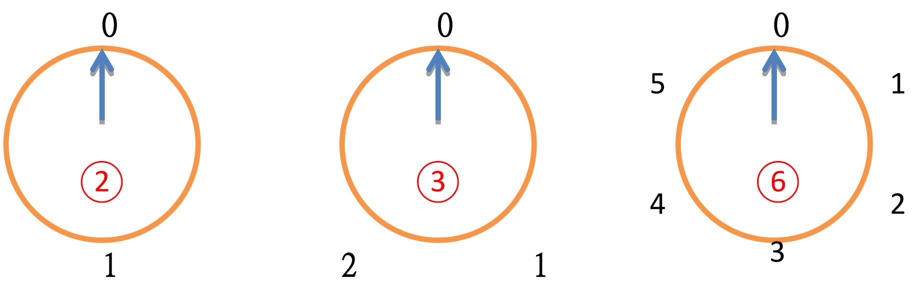


按壓次數	2	3	5
1	1	1	1
2	0	2	2
3	1	0	3
4	0	1	4
5	1	2	0
6	0	0	1
7	1	1	2
8	0	2	3
9	1	0	4
10	0	1	0
11	1	2	1

12	0	0	2
13	1	1	3
14	0	2	4
15	1	0	0
16	0	1	1
17	1	2	2
18	0	0	3
19	1	1	4
20	0	2	0
21	1	0	1
22	0	1	2
23	1	2	3
24	0	0	4
25	1	1	0
26	0	2	1
27	1	0	2
28	0	1	3
29	1	2	4
30	0	0	0

第 30 次 回到原點

2、 魔幻時鐘〔2、3、6〕



按壓次數	2	3	6
1	1	1	1
2	0	2	2
3	1	0	3
4	0	1	4
5	1	2	5
6	0	0	0

第 6 次 回到原點

討論：

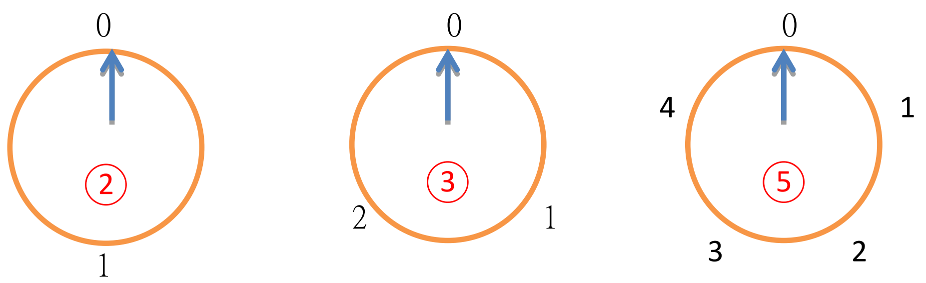
1. 時鐘〔2〕按 2 的倍數會歸 0，時鐘〔3〕按 3 的倍數會歸 0，時鐘〔5〕按 5 的倍數會歸 0。因此魔幻時鐘〔2、3、5〕要回到原點，就必須取 2 、3、 5 的最小公倍數計算。2 、3、 5 的最小公倍數是 30，根據上表得證魔幻時鐘〔2、3、5〕在第 30 次回到原點，排列模式(0 , 0 , 0)。
2. 2、3、6 的最小公倍數是 6，魔幻時鐘〔2、3、6〕在第 6 次時回到原點，排列模式(0 , 0 , 0)。

小結：魔幻時鐘〔a、b、c〕回到原點（0, 0 ,0）的按壓次數為 a、b、c 的最小公倍數。

(二)、 探討魔幻時鐘〔2、3、5〕的規律性，求排列模式（1 , 2 , 3)的按壓次數。

思路過程

魔幻時鐘〔2、3、5〕



1. 把魔幻時鐘 〔2、3〕 當成一組，在第 6、12、18、24、30 次時魔幻時鐘 〔2、3〕的指針會轉回原點(0 , 0 , z) ，此時魔幻時鐘〔5〕的鐘面數字分別為 1 、2、3、4、0
2. 把魔幻時鐘 〔3、5〕 當成一組，在第 15、30 次時魔幻時鐘 〔3、5〕的指針會轉回原點(x , 0 , 0) ，此時魔幻時鐘〔2〕的鐘面數字分別為 1 與 0
3. 把魔幻時鐘 〔2、5〕 當成一組，在第 10、20、30 次時魔幻時鐘 〔2、5〕的指針會轉回原點(0 , y , 0) ，此時魔幻時鐘〔3〕的鐘面數字分別為 1 、2、0

