屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：芳賀第三定理的延伸與研究

關 鍵 詞：一般式、畢氏三元數、遞迴式

編號：B1029

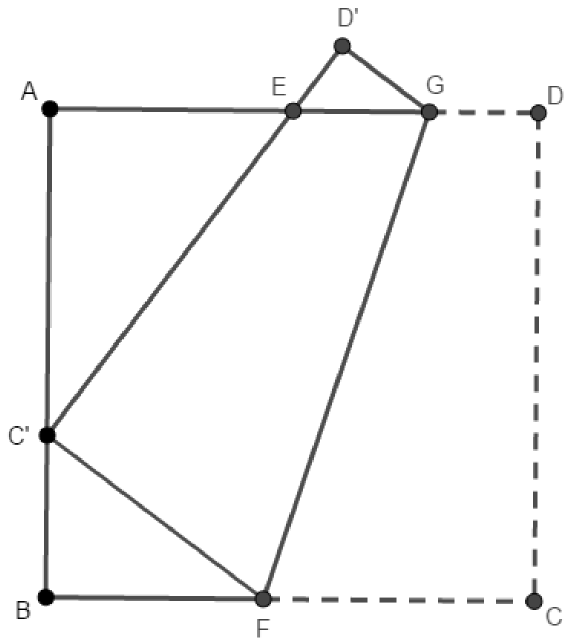
摘要

本次研究是做芳賀第三定理的延伸，以$\overline{AC'}$：$\overline{C'B}$ =a：b (a、b 均為正整數)，改變 C'點在$\overline{AB}$上的位置，求出各線段長度和區塊面積的一般式，更進一步求出其分子和分母的遞迴式。研究過程中還求出使$\overline{GF}$長度的數值為一個有理數的條件，並由三個直角三角形之邊長，求出畢氏三元數的生成公式。

壹、研究動機

我們參考第 53 屆全國科展〈芳賀第二定理的延伸及其形成線段數值的數字變化方式〉，覺得很有興趣，並想說可不可以做芳賀第三定理的延伸。於是我們開始著手研究，也得出了一些成果。

芳賀第三定理即是在正方形 ABCD 中作摺痕$\overline{FG}$，使$\overline{C'D'}$通過$\overline{AD}$的中點 E，並同時使 C'點落在$\overline{AB}$上，則得到$\overline{AB}$：$\overline{C'B}$=3：1。不過在我們的延伸研究中，因為要改變 C'點的位置，因此研究過程中的 E 點並不一定是$\overline{AD}$的中點。



貳、研究目的

一、以$\overline{AC'}$：$\overline{C'B}$ =a：b (a、b 均為正整數)，改變 C'點在$\overline{AB}$上的位置，求出各線段長度的一般式。

二、求出 a 和 b 在何種條件下，使$\overline{GF}$長度的數值為一個有理數。

三、由△AC'E、△BC'F、△D'EG 三個直角三角形之邊長，求出畢氏三元數的生成公式。

四、以$\overline{AC'}$：$\overline{C'B}$ =a：b (a、b 均為正整數)，改變 C'點在$\overline{AB}$上的位置，求出各區塊面積的一般式。
五、由研究目的一所得到的各線段長度一般式，求出其分子和分母的遞迴式。
六、由研究目的四所得到的各區塊面積一般式，求出其分子和分母的遞迴式。

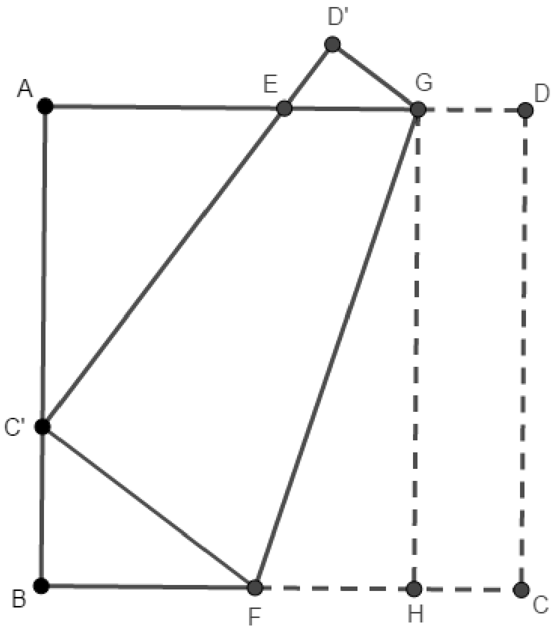
參、研究設備及器材

電腦(GeoGebra 幾何繪圖軟體)、正方形色紙、筆。

肆、研究過程或方法

為了方便計算和表示，我們在所有的研究過程中，將正方形邊長假設為 1。

一、以$\overline{AC'}$：$\overline{C'B}$ =a：b (a、b 均為正整數)，改變 C'點在$\overline{AB}$上的位置，求出各線段長度的一般式。



∵正方形邊長假設為 1，∴ $\overline{AC'} = \frac{a}{a+b}$，$\overline{C'B} = \frac{b}{a+b}$。

∵△BC′F 為直角三角形、$\overline{CF} = \overline{C'F}$、$\overline{BF} = 1-\overline{CF}$，利用畢氏定理得

$\overline{CF}^2 = \overline{C'F}^2 = (\frac{b}{a+b})^2 + (1-\overline{CF})^2$，解之，得$\overline{C'F} = \overline{CF} = \frac{b^2+(a+b)^2}{2(a+b)^2}$，

$\overline{BF} = 1-\overline{CF} = \frac{a(a+2b)}{2(a+b)^2}$。

利用△AC′E~△BFC′(AA)，得$\overline{AE}:\overline{BC'} = \overline{AC'}:\overline{BF}$，將 $\overline{BC'} = \frac{b}{a+b}$、$\overline{AC'} = \frac{a}{a+b}$、

$\overline{BF}=\frac{a(a+2b)}{2(a+b)^2}$代入，解之，得$\overline{AE}=\frac{2b}{a+2b}$。

利用△AC′E∼△BFC′（AA），得$\overline{EC'}:\overline{C'F}=\overline{AE}:\overline{BC'}$，將$\overline{C'F}=\frac{b^2+(a+b)^2}{2(a+b)^2}$、$\overline{AE}=\frac{2b}{a+2b}$、$\overline{BC'}=\frac{b}{a+b}$代入，得$\overline{EC'}=\frac{b^2+(a+b)^2}{(a+b)(a+2b)}$，$\overline{D'E}=1-\overline{EC'}=1-\frac{b^2+(a+b)^2}{(a+b)(a+2b)}=\frac{ab}{(a+b)(a+2b)}$。

