屏東縣第61屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學

組　　別：國中組

作品名稱：當遞迴數列遇上幾何

關 鍵 詞：數列、幾何

作品編號：B1030

目　　錄

摘要：

本作品嘗試用遞迴數列及遞迴的思考模式來解決一些幾何上遇到的問題，這些幾何問題通常直接用幾何方式來思考會遇到困境（例如 n 個圓切割平面得到的最多區域數，當 n 值很大時將無從下手），但是使用了遞迴數列後卻較容易想像，接著再使用簡單的代數推導過程即可導出一般式，成功解決所有 n 值。

壹、 研究動機：

有一次在閱讀書時，看到書中有一個關於數學歸納法的謬論，證明一個人永遠吃不飽：

①當 $n=1$ 時，代表只吃一粒米所以此人吃不飽成立；

②假設 $n=k-1$ 時，此人吃不飽成立，

則當 $n=k$ 時，此人只再多吃一粒米，還是不會飽，所以 $n=k$ 時，此人吃不飽也成立；因此根據數學歸納法，對於任意正整數 n 而言，此人吃不飽都成立，也就代表此人永遠吃不飽。

這雖是一個謬論，但引起了我對數學歸納法的興趣，所以想再讀一些相關的數學內容，後來老師在教數列的單元時，提到遞迴數列，我發現跟數學歸納法的原理類似，也引起我對遞迴數列的研究興趣，並嘗試用它來解決一些原本在幾何上遇到的問題。

貳、 研究目的：

在找尋遞迴數列的相關資料與研讀相關書籍時，發現遞迴數列大都用來解決代數問題，很少應用在幾何上，因此我們想嘗試用遞迴數列來解決一些原本在幾何上遇到的問題，看看是否可簡化這些原本較難思考也較抽象的幾何問題。

參、 研究設備器材：

紙、筆、個人電腦。

肆、 文獻探討：

遞迴關係是指將一個函數在某個點（通常只討論整數點）的函數值以此函數在其他點的函數值來表示的方式，例如：$f(n)=f(n-1)+2$；$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$；$f(n)=f(\frac{n}{2})-1$ …等，以 $f(n)=f(n-1)+2$ 來說明：根據此式，函數 f 在 $n=3$ 時的函數值等於 $n=2$ 時的函數值加 2，而 $n=2$ 時的函數值又等於 $n=1$ 時的函數值加 2；另外，上面的函數定義並不完整，因為式子中只表明了 $f(n)$ 與 $f(n-1)$ 兩個函數值之間的關係，我們無法明確得知函數 f 在任何一點的函數值是多少，因此如果要將某個函數以遞迴的方式明確定義，定義中還必須包含該函數在至少一個點的函數值（通常稱為初始條件），以此推算出該函數在其他點的值。

上面的例子中，如果加上一個初始條件：$f(n)=\begin{cases}1, n=1\\ f(n-1)+2, n>1\end{cases}$，則我們可以推得 f(1)＝1、f(2)＝f(1)+2＝3、f(3)＝f(2)＋2＝5、f(4)＝f(3)＋2＝7⋯，因此對於所有整數 n，f(n)的值都可求得；以下我們設法用由大而小的直接推導方式求出 f(n)的一般式：

f(n)＝f(n－1)＋2

＝[f(n－2)＋2]＋2＝f(n－2)＋2＋2

＝[f(n－3)＋2]＋2＋2＝f(n－3)＋2＋2＋2

＝⋯＝f(1)＋2＋2＋⋯＋2【共有 n－1 個 2】＝1＋2x(n－1)＝2n－1，亦即對於所有整數 n 而言，f(n)＝2n－1。

關於上面的結果，可以再用數學歸納法加以證明：

①當 n＝1 時，f(1)＝2x1－1＝1，符合初始條件。

②假設當 n＝k－1 時，f(k－1)＝2(k－1)－1 成立，

則當 n＝k 時，f(k)＝f(k－1)＋2（根據遞迴關係）

＝[2(k－1)－1]＋2（根據假設條件）

＝2k－2－1＋2＝2k－1

所以 n＝k 時，一般式也成立，根據數學歸納法，可知：對於所有 n，f(n)＝2n－1 都成立，故得證。

如果將此種遞迴的方式用來定義數列，則可得到遞迴數列，例如某一遞迴數列a_n定義如下：$a_n=\begin{cases}1, n=1\\ a_{n-1}+2, n>1\end{cases}$，則可知$a_1=1$、$a_2=a_1+2=1+2=3$、$a_3=a_2+2=3+2=5$、⋯可推知數列的每一項，也可用由大到小的直接推導方法求出a_n的一般式：