將結果分別以紅、黃、藍標注

將(x , 0 , 0)、(0 , y , 0)、(0 , 0 , z)分別以紅 黃 藍標注出顏色

按壓次數	2	3	5
1	1	1	1
2	0	2	2
3	1	0	3
4	0	1	4

5	1	2	0
6	0	0	1
7	1	1	2
8	0	2	3
9	1	0	4
10	0	1	0
11	1	2	1
12	0	0	2
13	1	1	3
14	0	2	4
15	1	0	0
16	0	1	1
17	1	2	2
18	0	0	3
19	1	1	4
20	0	2	0
21	1	0	1
22	0	1	2
23	1	2	3
24	0	0	4
25	1	1	0
26	0	2	1
27	1	0	2
28	0	1	3
29	1	2	4
30	0	0	0

回到原點

根據上述結果，排列模式（1,2,3)就是讓魔幻時鐘〔2〕＝1；魔幻時鐘〔3〕=2；魔幻時鐘〔5〕=3

即(x , 0 , 0)、(0 , y , 0)、(0 , 0 , z) 使 x=1　y=2　z=3

(1, 0 , 0)的間隔數是 15 次　　此時 y=0　z=0

(0 , 2 , 0)的間隔數是 10 次　　此時 x =0　z=0

(0 , 0 , 3)的間隔數是 6 次　　此時 x =0　y=0

排列模式（1,2,3）按壓次數計算為　$15 \times 1 + 10 \times 2 + 6 \times 3 = 53$

$53 - 30$ (一個周期為 30 次)＝23 次

要形成排列模式（1,2,3)須 按 壓　$30n + 23$ 次　　$n \ge 0$

討論：

如何推算魔幻時鐘的排列模式的按壓次數？可以先將魔幻時鐘〔2、3、5〕試為各獨立的時鐘 算出(x , 0 , 0)、(0 , y , 0)、(0 , 0 , z)中 x、y、z 的間隔數，就能推算出按壓次數。

小結：

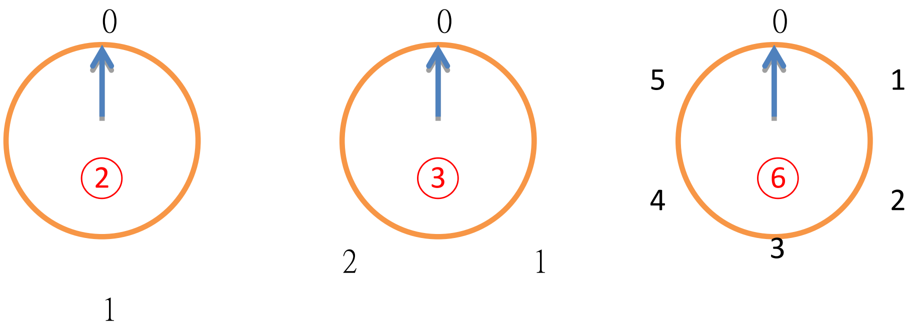
魔幻時鐘〔2、3、5〕排列模式 (1 , 2 , 3)的按壓次數為 3 0 n + 2 3

(三)、 探討魔幻時鐘〔2、3、6〕的規律性，求排列模式 (1 , 2 , 3)的按壓次數。

$\boxed{\text{我的提問}}$：

所有的魔幻時鐘都可以用公式來推算出排列模式嗎？

以魔幻時鐘〔2、3、6〕為例：



魔幻時鐘〔2、3、6〕

按壓次數	2	3	6	
1	1	1	1	
2	0	2	2	
3	1	0	3	
4	0	1	4	
5	1	2	5	
6	0	0	0	回到原點

$\boxed{\text{思路過程}}$：

1. 我們發現魔幻時鐘〔2、3、6〕沒有出現(x , 0 , 0) 、 (0 , y , 0) 、 (0 , 0 , z) 的組合情形。

   因此並無排列模式 (1 , 2 , 3)的解。

討論：

1. 魔幻時鐘〔2、3、6〕沒有出現(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)的組合，無法拆成單一時鐘來計算，沒辦法推論出排列模式。
2. 魔幻時鐘〔2、3、6〕公因數＞1，最小公倍數為6，第六次就回到原點，導致36種組合並未全部出現。