利用△AC′E∼△D′GE(AA)，得$\overline{D'G}:\overline{AC'}=\overline{D'E}:\overline{AE}$，∴ $\overline{D'G}:\frac{a}{a+b}=\frac{ab}{(a+b)(a+2b)}:\frac{2b}{a+2b}$，最後得$\overline{DG}=\overline{D'G}=\frac{a^2b}{(a+b)^2(a+2b)}\div\frac{2b}{a+2b}=\frac{a^2}{2(a+b)^2}$，

$\overline{EG}=1-\overline{AE}-\overline{DG}=1-\frac{2b}{a+2b}-\frac{a^2}{2(a+b)^2}=\frac{a[b^2+(a+b)^2]}{2(a+b)^2(a+2b)}$。

作$\overline{GH}\perp\overline{BC}$於H，$\overline{FH}=\overline{CF}-\overline{CH}=\overline{CF}-\overline{DG}=\frac{b^2+(a+b)^2}{2(a+b)^2}-\frac{a^2}{2(a+b)^2}=\frac{2b^2+2ab}{2(a+b)^2}=\frac{b^2+ab}{(a+b)^2}$，因此得$\overline{GF}^2=\overline{FH}^2+\overline{GH}^2=\overline{FH}^2+\overline{CD}^2$，$\overline{GF}=\sqrt{\overline{FH}^2+\overline{CD}^2}$

$=\sqrt{(\frac{b^2+ab}{(a+b)^2})^2+1}=\frac{\sqrt{b^2+(a+b)^2}}{a+b}$。此處我們可以發現，有別於其他線段，只有它是一個無理數，於是，我們就想求出 a 和 b 在何種條件下，會使$\overline{GF}$長度的數值為一個有理數。

二、求出 a 和 b 在何種條件下，使$\overline{GF}$長度的數值為一個有理數。

要使$\overline{GF}=\frac{\sqrt{b^2+(a+b)^2}}{a+b}$為一個有理數，必須使$b^2+(a+b)^2$為一個完全平方數。於是，我們代入畢氏三元數的生成公式，得到：

(一)當 b=2n+1，$a=(2n^2+2n)-(2n+1)=2n^2-1$(n 為正整數)的條件下，

$\sqrt{b^2+(a+b)^2}=\sqrt{(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2}=\sqrt{(2n^2+2n+1)^2}=2n^2+2n+1$，因此，$\overline{GF}=\frac{\sqrt{b^2+(a+b)^2}}{a+b}=\frac{2n^2+2n+1}{2n^2+2n}$ 為一個有理數。

(二)當 b=2n，$a=(n^2-1)-2n=n^2-2n-1$(n≧3，n 為正整數)的條件下，

$\sqrt{b^2+(a+b)^2}=\sqrt{(2n)^2+(n^2-1)^2}=\sqrt{(n^2+1)^2}=n^2+1$，因此，

$\overline{GF}=\frac{\sqrt{b^2+(a+b)^2}}{a+b}=\frac{n^2+1}{n^2-1}$ 為一個有理數。

三、由△AC′E、△BC′F、△D'EG 三個直角三角形之邊長，求出畢氏三元數的

生成公式。

在正方形 ABCD 中，可以發現有三個直角三角形△AC′E、△BC′F、△D'EG。利用目的一所得到的線段長度一般式可分別計算出這些直角三角形的邊長比例關係：

(一)△AC′E 的三邊長比為$\overline{\mathrm{AC'}}：\overline{\mathrm{AE}}：\overline{\mathrm{EC'}}=\frac{a}{a+b}：\frac{2b}{a+2b}：\frac{b^2+(a+b)^2}{(a+b)(a+2b)}$，同乘$(a+b)(a+2b)$，得$\overline{\mathrm{AC'}}：\overline{\mathrm{AE}}：\overline{\mathrm{EC'}}=a(a+2b)：2b(a+b)：b^2+(a+b)^2$。

(二)△BC′F 的三邊長比為$\overline{\mathrm{BF}}：\overline{\mathrm{BC'}}：\overline{\mathrm{C'F}}=\frac{a(a+2b)}{2(a+b)^2}：\frac{b}{a+b}：\frac{b^2+(a+b)^2}{2(a+b)^2}$，同乘$2(a+\mathrm{b})^2$，得$\overline{\mathrm{BF}}：\overline{\mathrm{BC'}}：\overline{\mathrm{C'F}}=a(a+2b)：2b(a+b)：b^2+(a+b)^2$。

(三)△D'EG 的三邊長比為$\overline{\mathrm{D'G}}：\overline{\mathrm{D'E}}：\overline{\mathrm{EG}}=\frac{a^2}{2(a+b)^2}：\frac{ab}{(a+b)(a+2b)}：\frac{a[b^2+(a+b)^2]}{2(a+b)^2(a+2b)}$，同乘$2(a+b)^2(a+2b)$，得$\overline{\mathrm{D'G}}：\overline{\mathrm{D'E}}：\overline{\mathrm{EG}}=a^2(a+2b)：2ab(a+b)：a[b^2+(a+b)^2]$，再同除以$a$，得$\overline{\mathrm{D'G}}：\overline{\mathrm{D'E}}：\overline{\mathrm{EG}}=a(a+2b)：2b(a+b)：b^2+(a+b)^2$。

由以上可知三個直角三角形的邊長比例關係相同，皆為$a(a+2b)：2b(a+b)：b^2+(a+b)^2=(a+b)^2-b^2：2(a+b)b：(a+b)^2+b^2$ (a、b均為正整數) $=u^2-v^2：2uv：u^2+v^2$ ($u>v$，u、v均為正整數)，為畢氏三元數的生成公式。

四、以$\overline{\mathrm{AC'}}：\overline{\mathrm{C'B}}$ =a：b (a、b 均為正整數)，改變 C′點在$\overline{\mathrm{AB}}$上的位置，求出各區塊面積的一般式。

得到各線段長度的一般式後，我們接著推導各區塊面積的一般式。

已知∠A 為直角，令$\overline{AC'}$為底，$\overline{AE}$為高，可得△AC′E=$\frac{1}{2}\times\overline{AC'}\times\overline{AE}=\frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{a}}{a+b}\times\frac{2\mathrm{b}}{a+2b}=\frac{\mathrm{ab}}{(a+b)(a+2b)}$。