$a_n=a_{n-1}+2$

$=[a_{n-2}+2]+2=a_{n-2}+2+2$

$=[a_{n-3}+2]+2+2=a_{n-3}+2+2+2$

＝⋯＝$a_1+2+2+...+2$【共有 n－1 個 2】＝1＋2x(n－1)＝2n－1，所以對於所有正整數 n，數列a_n＝2n－1。

伍、 研究過程及方法：

一、 直線對平面的切割

如果平面上有任意 n（n 為正整數）條直線，請問這 n 條直線最多可將平面劃分為幾個區域？這個問題在 n 的值很小時，可用畫的去想出答案，但是要推到 n 的值很大或推出它的一般式時，如果還是用畫的去嘗試，發現會陷入困境，所以嘗試使用遞迴數列來解決：

假設平面上任意 n 條直線最多可將平面劃分為a_n個區域，以下我們定義出

數列 a_n：

經由題意可知 $a_1 = 2$、$a_2 = 4$，如果平面上已經有 n－1 條直線而且平面被它們依最大的可能劃分為 a_{n-1} 個區域，當再加上一條直線，使得平面上有 n 條直線時，這條新的直線最多可讓平面再多出幾個區域呢？為了讓區域數盡量多，新加入的直線不能與任何舊的直線重合，否則不會增加新的區域，而且我們知道要增加最多的區域數的話，新的直線要跟所有舊的直線都有交點（也就是不與任何舊的直線平行）且任意三條直線不交於同一點的情形，也就是新的直線與舊的 n－1 條直線有 n－1 個不同的交點，因此新的直線被這 n－1 個交點分成 n 段，由於直線上被分成的每一段都將舊的一個區域分成兩個區域，亦即每一段可增加一個區域，所以新直線上的 n 段最多可以為平面增加 n 個區域，所以可以得到數列 a_n 的遞迴關係為 $a_n = a_{n-1} + n$，此時就可定義出數列 a_n：

$$a_n = \begin{cases} 2, n = 1 \\ a_{n-1} + n, n > 1 \text{且} n \in \text{正整數} \end{cases};$$

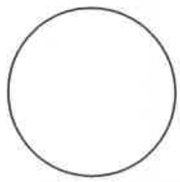
接下來用由大到小的直接推導方法推出一般式：

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + n \\ &= [a_{n-2} + (n-1)] + n = a_{n-2} + (n-1) + n \\ &= [a_{n-3} + (n-2)] + (n-1) + n = a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \cdots = a_1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = 2 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \\ &= 1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = 1 + \frac{(1+n)\times n}{2} = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

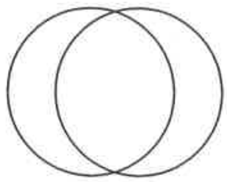
所以平面上有任意 n（n 為正整數）條直線，這 n 條直線最多可將平面劃分為 $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ 個區域。

二、 圓對平面的切割

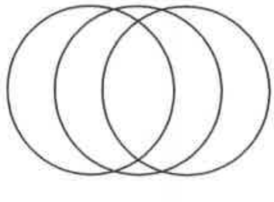
如果把上面問題中的直線改成圓，情況應該會不同，但是否仍可用遞迴數列來解決呢？以下我們將繼續嘗試：如果平面上有任意 n（n 為正整數）個圓，請問這 n 個圓最多可將平面劃分為幾個區域？我們先使用筆畫的方式找出 n＝1、2、3、4 的情形：