小結：

魔幻時鐘〔2、3、6〕無法按壓出排列模式（1,2,3）。

(四)、 探討魔幻時鐘的類型。

我的提問：

為什麼魔幻時鐘〔2、3、5〕可以推論出按壓次數，而魔幻時鐘〔2、3、6〕卻不能呢？是否與〔2、3、5〕互質有關？因此我將魔幻時鐘分為以下類型，分別探討如下：

魔幻時鐘〔a、b、c〕　a、b、c ∈ℕ 且 a、b、c>0

1、 **a、b、c 兩兩互質**

ex: 魔幻時鐘〔2、3、7〕 、 ex: 魔幻時鐘〔2、9、11〕

ex: 魔幻時鐘〔4、5、9〕 、 ex: 魔幻時鐘〔4、9、25〕

2、 **a、b、c 有兩對互質**

ex: 魔幻時鐘〔2、3、4〕 、 ex: 魔幻時鐘〔3、4、9〕

3、 **a、b、c 有一對互質**

ex: 魔幻時鐘〔2、3、6〕 、ex: 魔幻時鐘〔4、5、20〕

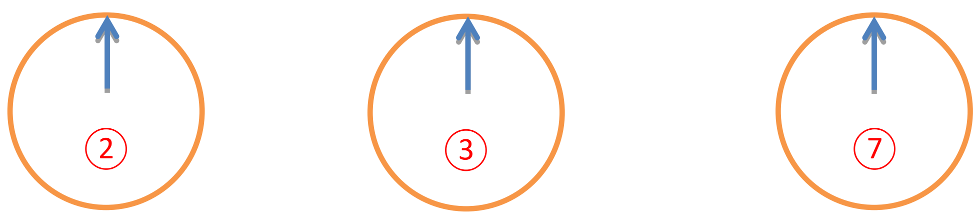
4、 **a、b、c 有 0 對互質**

ex: 魔幻時鐘〔2、4、8〕 、ex: 魔幻時鐘〔3、6、9〕

思路過程:

1、 **a、b、c 兩兩互質**

魔幻時鐘〔2、3、7〕



魔幻時鐘〔2、3、7〕 排列情形如下：將(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)分別

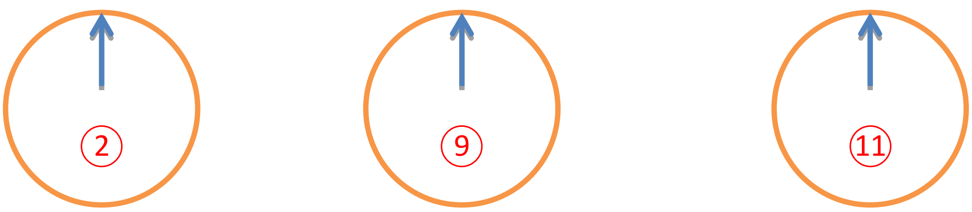
以紅、黃、藍標注

按壓次數	2	3	7	按壓次數	2	3	7
1	1	1	1	22	0	1	1
2	0	2	2	23	1	2	2
3	1	0	3	24	0	0	3
4	0	1	4	25	1	1	4
5	1	2	5	26	0	2	5
6	0	0	6	27	1	0	6
7	1	1	0	28	0	1	0
8	0	2	1	29	1	2	1
9	1	0	2	30	0	0	2
10	0	1	3	31	1	1	3
11	1	2	4	32	0	2	4
12	0	0	5	33	1	0	5
13	1	1	6	34	0	1	6
14	0	2	0	35	1	2	0
15	1	0	1	36	0	0	1
16	0	1	2	37	1	1	2
17	1	2	3	38	0	2	3
18	0	0	4	39	1	0	4
19	1	1	5	40	0	1	5
20	0	2	6	41	1	2	6
21	1	0	0	42	0	0	0

討論：

魔幻時鐘〔2、3、7〕出現完整的(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)排列模式。

魔幻時鐘〔2、9、11〕



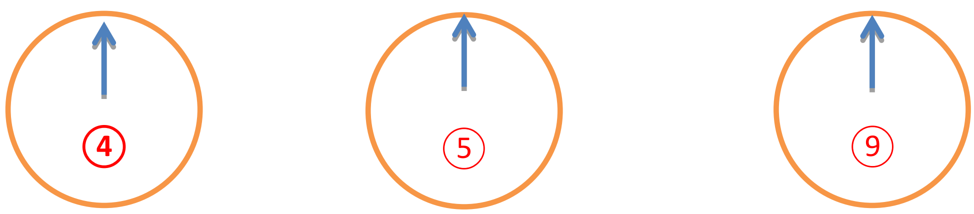
因篇幅關係，只列出(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)，標注如下:

按壓次數	2	9	11
18	0	0	7
22	0	4	0
36	0	0	3
44	0	8	0
54	0	0	10
66	0	3	0
72	0	0	6
88	0	7	0
90	0	0	2
99	1	0	0
108	0	0	9
110	0	2	0
126	0	0	5
132	0	6	0
144	0	0	1
154	0	1	0
162	0	0	8
176	0	5	0
180	0	0	4
198	0	0	0

討論：

魔幻時鐘〔2、9、11〕出現完整的(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)排列模式。

魔幻時鐘〔4、5、9〕



把(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)列出，結果如以下:

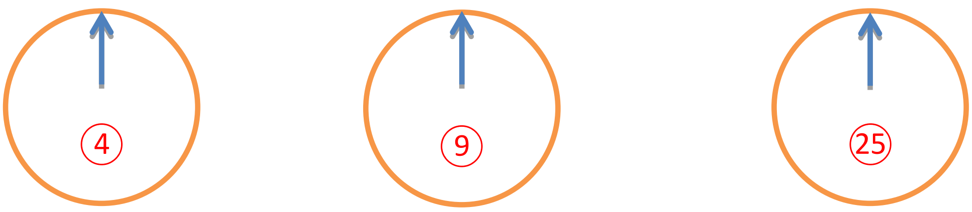
按壓次數	4	5	9
20	0	0	2
36	0	1	0

40	0	0	4
45	0	0	1
60	0	0	6
72	0	2	0
80	0	0	8
90	2	0	0
100	0	0	1
108	0	3	0
120	0	0	3
135	3	0	0
140	0	0	5
144	0	4	0
160	0	0	7
180	0	0	0

討論：

魔幻時鐘〔4、5、9〕出現完整的(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)排列模式。

魔幻時鐘〔4、9、25〕



把(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)列出，結果如以下:

按壓次數	4	9	25
36	0	0	11
72	0	0	22
100	0	1	0
108	0	0	8
144	0	0	19
180	0	0	5
200	0	2	0
216	0	0	16

225	1	0	0
252	0	0	2
288	0	0	13
300	0	3	0
324	0	0	24
360	0	0	10
396	0	0	21
400	0	4	0
432	0	0	7
450	2	0	0
468	0	0	18
500	0	5	0
504	0	0	4
540	0	0	15
576	0	0	1
600	0	6	0
612	0	0	12
648	0	0	23
675	3	0	0
684	0	0	9
700	0	7	0
720	0	0	20
756	0	0	6
792	0	0	17
800	0	8	0
828	0	0	3
864	0	0	14
900	0	0	0

討論：

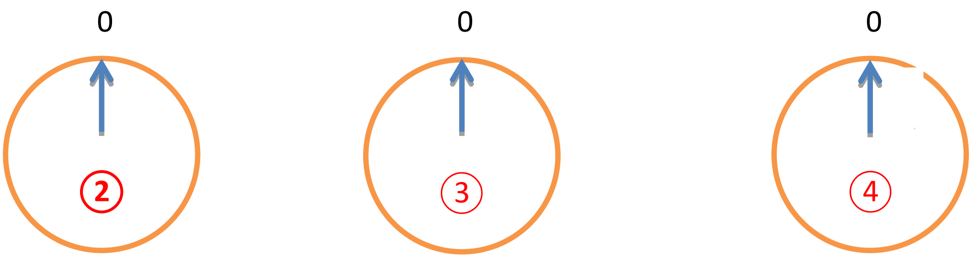
魔幻時鐘〔4、9、25〕出現完整的(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)排列模式。

小結：

魔幻時鐘〔2、3、7〕、魔幻時鐘〔2、9、11〕、魔幻時鐘〔4、5、9〕、魔幻時鐘〔4、9、25〕均出現完整的(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)排列模式。

2、　a、b、c　兩對互質

魔幻時鐘〔2、3、4〕



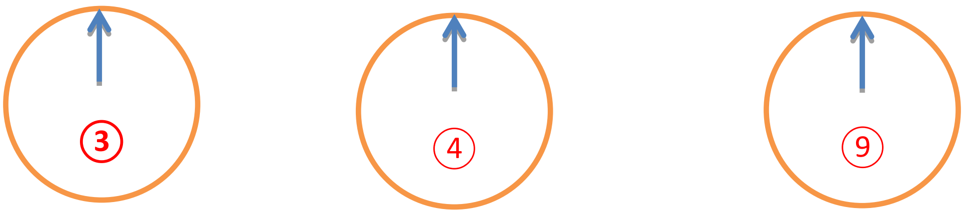
把(x,0,0)、 (0,y,0)、 (0,0,z)列出，結果如以下:

按壓次數	2	3	4
4	0	1	0
6	0	0	2
8	0	2	0
12	0	0	0

討論：

魔幻時鐘〔2〕只出現 0 ，魔幻時鐘〔4〕只出現 0、2

魔幻時鐘〔3、4、9〕



把(x,0,0)、 (0,y,0)、 (0,0,z)列出，結果如以下:

按壓次數	3	4	9
9	0	1	0
12	0	0	3
18	0	2	0
24	0	0	6
27	0	3	0
36	0	0	0
45	0	1	0
48	0	0	3
54	0	2	0

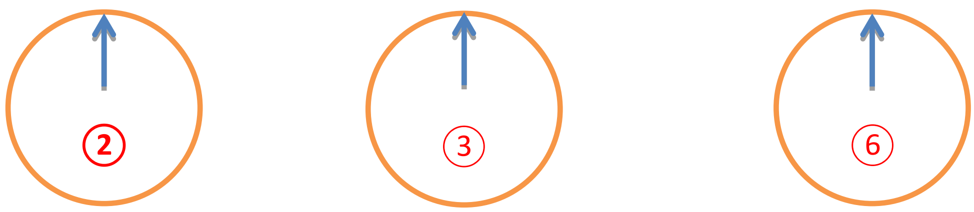
60	0	0	6
63	0	3	0
72	0	0	0
81	0	1	0
84	0	0	3
90	0	2	0
96	0	0	6
99	0	3	0
108	0	0	0