已知∠B 為直角，令$\overline{BF}$為底，$\overline{BC'}$為高，可得△BC′F=$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BF}}\times\overline{\mathrm{BC'}}=\frac{1}{2}\times\frac{a(a+2b)}{2(a+b)^2}\times\frac{b}{a+b}=\frac{ab(a+2b)}{4(a+b)^3}$。

已知∠D 為直角，且∠D′=∠D，令$\overline{\mathrm{D'G}}$為底，$\overline{\mathrm{D'E}}$為高，可得△D'EG=$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{D'G}}\times\overline{D'E}=\frac{1}{2}\times\frac{ab}{(a+b)(a+2b)}\times\frac{a^2}{2(a+b)^2})=\frac{a^3b}{4(a+b)^3(a+2b)}$。

已知正方形 ABCD，可知 $\overline{\mathrm{DG}}//\overline{\mathrm{CF}}$，令$\overline{\mathrm{DG}}$為上底，$\overline{\mathrm{CF}}$為下底，$\overline{\mathrm{DC}}$為高，

可得梯形 CDGF= $(\overline{DG}+\overline{CF})\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{a^2+b^2+(a+b)^2}{4(a+b)^2}=\frac{2(a+b)^2-2ab}{4(a+b)^2}=\frac{(a+b)^2-ab}{2(a+b)^2}$。

∴四邊形 C'FGE=梯形 C′D'GF－△D'EG=梯形 CDGF－△D'EG

$=\frac{(a+b)^2-ab}{2(a+b)^2}-\frac{a^3b}{4(a+b)^3(a+2b)}=\frac{[(a+b)^2-ab][(a+b)^2+b^2]}{2(a+b)^3(a+2b)}$ 。

五、由研究目的一所得到的各線段長度一般式，求出其分子和分母的遞迴式。

由研究目的一可得到各線長度段的一般式，因此，若代入不同正整數比例 a：b，即可得到在各種比例下各線段長度的數值。

(一) a：b=1：n (1≦n≦10，n 為正整數)

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	$\overline{CF}(\overline{C'F})$	$\overline{BF}$	$\overline{AE}$	$\overline{DG}(\overline{D'G})$
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{b^2+(a+b)^2}{2(a+b)^2}$	$\frac{a(a+2b)}{2(a+b)^2}$	$\frac{2b}{a+2b}$	$\frac{a^2}{2(a+b)^2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{18}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{32}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{41}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{50}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{61}{72}$	$\frac{11}{72}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{1}{72}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{85}{98}$	$\frac{13}{98}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{1}{98}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{113}{128}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{1}{128}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{145}{162}$	$\frac{17}{162}$	$\frac{16}{17}$	$\frac{1}{162}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{181}{200}$	$\frac{19}{200}$	$\frac{18}{19}$	$\frac{1}{200}$

$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{221}{242}$	$\frac{21}{242}$	$\frac{20}{21}$	$\frac{1}{242}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

$\overline{CF}$($\overline{\mathrm{C'F}}$)分子：$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 4n \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{CF}$($\overline{\mathrm{C'F}}$)分母：$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 2 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{BF}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{BF}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 2 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{AE}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{AE}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{DG}}$($\overline{\mathrm{D'G}}$)分子：$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{DG}}$($\overline{\mathrm{D'G}}$)分母：$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 2 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	$\overline{D'E}$	$\overline{EC'}$	$\overline{\mathrm{EG}}$
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)(a+2b)}$	$\frac{b^2+(a+b)^2}{(a+b)(a+2b)}$	$\frac{a[b^2+(a+b)^2]}{2(a+b)^2(a+2b)}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{24}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{13}{90}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{25}{28}$	$\frac{25}{224}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{41}{45}$	$\frac{41}{450}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{61}{66}$	$\frac{61}{792}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{91}$	$\frac{85}{91}$	$\frac{85}{1274}$

$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{113}{120}$	$\frac{113}{1920}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{153}$	$\frac{145}{153}$	$\frac{145}{2754}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{190}$	$\frac{181}{190}$	$\frac{181}{3800}$
$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{231}$	$\frac{221}{231}$	$\frac{221}{5082}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

$\overline{\mathrm{D'E}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 1\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{D'E}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 1\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{E'C}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 4n\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{E'C}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 1(\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{EG}$分子：$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 4n\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{EG}$分母：$\begin{cases} a_1 = 24 \\ a_n = a_{n-1} + 2(6n^2 + 4 + 1)\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

(二) a：b=2：n (1≦n≦10，n 為正整數)

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	$\overline{CF}(\overline{\mathrm{C'F}})$	$\overline{BF}$	$\overline{AE}$	$\overline{\mathrm{DG}}(\overline{\mathrm{D'G}})$
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{b^2+(a+b)^2}{2(a+b)^2}$	$\frac{a(a+2b)}{2(a+b)^2}$	$\frac{2b}{a+2b}$	$\frac{a^2}{2(a+b)^2}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{18}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{18}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{20}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{32}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{34}{50}$	$\frac{16}{50}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{4}{50}$

$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{52}{72}$	$\frac{20}{72}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{4}{72}$
$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{74}{98}$	$\frac{24}{98}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{4}{98}$
$\frac{2}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{100}{128}$	$\frac{28}{128}$	$\frac{12}{14}$	$\frac{4}{128}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{130}{162}$	$\frac{32}{162}$	$\frac{14}{16}$	$\frac{4}{162}$
$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{164}{200}$	$\frac{36}{200}$	$\frac{16}{18}$	$\frac{4}{200}$
$\frac{2}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{202}{242}$	$\frac{40}{242}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{4}{242}$
$\frac{2}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{244}{288}$	$\frac{44}{288}$	$\frac{20}{22}$	$\frac{4}{288}$

(上列表格中紅色數字即為芳賀第三定理的線段長度比例)

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

$\overline{CF}(\overline{C'F})$分子：$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 2\ (n \geq 2) \end{cases}$

$\overline{CF}(\overline{C'F})$分母：$\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 6\ (n \geq 2) \end{cases}$

$\overline{BF}$分子：$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 4\ (n \geq 2) \end{cases}$

$\overline{BF}$分母：$\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 6\ (n \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AE}$分子：$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2\ (n \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AE}$分母：$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 2\ (n \geq 2) \end{cases}$

$\overline{DG}(\overline{D'G})$分子：$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1}\ (n \geq 2) \end{cases}$

$\overline{DG}(\overline{D'G})$分母：$\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 6\ (n \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	$\overline{D'E}$	$\overline{EC'}$	$\overline{EG}$
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)(a+2b)}$	$\frac{b^2+(a+b)^2}{(a+b)(a+2b)}$	$\frac{a[b^2+(a+b)^2]}{2(a+b)^2(a+2b)}$