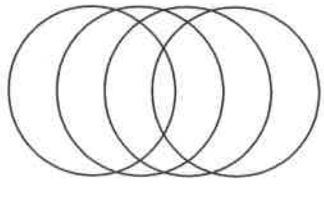


n＝1 時，區域數為 2



n＝2 時，區域數為 4





n＝3 時，區域數為 8　　　　　　　　　n＝4 時，區域數為 14

接下來用遞迴數列來解題：假設平面上任意 n 個圓最多可將平面劃分為 a_n 個區域，以下我們定義出數列 a_n：

經由題意及上面畫法可知 $a_1 = 2$、$a_2 = 4$、$a_3 = 8$、$a_4 = 14$，如果平面上已經有 n－1 個圓而且平面被它們依最大的可能劃分為 a_{n-1} 個區域，當再加上一個圓，使得平面上有 n 個圓時，這個新的圓最多可讓平面再多出幾個區域呢？為了讓區域數盡量多，新加入的圓不能與任何舊的圓重合，否則不會增加新的區域，而且經由一開始筆畫的過程，我們知道要增加最多的區域數的話，新的圓要跟所有舊的圓都有兩個交點且任意三個圓不交於同一點的情形，也就是新的圓與舊的 n－1 個圓有 2(n－1)個不同的交點，因此新的圓被這 2(n－1)個交點分成 2(n－1)段，由於圓上被分成的每一段都將舊的一個區域分成兩個區域，亦即每一段可增加一個區域，所以新圓上的 2(n－1)段最多可以為平面增加 2(n－1)個區域，所以可以得到數列 a_n 的遞迴關係為 $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$，此時就可定義出數列 a_n：

$$a_n = \begin{cases} 2, n=1 \\ a_{n-1} + 2(n-1), n>1 \text{且} n \in \text{正整數} \end{cases};$$

接下來用由大到小的直接推導方法推出一般式：

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2(n-1) \\ &= [a_{n-2} + 2(n-2)] + 2(n-1) = a_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) \\ &= [a_{n-3} + 2(n-3)] + 2(n-2) + 2(n-1) = a_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) \\ &= \cdots = a_1 + 2\times1 + 2\times2 + 2\times3 + \ldots + 2(n-2) + 2(n-1) \\ &= 2 + 2[1+2+3+\ldots+(n-1)] = 2 + 2\times\frac{(1+n-1)\times(n-1)}{2} \\ &= 2 + n(n-1) = n^2 - n + 2 \end{aligned}$$

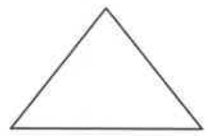
所以平面上有任意 n(n 為正整數)個圓，這 n 個圓最多可將平面劃分為 $n^2 - n + 2$ 個區域。

三、　多邊形對平面的切割

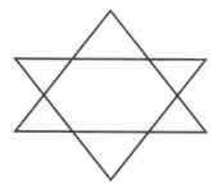
再將上面問題中的圓形延伸為多邊形，是否可找到規則呢？以下我們開始探討這個問題：如果平面上有任意 n（n 為正整數）個 m 邊形（m≥3 且 m 為正整數），請問這 n 個 m 邊形最多可將平面劃分為幾個區域？

（一）　m＝3（三角形）：

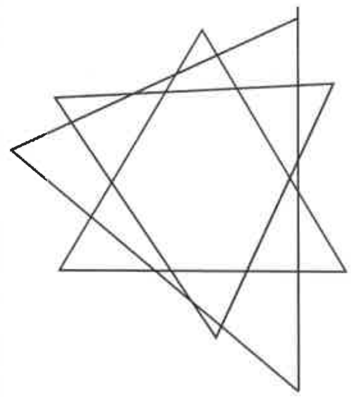
也就是如果平面上有任意 n（n 為正整數）個三角形，請問這 n 個三角形最多可將平面劃分為幾個區域？



n＝1 時，區域數為 2



n＝2 時，區域數為 8



n＝3 時，區域數為 20

這是用筆畫時土法煉鋼的方式，但是會發現 n＝4 時要畫出來的困難度就大增了，接下來用遞迴數列來解題：假設平面上任意 n 個三角形最多可將平面劃分為 a_n 個區域，以下我們定義出數列 a_n：

經由題意及上面畫法可知 $a_1 = 2$ 、 $a_2 = 8$ 、 $a_3 = 20$ ，如果平面上已經有 n－1 個三角形而且平面被它們依最大的可能劃分為 a_{n-1} 個區域，當再加上一個三角形，使得平面上有 n 個三角形時，這個新的三角形最多可讓平面再多出幾個區域呢？為了讓區域數盡量多，新加入的三角形不能與任何舊的三角形重合，否則不會增加新的區域，而且經由一開始筆畫的過程，我們知道要增加最多的區域數的話，新三角形的任一邊要跟所有舊三角形的兩個邊都有交點且任意三個邊不交於同一點的情形，也就是新三角形的任一邊與舊的 n－1 個三角形有 2(n－1)個不同的交點，因此新三角形每個邊被這 2(n－1)個交點分成 2(n－1)＋1 段，三個邊最後要圍成封閉三角形，所以可把每個邊增加的區域算為 2(n－1)，三個邊總共可增加 2(n－1)x3＝6(n－1)個區域，所以可以得到數列 a_n 的遞迴關係為