討論：

魔幻時鐘〔9〕只出現 0、3、6

3、 a、b、c 一對互質

魔幻時鐘〔2、3、6〕



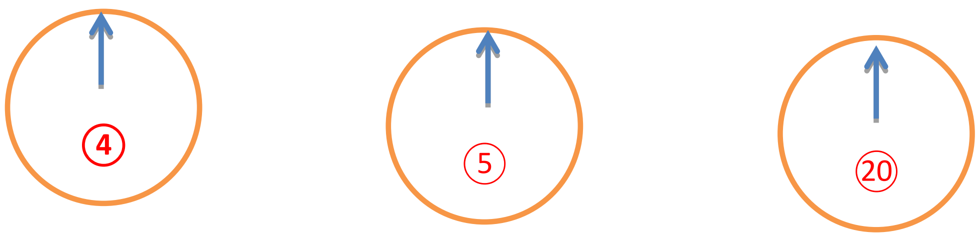
把(x,0,0)、 (0,y,0)、 (0,0,z)列出，結果如以下:

按壓次數	2	3	6
6	0	0	0

討論：

魔幻時鐘〔2，3，6〕只出現(0,0,0)

魔幻時鐘〔4、5、20〕



把(x,0,0)、 (0,y,0)、 (0,0,z)列出，結果如以下:

按壓次數	4	5	20
20	0	0	0

討論：

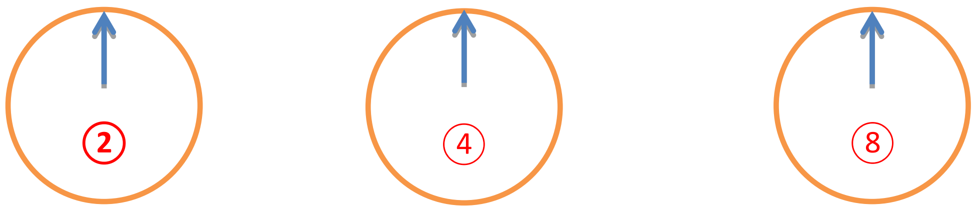
魔幻時鐘〔4、5、20〕只出現(0,0,0)

小結：

魔幻時鐘〔2，3，6〕與魔幻時鐘〔4，5，20〕沒有出現完整的(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)排列模式

4、 a、b、c 0 對互質

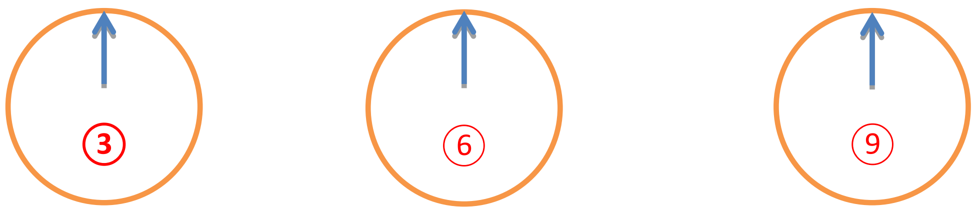
魔幻時鐘〔2、4、8〕



把(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)列出，結果如以下:

按壓次數	2	4	8
4	0	0	4
8	0	0	0

魔幻時鐘〔3，6，9〕



1

把(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)列出，結果如以下:

按壓次數	3	6	9
6	0	0	6
9	0	3	0

12	0	0	3
18	0	0	0

討論：

魔幻時鐘〔2、4、8〕與魔幻時鐘〔3、6、9〕沒有出現完整的(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)排列模式

小結：

1. **當魔幻時鐘〔a、b、c〕兩兩互質時，最小公倍數為 a×b×c ，一定會出現所有的排列組合，因此一定會有(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)排列模式。**
2. **魔幻時鐘〔a、b、c〕，且公因數>1 時，最小公倍數必會小於 a×b×c ， 因此，有一些組合並不會出現，不會有完整的(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)排列模式。**
3. **要推算出魔幻時鐘〔a、b、c〕某一組排列模式，其組合一定要有(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)。因此 a、b、c 一定要互質。**

(五)、 **探討魔幻時鐘〔a、b、c〕排列模式(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z) 中 x y z 的出現規則。**

$\boxed{\text{我的提問}}$：

當魔幻時鐘〔a、b、c〕互質時，其(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)，x、y、z 出現規則為何?