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{20}{72}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{20}{24}$	$\frac{40}{192}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{34}{40}$	$\frac{68}{400}$
$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{60}$	$\frac{52}{60}$	$\frac{104}{720}$
$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{10}{84}$	$\frac{74}{84}$	$\frac{148}{1176}$
$\frac{2}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{12}{112}$	$\frac{100}{112}$	$\frac{200}{1792}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{14}{144}$	$\frac{130}{144}$	$\frac{260}{2592}$
$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{16}{180}$	$\frac{164}{180}$	$\frac{328}{3600}$
$\frac{2}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{18}{220}$	$\frac{202}{220}$	$\frac{404}{4840}$
$\frac{2}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{20}{264}$	$\frac{244}{264}$	$\frac{488}{6336}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

$\overline{\mathrm{D'E}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{D'E}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 4 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{E'C}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 2 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{E'C}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 4 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{EG}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_n = a_{n-1} + 8n + 4 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{EG}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 72 \\ a_n = a_{n-1} + 2(6n^2 + 14n + 8) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

(三) a：b=3：n (1≦n≦10，n 為正整數)

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	$\overline{CF}(\overline{\mathrm{C'F}})$	$\overline{BF}$	$\overline{AE}$	$\overline{\mathrm{DG}}(\overline{\mathrm{D'G}})$
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{b^2+(a+b)^2}{2(a+b)^2}$	$\frac{a(a+2b)}{2(a+b)^2}$	$\frac{2b}{a+2b}$	$\frac{a^2}{2(a+b)^2}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{32}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{29}{50}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{9}{50}$
$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{45}{72}$	$\frac{27}{72}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{9}{72}$
$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{65}{98}$	$\frac{33}{98}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{9}{98}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{89}{128}$	$\frac{39}{128}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{9}{128}$
$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{117}{162}$	$\frac{45}{162}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{9}{162}$
$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{149}{200}$	$\frac{51}{200}$	$\frac{14}{17}$	$\frac{9}{200}$
$\frac{3}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{185}{242}$	$\frac{57}{242}$	$\frac{16}{19}$	$\frac{9}{242}$
$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{225}{288}$	$\frac{63}{288}$	$\frac{18}{21}$	$\frac{9}{288}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{269}{338}$	$\frac{69}{338}$	$\frac{20}{23}$	$\frac{9}{338}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

$\overline{CF}(\overline{\mathrm{C'F}})$分子：$\begin{cases} a_1 = 17 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 4 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{CF}(\overline{\mathrm{C'F}})$分母：$\begin{cases} a_1 = 32 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 10 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{BF}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 15 \\ a_n = a_{n-1} + 6 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{BF}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 32 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 10 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{AE}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{AE}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 2\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{DG}}(\overline{\mathrm{D'G}})$分子：$\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_n = a_{n-1}\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{DG}}(\overline{\mathrm{D'G}})$分母：$\begin{cases} a_1 = 32 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 10\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	$\overline{D'E}$	$\overline{EC'}$	$\overline{\mathrm{EG}}$
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)(a+2b)}$	$\frac{b^2+(a+b)^2}{(a+b)(a+2b)}$	$\frac{a[b^2+(a+b)^2]}{2(a+b)^2(a+2b)}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{51}{160}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{29}{35}$	$\frac{87}{350}$
$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{54}$	$\frac{45}{54}$	$\frac{135}{648}$
$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{77}$	$\frac{65}{77}$	$\frac{195}{1078}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{104}$	$\frac{89}{104}$	$\frac{267}{1664}$
$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{18}{135}$	$\frac{117}{135}$	$\frac{351}{2430}$
$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{21}{170}$	$\frac{149}{170}$	$\frac{447}{3400}$
$\frac{3}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{24}{209}$	$\frac{185}{209}$	$\frac{555}{4598}$
$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{27}{252}$	$\frac{225}{252}$	$\frac{675}{6048}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{30}{299}$	$\frac{269}{299}$	$\frac{807}{7774}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

$\overline{\mathrm{D'E}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 3\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{D'E}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 7 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{E'C}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 17 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 4 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{E'C}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 7 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{EG}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 51 \\ a_n = a_{n-1} + 12n + 12 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{EG}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 160 \\ a_n = a_{n-1} + 2(6n^2 + 24n + 23) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

(四) a：b=4：n (1≦n≦10，n 為正整數)

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	$\overline{CF}$($\overline{\mathrm{C'F}}$)	$\overline{BF}$	$\overline{AE}$	$\overline{\mathrm{DG}}$($\overline{\mathrm{D'G}}$)
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{b^2+(a+b)^2}{2(a+b)^2}$	$\frac{a(a+2b)}{2(a+b)^2}$	$\frac{2b}{a+2b}$	$\frac{a^2}{2(a+b)^2}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{26}{50}$	$\frac{24}{50}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{16}{50}$
$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{40}{72}$	$\frac{32}{72}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{16}{72}$
$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{58}{98}$	$\frac{40}{98}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{16}{98}$
$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{80}{128}$	$\frac{48}{128}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{16}{128}$
$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{106}{162}$	$\frac{56}{162}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{16}{162}$
$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{136}{200}$	$\frac{64}{200}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{16}{200}$
$\frac{4}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{170}{242}$	$\frac{72}{242}$	$\frac{14}{18}$	$\frac{16}{242}$
$\frac{4}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{208}{288}$	$\frac{80}{288}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{16}{288}$
$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{250}{338}$	$\frac{88}{338}$	$\frac{18}{22}$	$\frac{16}{338}$

$\frac{4}{14}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{296}{392}$	$\frac{96}{392}$	$\frac{20}{24}$	$\frac{16}{392}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

$\overline{CF}$($\overline{\mathrm{C'F}}$)分子：$\begin{cases} a_1 = 26 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 6\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{CF}$($\overline{\mathrm{C'F}}$)分母：$\begin{cases} a_1 = 50 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 14\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{BF}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 24 \\ a_n = a_{n-1} + 8\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{BF}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 50 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 14\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{AE}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{AE}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_n = a_{n-1} + 2\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{DG}}$($\overline{\mathrm{D'G}}$)分子：$\begin{cases} a_1 = 16 \\ a_n = a_{n-1}\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{DG}}$($\overline{\mathrm{D'G}}$)分母：$\begin{cases} a_1 = 50 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 14\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	$\overline{D'E}$	$\overline{EC'}$	$\overline{\mathrm{EG}}$
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)(a+2b)}$	$\frac{b^2+(a+b)^2}{(a+b)(a+2b)}$	$\frac{a[b^2+(a+b)^2]}{2(a+b)^2(a+2b)}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{26}{30}$	$\frac{104}{300}$
$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{8}{48}$	$\frac{40}{48}$	$\frac{160}{576}$
$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{12}{70}$	$\frac{58}{70}$	$\frac{232}{980}$
$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{16}{96}$	$\frac{80}{96}$	$\frac{320}{1536}$
$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{20}{126}$	$\frac{106}{126}$	$\frac{424}{2268}$
$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{24}{160}$	$\frac{136}{160}$	$\frac{544}{3200}$