$a_n = a_{n-1} + 6(n-1)$ ，此時就可定義出數列 a_n：

$$a_n = \begin{cases} 2, n = 1 \\ a_{n-1} + 6(n-1), n > 1 \text{且} n \in \text{正整數} \end{cases};$$

接下來用由大到小的直接推導方法推出一般式：

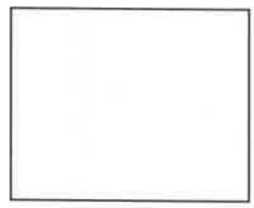
$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 6(n-1) \\ &= [a_{n-2} + 6(n-2)] + 6(n-1) = a_{n-2} + 6(n-2) + 6(n-1) \\ &= [a_{n-3} + 6(n-3)] + 6(n-2) + 6(n-1) = a_{n-3} + 6(n-3) + 6(n-2) + 6(n-1) \\ &= \cdots = a_1 + 6\times1 + 6\times2 + 6\times3 + \ldots + 6(n-2) + 6(n-1) \\ &= 2 + 6[1+2+3+\ldots+(n-1)] = 2 + 6\times\frac{(1+n-1)\times(n-1)}{2} \end{aligned}$$

$= 2+3n(n-1) = 3n^2-3n+2$

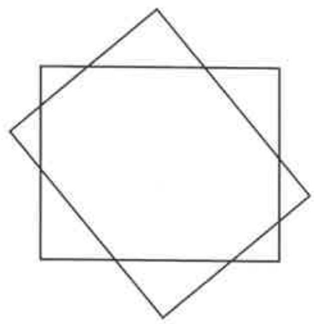
所以平面上有任意 n（n 為正整數）個三角形，這 n 個三角形最多可將平面劃分為 $3n^2-3n+2$ 個區域。

（二）　m＝4（四邊形）

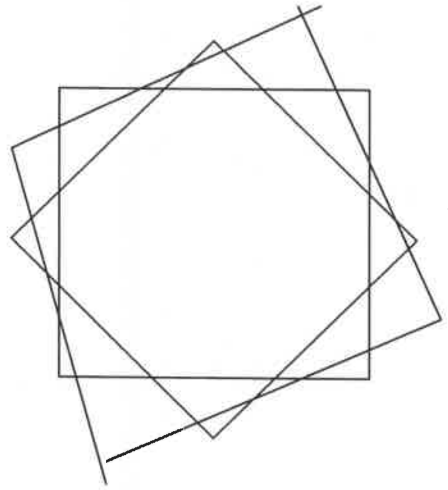
如果平面上有任意 n（n 為正整數）個四邊形，請問這 n 個四邊形最多可將平面劃分為幾個區域？



n＝1 時，區域數為 2



n＝2 時，區域數為 10



n＝3 時，區域數為 26

這是用筆畫時土法煉鋼的方式，但是會發現 n＝4 時要畫出來的困難度就大增了，接下來用遞迴數列來解題：假設平面上任意 n 個四邊形最多可將平面劃分為 a_n 個區域，以下我們定義出數列 a_n：

經由題意及上面畫法可知 $a_1=2$、$a_2=10$、$a_3=26$，如果平面上已經有 n－1 個四邊形而且平面被它們依最大的可能劃分為 a_{n-1} 個區域，當再加上一個四邊形，使得平面上有 n 個四邊形時，這個新的四邊形最多可讓平面再多出幾個區域呢？為了讓區域數盡量多，新加入的四邊形不能與任何舊的四邊形重合，否則不會增加新的區域，而且經由一開始筆畫的過程，我們知道要增加最多的區域數的話，新四邊形的任一邊要跟所有舊四邊形的兩個邊都有交點且任意三個邊不交於同一點的情形，也就是新四邊形的任一邊與舊的 n－1 個四邊形有 2(n－1)個不同的交點，因此新四邊形每個邊被這 2(n－1)個交點分成 2(n－1)＋1 段，四個邊最後要圍成封閉四邊形，所以可把每個邊增加的區域算為 2(n－1)，四個邊總共可增加 2(n－1)×4＝8(n－1)個區域，所以可以得到數列 a_n 的遞迴關係為