探討如下：

1. 魔幻時鐘〔2、3、5〕 x y z 出現的順序如下

魔幻時鐘〔2〕(x , 0 , 0) x 出現順序為 1 , 0
魔幻時鐘〔3〕(0 , y , 0) y 出現順序為 1 , 2 , 0
魔幻時鐘〔5〕(0 , 0 , z) z 出現順序為 1 , 2 , 3 , 4 , 0

按壓次數	2	3	5
6	0	0	1
10	0	1	0
12	0	0	2
15	1	0	0
18	0	0	3
20	0	2	0
24	0	0	4
30	0	0	0

2. 魔幻時鐘〔2、3、7〕　x　y　z 出現的順序如下

魔幻時鐘〔2〕(x , 0 , 0)　x 出現順序為　1 , 0

魔幻時鐘〔3〕(0 , y , 0)　y 出現順序為　2 , 1 , 0

魔幻時鐘〔7〕(0 , 0 , z)　z 出現順序為　6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0

按壓次數	2	3	7
6	0	0	6
12	0	0	5
14	0	2	0
18	0	0	4
21	1	0	0
24	0	0	3
28	0	1	0
30	0	0	2
36	0	0	1
42	0	0	0

我發現 x　y　z 出現的順序與餘數相關。

魔幻時鐘〔2、3、5〕

魔幻時鐘〔5〕(0 , 0 , z) ，z 的出現順序規則

先取 2 和 3 的最小公倍數， 6，再把 6 與 5 相除，餘數為 1（6÷5＝1...1）

得(0 , 0 , z)　$Z_1 = 1$

Z_2 = （餘　數 + 6）÷ 5　　得　$Z_2 = 2$　　以此類推，結果如下:

Z_1　6 ÷ 5 ＝ 1 ... 1

Z_2　1 + 6 = 7　　7 ÷ 5 = 1 ... 2

Z_3　2 + 6 = 8　　8 ÷ 5 = 1 ... 3

Z_4　3 + 6 = 9　　9 ÷ 5 = 1 ... 4

Z_5　4 + 6 = 1 0　　1 0 ÷ 5 = 2 ... 0

得知魔幻時鐘〔2、3、5〕(0 , 0 , z)　z 出現順序為　1 , 2 , 3 , 4 , 0

魔幻時鐘〔2、3、7〕

求出(0 , 0 , z) 的順序，結果如下:

6 ÷ 7 ＝ 0 ... 6

6 + 6 = 1 2　　1 2 ÷ 7 = 1 ... 5

5 + 6 = 1 1　　1 1 ÷ 7 = 1 ... 4

4 + 6 = 1 0　　1 0 ÷ 7 = 1 ... 3

3 + 6 = 9　　9 ÷ 7 = 1 ... 2

2 + 6 = 8　　　　8 ÷ 7 = 1 … 1

1 + 6 = 7　　　　7 ÷ 7 = 1 … 0

得知魔幻時鐘〔2、3、7〕 其(0 , 0 , z)　　z 出現順序為　6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0

小結：

1. **魔幻時鐘〔a，b，c〕，且三數互質，欲求得(0 , 0 , z) 的數列順序，先得出 a，b 的最小公倍數(互質,最小公倍數為 a × b)，再除以 c 所得的餘數即為 z。**

$a \times b \div c = n_1 \dots z_1$

$(z_1 + a \times b) \div c = n_2 \dots z_2$

$(z_2 + a \times b) \div c = n_3 \dots z_3$

$(z_3 + a \times b) \div c = n_4 \dots z_4$

$(z_4 + a \times b) \div c = n_5 \dots z_5$

z_1、z_2、z_3、z_4、z_5、z_6、z_7⋯⋯⋯表示(0 , 0 , z) 排列模式出現的順序

(六)、 探討如何計算排列模式 (1 , 2 , 3)的按壓次數

$\boxed{\text{我的思路}}$：

　　魔幻時鐘要能算出排列模式 (1 , 2 , 3)須按壓幾次，必須先判斷是否能計算，如果三數互質，就能出現所有的(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)

1. 魔幻時鐘〔2　5　7 〕的魔幻時鐘的公式:

　①先判斷三數是否互質

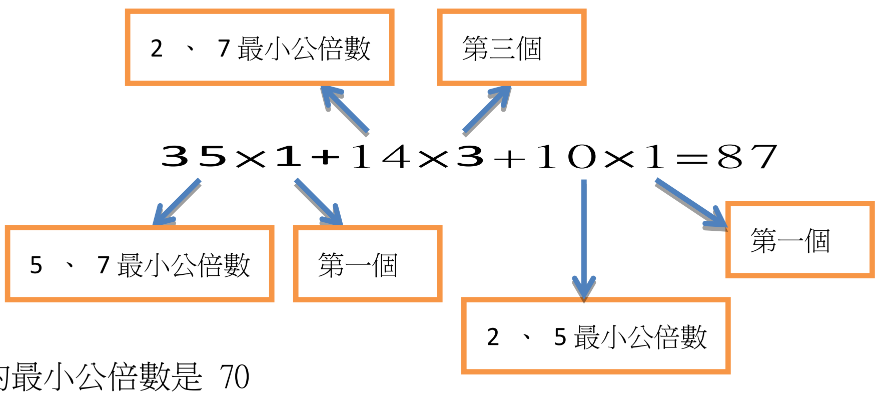
　②依上述方法計算出 x y z 出現順序

魔幻時鐘〔2〕(x , 0 , 0)　x　出現順序為　$\boxed{1}$, 0

魔幻時鐘〔5〕(0 , y , 0)　y　出現順序為　4 , 3 , $\boxed{2}$, 1 , 0

魔幻時鐘〔7〕(0 , 0 , z)　z　出現順序為　$\boxed{3}$, 6 , 2 , 5 , 1 , 4 , 0

魔幻時鐘〔2　5　7〕 的排列模式 (1 , 2 , 3)的按壓次數計算如下：



2,5,7 的最小公倍數是 70

得 87-70=17

排列模式 (1 , 2 , 3)的按壓次數 為 17+70n　　n≥0

依照上述方法可求得各個魔幻時鐘排列模式（1 , 2 , 3)按壓次數如下：

魔幻時鐘〔2　9　11〕	47+198n
魔幻時鐘〔5　7　9　〕	156+315n
魔幻時鐘〔3　7　8〕	163+169n
魔幻時鐘〔4　5　9〕	57+180n
魔幻時鐘〔4　9　25〕	353+900n

n≥0

利用 excel 驗證，正確無誤。

(七)、 利用推論公式計算大於三組的魔幻時鐘其某項組合的按壓次數

我的提問：

魔幻時鐘〔a，b，c，d〕　a、b、c、d∈ℕ　a、b、c、d>0 且互質，可以利用上述方法求得排列模式(1，2，3，4) 地按壓次數嗎？ 以四組數字得魔幻時鐘〔 2,3,5,7 〕 及 五組數字的魔幻時鐘〔 2,3,5,7,11 〕 為 例 試 算

1. 四組數字　魔幻時鐘〔 2、 3、 5、 7〕

思 路 歷 程：

2,3,5,7 互質，因此可利用公式推算

魔幻時鐘〔2〕(x , 0 , 0 , 0)　x　出現順序為　1, 0

計算如下：

3×5×7=105

105÷2=52⋯ 1

1+105÷2=53⋯ 0

魔幻時鐘〔3〕(　0 , y , 0 ,　0)　y　出現順序為　1 , 2, 0

2×5×7=70

70÷3=23⋯ ⋯ 1

(1+70)　÷3=23⋯ ⋯ 2

(2+70)　÷3=23⋯ ⋯ 0

魔幻時鐘〔5〕(0， 0，z，0） z 出現順序為 2，4，1，3，0

$2\times3\times7=42$

$42\div5=8\cdots\cdots2$

$(2+42)\div5=8\cdots\cdots4$

$(4+42)\div5=9\cdots\cdots1$

$(1+42)\div5=8\cdots\cdots3$

$(3+42)\div5=9\cdots\cdots0$

魔幻時鐘〔7〕(0，0，0，w） w 出現順序為 2，4，6，1，3，5，0

$2\times3\times5=30$

$30\div7=4\cdots\cdots2$

$(2+30)\div7=4\cdots\cdots4$

$(4+30)\div7=4\cdots\cdots6$

$(6+30)\div7=5\cdots\cdots1$

$(1+30)\div7=4\cdots\cdots3$

$(3+30)\div7=4\cdots\cdots5$

$(5+30)\div7=5\cdots\cdots0$

計算排列模式(1，2，3，4)

$105\times1+70\times2+42\times4+30\times2=473$

2,3,5,7 的最小公倍數是 210

得 $473-210=263$

$263-210=53$

排列模式(1，2，3，4) ＝ $53+210n$ $n\geq0$

利用 excel 列出魔幻時鐘〔2、3、5、7〕排列模式

按壓次數	2	3	5	7	按壓次數	2	3	5	7
1	1	1	1	1	31	1	1	1	3
2	0	2	2	2	32	0	2	2	4
3	1	0	3	3	33	1	0	3	5
4	0	1	4	4	34	0	1	4	6
5	1	2	0	5	35	1	2	0	0
6	0	0	1	6	36	0	0	1	1
7	1	1	2	0	37	1	1	2	2
8	0	2	3	1	38	0	2	3	3
9	1	0	4	2	39	1	0	4	4