$\frac{4}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{28}{198}$	$\frac{170}{198}$	$\frac{680}{4356}$
$\frac{4}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{32}{240}$	$\frac{208}{240}$	$\frac{832}{5760}$
$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{36}{286}$	$\frac{250}{286}$	$\frac{1000}{7436}$
$\frac{4}{14}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{40}{336}$	$\frac{296}{336}$	$\frac{1184}{9408}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

$\overline{\mathrm{D'E}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{D'E}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 30 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 10 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{E'C}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 26 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 6 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{E'C}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 30 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 10 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{EG}}$分子：$\begin{cases} a_1 = 104 \\ a_n = a_{n-1} + 16n + 24 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{EG}}$分母：$\begin{cases} a_1 = 300 \\ a_n = a_{n-1} + 2(6n^2 + 34n + 46) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

綜合以上 a：b=m：n (1≦m，1≦n，m、n 均為正整數)的各個遞迴式，我們可以更進一步化簡成下列的遞迴式：

$\overline{CF}$($\overline{\mathrm{C'F}}$)分子：$\begin{cases} a_1 = m^2 + 2m + 2 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 2(m-1) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{CF}$($\overline{\mathrm{C'F}}$)分母：$\begin{cases} a_1 = 2(m+1)^2 \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + 2(2m-1) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{BF}$分子：$\begin{cases} a_1 = m^2 + 2m \\ a_n = a_{n-1} + 2m \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{BF}$分母：$\begin{cases} a_1 = 2(m+1)^2 \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + (4\mathrm{m} - 2) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AE}$分子：$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \ \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AE}$分母：$\begin{cases} a_1 = m + 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \ \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{DG}}(\overline{\mathrm{D'G}})$分子：$\begin{cases} a_1 = m^2 \\ a_n = a_{n-1} \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{DG}}(\overline{\mathrm{D'G}})$分母：$\begin{cases} a_1 = 2(m+1)^2 \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + (4\mathrm{m} - 2) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{D'}E}$分子：$\begin{cases} a_1 = m \\ a_n = a_{n-1} + \mathrm{m} \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{D'}E}$分母：$\begin{cases} a_1 = (m+1)(m+2) \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + (3\mathrm{m} - 2) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{EC}$分子：$\begin{cases} a_1 = m^2 + 2m + 2 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 2(m-1) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{EC}}$分母：$\begin{cases} a_1 = (m+1)(m+2) \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + (3\mathrm{m} - 2) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{EG}$分子：$\begin{cases} a_1 = m(m^2 + 2m + 2) \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{mn} + 2(m^2 - \mathrm{m}) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{EG}$分母：$\begin{cases} a_1 = 2(m^3 + 4m^2 + 5m + 2) \\ a_n = a_{n-1} + 2[6n^2 + 2n(5m-3) + (4\mathrm{m}^2 - 5m + 2)] \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

六、由研究目的四所得到的各區塊面積一般式，求出其分子和分母的遞迴式。

由研究目的二可得到各區塊面積的一般式，因此，若代入不同正整數比例 a：b，即可得到在各種比例下各區塊面積的數值。

(一) a：b=1：n (1≦n≦10，n 為正整數)

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	△AC′E	△BCF	△D'EG
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{\mathrm{ab}}{(a+b)(a+2b)}$	$\frac{ab(a+2b)}{4(a+b)^3}$	$\frac{a^3b}{4(a+b)^3(a+2b)}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{96}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{10}{108}$	$\frac{2}{540}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{21}{256}$	$\frac{3}{1792}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{36}{500}$	$\frac{4}{4500}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{55}{864}$	$\frac{5}{9504}$

$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{91}$	$\frac{78}{1372}$	$\frac{6}{17836}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{105}{2048}$	$\frac{7}{30720}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{153}$	$\frac{136}{2916}$	$\frac{8}{49572}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{190}$	$\frac{171}{4000}$	$\frac{9}{76000}$
$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{231}$	$\frac{210}{5324}$	$\frac{10}{111804}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

△AC′E 分子：$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 1\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△AC′E 分母：$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 1\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△BCF 分子：$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 4n - 1\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△BCF 分母：$\begin{cases} a_1 = 32 \\ a_n = a_{n-1} + 4(3n^2 + 3n + 1)\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△D'EG 分子：$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 1\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△D'EG 分母：$\begin{cases} a_1 = 96 \\ a_n = a_{n-1} + 4(8n^3 + 9n^2 + 5n + 1)\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	梯形 CDGF	四邊形 C'FGE
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{(a+b)^2 - ab}{2(a+b)^2}$	$\frac{[(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 - \mathrm{ab}][(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 + \mathrm{b}^2]}{2(a+b)^3(a+2b)}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{48}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{91}{270}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{325}{896}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{861}{2250}$

$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{31}{72}$	$\frac{1891}{4752}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{43}{98}$	$\frac{3655}{8918}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{57}{128}$	$\frac{6441}{15360}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{73}{162}$	$\frac{10585}{24786}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{91}{200}$	$\frac{16471}{38000}$
$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{111}{242}$	$\frac{24531}{55902}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

梯形 CDGF 分子：$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2n \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

梯形 CDGF 分母：$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 2 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

四邊形 C'FGE 分子：$\begin{cases} a_1 = 15 \\ a_n = a_{n-1} + 2(4n^3 + 3n) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

四邊形 C'FGE 分母：$\begin{cases} a_1 = 48 \\ a_n = a_{n-1} + 2(8n^3 + 9n^2 + 5n + 1) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

(二) a：b=2：n (1≦n≦10，n 為正整數)

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	△AC′E	△BCF	△D'EG
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)(a+2b)}$	$\frac{ab(a+2b)}{4(a+b)^3}$	$\frac{a^3b}{4(a+b)^3(a+2b)}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{8}{108}$	$\frac{8}{432}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{24}{256}$	$\frac{16}{1536}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{48}{500}$	$\frac{24}{4000}$
$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{60}$	$\frac{80}{864}$	$\frac{32}{8640}$