$a_n = a_{n-1}+8(n-1)$，此時就可定義出數列 a_n：

$$a_n = \begin{cases} 2, n=1 \\ a_{n-1} + 8(n-1), n>1 \text{且} n \in \text{正整數} \end{cases};$$

接下來用由大到小的直接推導方法推出一般式：

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 8(n-1) \\ &= [a_{n-2} + 8(n-2)] + 8(n-1) = a_{n-2} + 8(n-2) + 8(n-1) \\ &= [a_{n-3} + 8(n-3)] + 8(n-2) + 8(n-1) = a_{n-3} + 8(n-3) + 8(n-2) + 8(n-1) \\ &= \cdots = a_1 + 8\times 1 + 8\times 2 + 8\times 3 + \ldots + 8(n-2) + 8(n-1) \\ &= 2 + 8[1+2+3+\ldots+(n-1)] = 2 + 8\times\frac{(1+n-1)\times(n-1)}{2} \\ &= 2 + 4n(n-1) = 4n^2 - 4n + 2 \end{aligned}$$

所以平面上有任意 n（n 為正整數）個四邊形，這 n 個四邊形最多可將平面劃分為$4n^2-4n+2$個區域。

（三）m≥3 且 m 為正整數（m 邊形）

如果平面上有任意 n（n 為正整數）個 m 邊形（m≥3），請問這 n 個 m 邊形最多可將平面劃分為幾個區域？

有了上面三角形及四邊形的經驗，直接用遞迴數列來解題：假設平面上任意 n 個 m 邊形最多可將平面劃分為a_n個區域，以下我們定義出數列a_n：

經由題意可知$a_1=2$，如果平面上已經有 n－1 個 m 邊形而且平面被它們依最大的可能劃分為a_{n-1}個區域，當再加上一個 m 邊形，使得平面上有 n 個 m 邊形時，這個新的 m 邊形最多可讓平面再多出幾個區域呢？為了讓區域數盡量多，新加入的 m 邊形不能與任何舊的 m 邊形重合，否則不會增加新的區域，而且經由一開始筆畫的過程，我們知道要增加最多的區域數的話，新 m 邊形的任一邊要跟所有舊 m 邊形的兩個邊都有交點且任意三個邊不交於同一點的情形，也就是新 m 邊形的任一邊與舊的 n－1 個 m 邊形有 2(n－1)個不同的交點，因此新 m 邊形每個邊被這 2(n－1)個交點分成 2(n－1)＋1 段，m 個邊最後要圍成封閉 m 邊形，所以可把每個邊增加的區域算為 2(n－1)，m 個邊總共可增加 2(n－1)xm＝2m(n－1)個區域，所以可以得到數列a_n的遞迴關係為$a_n = a_{n-1} + 2m(n-1)$，此時就可定義出數列a_n：

$$a_n = \begin{cases} 2, n=1 \\ a_{n-1} + 2m(n-1), n>1 \text{且} n \in \text{正整數} \end{cases};$$

接下來用由大到小的直接推導方法推出一般式：

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2m(n-1) \\ &= [a_{n-2} + 2m(n-2)] + 2m(n-1) = a_{n-2} + 2m(n-2) + 2m(n-1) \\ &= [a_{n-3} + 2m(n-3)] + 2m(n-2) + 2m(n-1) \\ &= a_{n-3} + 2m(n-3) + 2m(n-2) + 2m(n-1) \\ &= \cdots = a_1 + 2m\times 1 + 2m\times 2 + 2m\times 3 + \ldots + 2m(n-2) + 2m(n-1) \end{aligned}$$

$=2+2m[1+2+3+...+(n-1)]=2+2m\times\frac{(1+n-1)\times(n-1)}{2}$

$=2+mn(n-1)=mn^2-mn+2$

所以平面上有任意 n（n 為正整數）個 m 邊形（m≥3 且 m 為正整數），這 n 個 m 邊形最多可將平面劃分為 mn^2-mn+2 個區域。

四、 平面對空間的切割

如果將上面問題再延伸為對空間的切割，遞迴數列是否仍能行的通呢？問題如下：如果空間中有任意 n（n 為正整數）個平面，請問這 n 個平面最多可將空間切割成為幾個區域？假設平面上任意 n 個平面最多可將空間切割成 a_n 個區域，以下我們定義出數列 a_n：