10	0	1	0	3	40	0	1	0	5
11	1	2	1	4	41	1	2	1	6
12	0	0	2	5	42	0	0	2	0
13	1	1	3	6	43	1	1	3	1
14	0	2	4	0	44	0	2	4	2
15	1	0	0	1	45	1	0	0	3
16	0	1	1	2	46	0	1	1	4
17	1	2	2	3	47	1	2	2	5
18	0	0	3	4	48	0	0	3	6
19	1	1	4	5	49	1	1	4	0
20	0	2	0	6	50	0	2	0	1
21	1	0	1	0	51	1	0	1	2
22	0	1	2	1	52	0	1	2	3
23	1	2	3	2	53	1	2	3	4
24	0	0	4	3	54	0	0	4	5
25	1	1	0	4	55	1	1	0	6
26	0	2	1	5	56	0	2	1	0
27	1	0	2	6	57	1	0	2	1
28	0	1	3	0	58	0	1	3	2
29	1	2	4	1	59	1	2	4	3
30	0	0	0	2	60	0	0	0	4

60 次以後省略

2. **五個數字的魔幻時鐘〔 2 、 3 、 5 、 7 、 11 〕**

思 路 歷 程 ：

2,3,5,7,11 互質，因此可利用公式推算

魔幻時鐘〔2〕(x , 0 , 0 , 0 , 0) x 出現順序為 1, 0

魔幻時鐘〔3〕(0 , y , 0 , 0 , 0) y 出現順序為 2, 1 , 0

魔幻時鐘〔5〕(0 , 0 , z , 0 , 0) z 出現順序為 2 , 4 , 1 , 3, 0

魔幻時鐘〔7〕(0 , 0 , 0 , w , 0) w 出現順序為 1 , 2 , 3 , 4, 5 , 6 , 0

魔幻時鐘〔11〕(0 , 0 , 0 , 0 , u) u 出現順序為

1 , 2 , 3 , 4 , 5, 6 , 7 , 8 , 9 , 1 0 , 0

魔幻時鐘〔2、3、5、7、11〕的排列模式(1，2，3，4，5)按壓次數

1 1 5 5 × 1 + 7 7 0 × 1 + 4 6 2 × 4 + 3 3 0 × 4 + 2 1 0 × 5 = 6 1 4 3

6 1 4 3 ÷ 2 3 1 0 (最小公倍數) = 2 ⋯ 1 5 2 3

得 知

魔幻時鐘〔2、3、5、7、11〕的排列模式(1，2，3，4，5)須按壓
＝1523+2310n　　次
利用電腦軟體 excel 求證如下：

按壓次數	2	3	5	7	11	按壓次數	2	3	5	7	11
1500	0	0	0	2	4	1516	0	1	1	4	9
1501	1	1	1	3	5	1517	1	2	2	5	10
1502	0	2	2	4	6	1518	0	0	3	6	0
1503	1	0	3	5	7	1519	1	1	4	0	1
1504	0	1	4	6	8	1520	0	2	0	1	2
1505	1	2	0	0	9	1521	1	0	1	2	3
1506	0	0	1	1	10	1522	0	1	2	3	4
1507	1	1	2	2	0	1523	1	2	3	4	5
1508	0	2	3	3	1	1524	0	0	4	5	6
1509	1	0	4	4	2	1525	1	1	0	6	7
1510	0	1	0	5	3	1526	0	2	1	0	8
1511	1	2	1	6	4	1527	1	0	2	1	9
1512	0	0	2	0	5	1528	0	1	3	2	10
1513	1	1	3	1	6	1529	1	2	4	3	0
1514	0	2	4	2	7	1530	0	0	0	4	1
1515	1	0	0	3	8	1531	1	1	1	5	2

伍、結論

從魔幻時鐘的探討，得到下列結論：

一、魔幻時鐘〔a、b、c〕回到原點的次數為所有數字的最小公倍數。

二、魔幻時鐘〔a、b、c〕公因數大於 1 時，有些組合就不會出現。

三、魔幻時鐘〔a、b、c〕兩兩互質時，所有排列組合都會出現。也必會出現完整的(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)的組合。

四、魔幻時鐘〔a、b、c〕兩兩互質，欲求得(0,0,z)的組合順序計算方法如下：先求得 a，b 的最小公倍數，再除以 c 所得的餘數即為 z_1。

$a \times b \div c = n_1 \dots z_1$

$(z_1 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \div \mathbf{c} = \mathbf{n_2} \ldots z_2$

$(z_2 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \div \mathbf{c} = \mathbf{n_3} \ldots z_3$

$(z_3 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \div \mathbf{c} = \mathbf{n_4} \ldots z_4$

$(z_4 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \div \mathbf{c} = \mathbf{n_5} \ldots z_5$

五、利用(x,0,0)、(0,y,0)、(0,0,z)的排列規則就可以計算出魔幻時鐘某組排列的按壓次數。

六、大於 **3** 的魔幻時鐘，若其數字互質，也可以利用餘數法來推論出某次組合的按壓次數。

陸、參考文獻

一、2017 國小數學六上　南一出版社。

二、結城浩 2015 數學女孩秘密筆記整數篇 ，著 陳鎮疆譯，世茂出版 。