$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{10}{84}$	$\frac{120}{1372}$	$\frac{40}{16464}$
$\frac{2}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{12}{112}$	$\frac{168}{2048}$	$\frac{48}{28672}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{14}{144}$	$\frac{224}{2916}$	$\frac{56}{46656}$
$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{16}{180}$	$\frac{288}{4000}$	$\frac{64}{72000}$
$\frac{2}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{18}{220}$	$\frac{360}{5324}$	$\frac{72}{106480}$
$\frac{2}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{20}{264}$	$\frac{440}{6912}$	$\frac{80}{152064}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

△AC′E 分子：$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△AC′E 分母：$\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 4\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△BCF 分子：$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 8n\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△BCF 分母：$\begin{cases} a_1 = 108 \\ a_n = a_{n-1} + 4(3n^2 + 9n + 7)\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△D’EG 分子：$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 8\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△D’EG 分母：$\begin{cases} a_1 = 432 \\ a_n = a_{n-1} + 4(8n^3 + 30n^2 + 38n + 16)\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	梯形 CDGF	四邊形 C'FGE
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{(a+b)^2 - ab}{2(a+b)^2}$	$\frac{[(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 - \mathrm{ab}][(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 + \mathrm{b}^2]}{2(a+b)^3(a+2b)}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{70}{216}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{240}{768}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{19}{50}$	$\frac{646}{2000}$

$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{28}{72}$	$\frac{1456}{4320}$
$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{39}{98}$	$\frac{2886}{8232}$
$\frac{2}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{52}{128}$	$\frac{5200}{14336}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{67}{162}$	$\frac{8710}{23328}$
$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{84}{200}$	$\frac{13776}{36000}$
$\frac{2}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{103}{242}$	$\frac{20806}{53240}$
$\frac{2}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{124}{288}$	$\frac{30256}{76032}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

梯形 CDGF 分子：$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_n = a_{n-1} + 2n + 1 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

梯形 CDGF 分母：$\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 6 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

四邊形 C'FGE 分子：$\begin{cases} a_1 = 70 \\ a_n = a_{n-1} + 2(4n^3 + 6n^2 + 12n + 5) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

四邊形 C'FGE 分母：$\begin{cases} a_1 = 216 \\ a_n = a_{n-1} + 2(8n^3 + 30n^2 + 38n + 16) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

(三) a：b=3：n (1≦n≦10，n 為正整數)

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	△AC'E	△BCF	△D'EG
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{\mathrm{ab}}{(a+b)(a+2b)}$	$\frac{ab(a+2b)}{4(a+b)^3}$	$\frac{a^3b}{4(a+b)^3(a+2b)}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{15}{256}$	$\frac{27}{1280}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{42}{500}$	$\frac{54}{3500}$
$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{54}$	$\frac{81}{864}$	$\frac{81}{7776}$

$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{77}$	$\frac{132}{1372}$	$\frac{108}{15092}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{104}$	$\frac{195}{2048}$	$\frac{135}{26624}$
$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{18}{135}$	$\frac{270}{2916}$	$\frac{162}{43740}$
$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{21}{170}$	$\frac{357}{4000}$	$\frac{189}{68000}$
$\frac{3}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{24}{209}$	$\frac{456}{5324}$	$\frac{216}{101156}$
$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{27}{252}$	$\frac{567}{6912}$	$\frac{243}{145152}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{30}{299}$	$\frac{690}{8788}$	$\frac{270}{202124}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

△AC′E 分子：$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△AC′E 分母：$\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 7 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△BCF 分子：$\begin{cases} a_1 = 15 \\ a_n = a_{n-1} + 3(4n + 1) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△BCF 分母：$\begin{cases} a_1 = 256 \\ a_n = a_{n-1} + 4(3n^2 + 15n + 19) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△D'EG 分子：$\begin{cases} a_1 = 27 \\ a_n = a_{n-1} + 27 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△D'EG 分母：$\begin{cases} a_1 = 1280 \\ a_n = a_{n-1} + 4(8n^3 + 51n^2 + 107n + 73) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	梯形 CDGF	四邊形 C'FGE
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{(a+b)^2 - ab}{2(a+b)^2}$	$\frac{[(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 - \mathrm{ab}][(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 + \mathrm{b}^2]}{2(a+b)^3(a+2b)}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{221}{640}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{19}{50}$	$\frac{551}{1750}$

$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{27}{72}$	$\frac{1215}{3888}$
$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{37}{98}$	$\frac{2405}{7546}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{49}{128}$	$\frac{4361}{13312}$
$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{63}{162}$	$\frac{7371}{21870}$
$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{79}{200}$	$\frac{11771}{34000}$
$\frac{3}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{97}{242}$	$\frac{17945}{50578}$
$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{117}{288}$	$\frac{26325}{72576}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{139}{338}$	$\frac{37391}{101062}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

梯形 CDGF 分子：$\begin{cases} a_1 = 13 \\ a_n = a_{n-1} + 2n + 2 \ (\text{n} \geq 2) \end{cases}$

梯形 CDGF 分母：$\begin{cases} a_1 = 32 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 10 \ (\text{n} \geq 2) \end{cases}$

四邊形 C'FGE 分子：$\begin{cases} a_1 = 221 \\ a_n = a_{n-1} + 2(4n^3 + 12n^2 + 31n + 23) \ (\text{n} \geq 2) \end{cases}$

四邊形 C'FGE 分母：$\begin{cases} a_1 = 640 \\ a_n = a_{n-1} + 2(8n^3 + 51n^2 + 107n + 73) \ (\text{n} \geq 2) \end{cases}$

(四) a：b=4：n (1≦n≦10，n 為正整數)

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	△AC′E	△BCF	△D'EG
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{\text{ab}}{(a+b)(a+2b)}$	$\frac{ab(a+2b)}{4(a+b)^3}$	$\frac{a^3b}{4(a+b)^3(a+2b)}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{24}{500}$	$\frac{64}{3000}$
$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{8}{48}$	$\frac{64}{864}$	$\frac{128}{6912}$

$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{12}{70}$	$\frac{120}{1372}$	$\frac{192}{13720}$
$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{16}{96}$	$\frac{192}{2048}$	$\frac{256}{24576}$
$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{20}{126}$	$\frac{280}{2916}$	$\frac{320}{40824}$
$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{24}{160}$	$\frac{384}{4000}$	$\frac{384}{64000}$
$\frac{4}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{28}{198}$	$\frac{504}{5324}$	$\frac{448}{95832}$
$\frac{4}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{32}{240}$	$\frac{640}{6912}$	$\frac{512}{138240}$
$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{36}{286}$	$\frac{792}{8788}$	$\frac{576}{193336}$
$\frac{4}{14}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{40}{336}$	$\frac{960}{10976}$	$\frac{640}{263424}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