經由題意可知 $a_1=2$，如果空間中已經有 n－1 個平面而且空間被它們依最大的可能切成 a_{n-1} 個區域，當再加上一個平面，使得空間中有 n 個平面時，這個新的平面最多可讓空間再多出幾個區域呢？為了讓區域數盡量多，新加入的平面不能與任何舊的平面重合，否則不會增加新的區域，而且我們知道要增加最多的區域數的話，新的平面要跟所有舊的平面都有交線（也就是不與任何舊的平面平行）且任意三個平面不交於同一條直線的情形，也就是新的平面與舊的 n－1 個平面有 n－1 條不同的交線，因此新的平面上有 n－1 條與其他平面相交的直線，且其中沒有任何兩條直線重合或互相平行，也沒有三線共點，由前面「直線對平面的切割」推論可知這 n－1 條直線會將新的平面劃分成 $1+\frac{(n-1)n}{2}$ 個區域，而新平面上由這 n－1 條直線劃分出來的每個區域都會將空間中由舊的 n－1 個平面切出的每個區域一分為二，因此新加入的第 n 個平面會讓空間中增加 $1+\frac{(n-1)n}{2}$ 個區域，所以可以得到數列 a_n 的遞迴關係為 $a_n=a_{n-1}+1+\frac{(n-1)n}{2}$，此時就可定義出

數列 a_n：$a_n=\begin{cases}2, n=1\\ a_{n-1}+1+\frac{(n-1)n}{2}, n>1 且 n\in 正整數\end{cases}$；

接下來用由大到小的直接推導方法推出一般式：

$a_n=a_{n-1}+1+\frac{(n-1)n}{2}$

$=[a_{n-2}+1+\frac{(n-2)(n-1)}{2}]+1+\frac{(n-1)n}{2}=a_{n-2}+1+\frac{(n-2)(n-1)}{2}+1+\frac{(n-1)n}{2}$

$=[a_{n-3}+1+\frac{(n-3)(n-2)}{2}]+1+\frac{(n-2)(n-1)}{2}+1+\frac{(n-1)n}{2}$

$$=a_{n-3}+1+\frac{(n-3)(n-2)}{2}+1+\frac{(n-2)(n-1)}{2}+1+\frac{(n-1)n}{2}$$

$$=\cdots=a_1+1+\frac{1\times2}{2}+1+\frac{2\times3}{2}+1+\frac{3\times4}{2}+\ldots+1+\frac{(n-1)n}{2}$$

$$=2+(1+1+1+\ldots+1)+[\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}]$$

（其中加的 1 共有 n－1 個）

$$=2+n-1+\frac{1}{2}[1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+(n-1)n]$$

$$=n+1+\frac{1}{2}[1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+(n-1)n]$$

因為其中$1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+(n-1)n=\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2+k$

$$=\frac{(n-1)\times n\times[2(n-1)+1]}{6}+\frac{[1+(n-1)]\times(n-1)}{2}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{3n(n-1)}{6}=\frac{(n-1)n[(2n-1)+3]}{6}=\frac{(n-1)n(2n+2)}{6}$$

$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

所以$a_n=n+1+\frac{1}{2}[1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+(n-1)n]=n+1+\frac{1}{2}\times\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

$$=(n+1)+\frac{(n-1)n(n+1)}{6}=(n+1)[1+\frac{(n-1)n}{6}]=(n+1)[\frac{6}{6}+\frac{(n-1)n}{6}]$$

$$=\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}=\frac{n^3-n^2+6n+n^2-n+6}{6}=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

所以空間中有任意 n（n 為正整數）個平面，這 n 個平面最多可將空間切割成$\frac{n^3+5n+6}{6}$個區域。

五、 球面對空間的切割

再把上面問題中的平面改成球面，情況應該也會不同，問題如下：如果空間中有任意 n（n 為正整數）個球面，請問這 n 個球面最多可將空間切割成為幾個區域？假設平面上任意 n 個球面最多可將空間切割成a_n個區域，以下我們定義出數列a_n：

經由題意可知$a_1=2$，如果空間中已經有 n－1 個球面而且空間被它們依最大的可能切成a_{n-1}個區域，當再加上一個球面，使得空間中有 n 個球面時，這個新的球面最多可讓空間再多出幾個區域呢？為了讓區域數盡量多，新加入的球面不能與任何舊的球面重合，否則不會增加新的區域，而且我們知道要增加最多的區域