△AC′E 分子：$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 4\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△AC′E 分母：$\begin{cases} a_1 = 30 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 10\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△BCF 分子：$\begin{cases} a_1 = 24 \\ a_{\mathrm{n}} = a_{\mathrm{n}-1} + 8(2\mathrm{n} + 1)\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△BCF 分母：$\begin{cases} a_1 = 500 \\ a_n = a_{n-1} + 4(3n^2 + 21n + 37)\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△D'EG 分子：$\begin{cases} a_1 = 64 \\ a_n = a_{n-1} + 64\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△D'EG 分母：$\begin{cases} a_1 = 3000 \\ a_n = a_{n-1} + 4(8n^3 + 72n^2 + 212n + 202)\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AC'}$	$\overline{BC'}$	梯形 CDGF	四邊形 C'FGE
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{(a+b)^2 - ab}{2(a+b)^2}$	$\frac{[(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 - \mathrm{ab}][(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 + \mathrm{b}^2]}{2(a+b)^3(a+2b)}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{546}{1500}$

$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{28}{72}$	$\frac{1120}{3456}$
$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{37}{98}$	$\frac{2146}{6860}$
$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{48}{128}$	$\frac{3840}{12288}$
$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{61}{162}$	$\frac{6466}{20412}$
$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{76}{200}$	$\frac{10336}{32000}$
$\frac{4}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{93}{242}$	$\frac{15810}{47916}$
$\frac{4}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{112}{288}$	$\frac{23296}{69120}$
$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{133}{338}$	$\frac{33250}{96668}$
$\frac{4}{14}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{156}{392}$	$\frac{46176}{131712}$

由上列表格中分子和分母的數字可推算出下列的遞迴式：

梯形 CDGF 分子：$\begin{cases} a_1 = 21 \\ a_n = a_{n-1} + 2n + 3 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

梯形 CDGF 分母：$\begin{cases} a_1 = 50 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 14 \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

四邊形 C'FGE 分子：$\begin{cases} a_1 = 546 \\ a_n = a_{n-1} + 2(4n^3 + 18n^2 + 60n + 63) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

四邊形 C'FGE 分母：$\begin{cases} a_1 = 1500 \\ a_n = a_{n-1} + 2(8n^3 + 72n^2 + 212n + 202) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

綜合以上 a：b=m：n (1≦m，1≦n，m、n 均為正整數)的各個遞迴式，我們可以更進一步化簡成下列的遞迴式：

△ AC′E 分子：$\begin{cases} a_1 = m \\ a_n = a_{n-1} + \mathrm{m} \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△ AC′E 分母：$\begin{cases} a_1 = (m+1)(m+2) \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + (3\mathrm{m} - 2) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△BCF 分子：$\begin{cases} a_1 = m(m+2) \\ a_n = a_{n-1} + \mathrm{m}(4\mathrm{n} + \mathrm{m} - 2) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\triangle$BCF 分母：$\begin{cases} a_1 = 4(m+1)^3 \\ a_n = a_{n-1} + 4[3\mathrm{n}^2 + 3\mathrm{n}(2\mathrm{m}-1) + 3m^2 - 3\mathrm{m} + 1]\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\triangle$D'EG 分子：$\begin{cases} a_1 = 4m^3 \\ a_n = a_{n-1} + \mathrm{m}^3\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\triangle$D'EG 分母：

$$\begin{cases} a_1 = 4(m+1)^3(m+2) \\ a_n = a_{n-1} + 4[8\mathrm{n}^3 + 3\mathrm{n}^2(7\mathrm{m}-4) + \mathrm{n}(18\mathrm{m}^2 - 21m + 8) + (5\mathrm{m}^3 - 9m^2 + 7m - 2)]\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$$

梯形 CDGF 分子：$\begin{cases} a_1 = m^2 + m + 1 \\ a_n = a_{n-1} + (m-1) + 2\mathrm{n}\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

梯形 CDGF 分母：$\begin{cases} a_1 = 2(m+1)^2 \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + 4\mathrm{m} - 2\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

四邊形 C'FGE 分子：

$$\begin{cases} a_1 = (m^2 + 2m + 2)(m^2 + m + 1) \\ a_n = a_{n-1} + 2[4\mathrm{n}^3 + 6\mathrm{n}^2(\mathrm{m}-1) + \mathrm{n}(5\mathrm{m}^2 - 6\mathrm{m} + 4) + \frac{2}{3}(2\mathrm{m}^3 - 3\mathrm{m}^2 + \mathrm{m}) + 2^{m-1} - 1]\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$$

四邊形 C'FGE 分母：

$$\begin{cases} a_1 = 2(m+1)^3(m+2) \\ a_n = a_{n-1} + 2[8\mathrm{n}^3 + 3\mathrm{n}^2(7\mathrm{m}-4) + \mathrm{n}(18\mathrm{m}^2 - 21\mathrm{m} + 8) + (5\mathrm{m}^3 - 9\mathrm{m}^2 + 7\mathrm{m} - 2)]\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$$

伍、研究結果

一、以$\overline{\mathrm{AC'}}$：$\overline{\mathrm{C'B}}$ =a：b (a、b 均為正整數)，改變 C'點在$\overline{\mathrm{AB}}$上的位置，求出各線段長度的一般式。

假設正方形邊長為 1，可以求出各線段長度的一般式如下：

$\overline{\mathrm{AC'}} = \frac{a}{a+b}$

$\overline{\mathrm{C'B}} = \frac{b}{a+b}$

$\overline{\mathrm{CF}} = \overline{\mathrm{C'F}} = \frac{b^2+(a+b)^2}{2(a+b)^2}$

$\overline{BF} = \frac{a(a+2b)}{2(a+b)^2}$

$\overline{AE} = \frac{2b}{a+2b}$

$\overline{\mathrm{DG}} = \overline{\mathrm{D'G}} = \frac{a^2}{2(a+b)^2}$

$\overline{\mathrm{D'E}} = \frac{ab}{(a+b)(a+2b)}$

$\overline{EC'} = \frac{b^2+(a+b)^2}{(a+b)(a+2b)}$

$\overline{EG} = \frac{a[b^2+(a+b)^2]}{2(a+b)^2(a+2b)}$

$\overline{GF} = \frac{\sqrt{b^2+(a+b)^2}}{a+b}$

二、求出 a 和 b 在何種條件下，使$\overline{GF}$長度的數值為一個有理數。

我們代入畢氏三元數的生成公式，可以得到：

(一)當$a = 2n^2 - 1$，b=2n+1 (n 為正整數)的條件下，$\overline{GF} = \frac{\sqrt{b^2+(a+b)^2}}{a+b} = \frac{2n^2+2n+1}{2n^2+2n}$ 為一個有理數。