數的話，新的球面與舊的所有球面不可以有只交於一點（即相切）或有不相交的情形，也就是都要相交於一個類似環的形狀（以下我們都稱為環狀），且任意三個球面不交於同一個環狀的情形，也就是新的球面與舊的 n－1 個球面有 n－1 個不同的相交的環狀，因此新的球面上有 n－1 個與其他球面相交的環狀，且其中沒有任何兩個環狀重合或不相交或只交於一點，也沒有三環交於同一點，因環狀對平面的切割情形跟圓形是相同的，所以由前面「圓形對平面的切割」推論可知這 n－1 個環狀會將新的球面劃分成$(n-1)^2-(n-1)+2$個區域，而新球面上由這 n－1 個環狀劃分出來的每個區域都會將空間中由舊的 n－1 個球面切出的每個區域一分為二，因此新加入的第 n 個球面會讓空間中增加$(n-1)^2-(n-1)+2$個區域，所以可以得到數列a_n的遞迴關係為$a_n=a_{n-1}+(n-1)^2-(n-1)+2$，此時就可

定義出數列a_n ： $a_n=\begin{cases}2, n=1\\ a_{n-1}+(n-1)^2-(n-1)+2, n>1\text{且}n\in\text{正整數}\end{cases}$ ；

接下來用由大到小的直接推導方法推出一般式：

$a_n=a_{n-1}+(n-1)^2-(n-1)+2$

$=[a_{n-2}+(n-2)^2-(n-2)+2]+(n-1)^2-(n-1)+2$

$=a_{n-2}+(n-2)^2-(n-2)+2+(n-1)^2-(n-1)+2$

$=[a_{n-3}+(n-3)^2-(n-3)+2]+(n-2)^2-(n-2)+2+(n-1)^2-(n-1)+2$

$=a_{n-3}+(n-3)^2-(n-3)+2+(n-2)^2-(n-2)+2+(n-1)^2-(n-1)+2$

$=\cdots=a_1+(1^2-1+2)+(2^2-2+2)+(3^2-3+2)+\ldots+[(n-1)^2-(n-1)+2]$

$=2+(1^2-1+2)+(2^2-2+2)+(3^2-3+2)+\ldots+[(n-1)^2-(n-1)+2]$

$=(2+2+2+\ldots+2)+[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]-[1+2+3+\ldots+(n-1)]$

（其中加的 2 共有 n 個）

$=2n+\dfrac{(n-1)n[2(n-1)+1)]}{6}-\dfrac{[1+(n-1)](n-1)}{2}$

$=2n+\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{12n}{6}+\dfrac{2n^3-3n^2+n}{6}-\dfrac{3n^2-3n}{6}$

$=\dfrac{2n^3-6n^2+16n}{6}=\dfrac{n^3-3n^2+8n}{3}$

所以空間中有任意 n（n 為正整數）個球面，這 n 個球面最多可將空間切割成個$\dfrac{n^3-3n^2+8n}{3}$區域。

陸、 結論：

我們嘗試用遞迴數列來解決幾何問題，發現並沒有把問題複雜化，反而可以把原本難以想像的幾何問題，變的能較容易思考與想像，而且可得到適用於所有 n 值的一般式如下：(1) 平面上有任意 n（n 為正整數）條直線，這 n 條直線最多可將平面劃分為 $1+\frac{n(n+1)}{2}$ 個區域；(2) 平面上有任意 n（n 為正整數）個圓，這 n 個圓最多可將平面劃分為 n^2-n+2 個區域；(3) 平面上有任意 n（n 為正整數）個 m 邊形（m≥3 且 m 為正整數），這 n 個 m 邊形最多可將平面劃分為 mn^2-mn+2 個區域；(4) 空間中有任意 n（n 為正整數）個平面，這 n 個平面最多可將空間切割成 $\frac{n^3+5n+6}{6}$ 個區域；(5) 空間中有任意 n（n 為正整數）個球面，這 n 個球面最多可將空間切割成個 $\frac{n^3-3n^2+8n}{3}$ 區域。

雖然過程中需要一些代數的推導過程，但是卻簡化了思考方向，把原本不知從何下手的幾何問題成功的解決。

柒、 參考資料及其他：

1.許介彥，數學悠哉遊，初版，台北市，三民書局股份有限公司，2008 年。
2.林福來 譯，離散數學初步，第四版，台北市，九章出版社，2005 年。