(二)當$a = n^2 - 2n - 1$，b=2n (n≧3，n 為正整數)的條件下，$\overline{GF} = \frac{\sqrt{b^2+(a+b)^2}}{a+b} = \frac{n^2+1}{n^2-1}$ 為一個有理數。

三、由△AC′E、△BC′F、△D'EG 三個直角三角形之邊長，求出畢氏三元數的生成公式。

由研究過程可知三個直角三角形的邊長比例關係相同，皆為$(a+b)^2 - b^2$：$2(a+b)\,b$： $(a+b)^2 + b^2$ (a、b均為正整數) = $u^2 - v^2$：$2uv$： $u^2 + v^2$ (u＞v，u、v均為正整數)，為畢氏三元數的生成公式。

四、以$\overline{AC'}$：$\overline{C'B}$ =a：b (a、b 均為正整數)，改變 C′點在$\overline{AB}$上的位置，求出各區塊面積的一般式。

由各線段長度的一般式，我們可以求出各區塊面積的一般式：

△AC′E= $\frac{ab}{(a+b)(a+2b)}$

△BC′F= $\frac{ab(a+2b)}{4(a+b)^3}$

△D'EG= $\frac{a^3b}{4(a+b)^3(a+2b)}$

梯形 CDGF= $\frac{(a+b)^2-ab}{2(a+b)^2}$

四邊形 C'FGE= $\frac{[(a+b)^2-ab][(a+b)^2+b^2]}{2(a+b)^3(a+2b)}$

五、由研究目的一所得到的各線段長度一般式，求出其分子和分母的遞迴式。

綜合研究過程 a：b=m：n (1≦m，1≦n，m、n 均為正整數)的各個遞迴式，我們可以更進一步化簡並求出其分子和分母的遞迴式：

$\overline{CF}(\overline{\mathrm{C'F}})$分子：$\begin{cases} a_1 = m^2 + 2m + 2 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 2(m-1) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{CF}(\overline{\mathrm{C'F}})$分母：$\begin{cases} a_1 = 2(m+1)^2 \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + 2(2m-1) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{BF}$分子：$\begin{cases} a_1 = m^2 + 2m \\ a_n = a_{n-1} + 2m \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{BF}$分母：$\begin{cases} a_1 = 2(m+1)^2 \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + (4\mathrm{m} - 2) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AE}$分子：$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \ \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{AE}$分母：$\begin{cases} a_1 = m + 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \ \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{DG}}(\overline{\mathrm{D'G}})$分子：$\begin{cases} a_1 = m^2 \\ a_n = a_{n-1} \ \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{DG}}(\overline{\mathrm{D'G}})$分母：$\begin{cases} a_1 = 2(m+1)^2 \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + (4\mathrm{m} - 2) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{D'}E}$分子：$\begin{cases} a_1 = m \\ a_n = a_{n-1} + \mathrm{m} \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{D'}E}$分母：$\begin{cases} a_1 = (m+1)(m+2) \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + (3\mathrm{m} - 2) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{EC}$分子：$\begin{cases} a_1 = m^2 + 2m + 2 \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 2(m-1) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{\mathrm{EC}}$分母：$\begin{cases} a_1 = (m+1)(m+2) \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + (3\mathrm{m} - 2) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{EG}$分子：$\begin{cases} a_1 = m(m^2 + 2m + 2) \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{mn} + 2(m^2 - \mathrm{m}) \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

$\overline{EG}$分母：$\begin{cases} a_1 = 2(m^3 + 4m^2 + 5m + 2) \\ a_n = a_{n-1} + 2[6n^2 + 2n(5m-3) + (4\mathrm{m}^2 - 5m + 2)] \ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

六、由研究目的四所得到的各區塊面積一般式，求出其分子和分母的遞迴式。

綜合研究過程 a：b=m：n (1≦m，1≦n，m、n 均為正整數)的各個遞迴式，我們可以更進一步化簡並求出其分子和分母的遞迴式：

△ AC′E 分子：$\begin{cases} a_1 = m \\ a_n = a_{n-1} + \mathrm{m}\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△ AC′E 分母：$\begin{cases} a_1 = (m+1)(m+2) \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + (3\mathrm{m} - 2)\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△BCF 分子：$\begin{cases} a_1 = m(m+2) \\ a_n = a_{n-1} + \mathrm{m}(4\mathrm{n} + \mathrm{m} - 2)\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△BCF 分母：$\begin{cases} a_1 = 4(m+1)^3 \\ a_n = a_{n-1} + 4[3\mathrm{n}^2 + 3\mathrm{n}(2\mathrm{m} - 1) + 3m^2 - 3\mathrm{m} + 1]\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△D'EG 分子：$\begin{cases} a_1 = 4m^3 \\ a_n = a_{n-1} + \mathrm{m}^3\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

△D'EG 分母：

$$\begin{cases} a_1 = 4(m+1)^3(m+2) \\ a_n = a_{n-1} + 4[8\mathrm{n}^3 + 3\mathrm{n}^2(7\mathrm{m} - 4) + \mathrm{n}(18\mathrm{m}^2 - 21m + 8) + (5\mathrm{m}^3 - 9m^2 + 7m - 2)]\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$$

梯形 CDGF 分子：$\begin{cases} a_1 = m^2 + m + 1 \\ a_n = a_{n-1} + (m-1) + 2\mathrm{n}\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

梯形 CDGF 分母： $\begin{cases} a_1 = 2(m+1)^2 \\ a_n = a_{n-1} + 4\mathrm{n} + 4\mathrm{m} - 2\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$

四邊形 C'FGE 分子：

$$\begin{cases} a_1 = (m^2 + 2m + 2)(m^2 + m + 1) \\ a_n = a_{n-1} + 2[4\mathrm{n}^3 + 6\mathrm{n}^2(\mathrm{m} - 1) + \mathrm{n}(5\mathrm{m}^2 - 6\mathrm{m} + 4) + \frac{2}{3}(2\mathrm{m}^3 - 3\mathrm{m}^2 + \mathrm{m}) + 2^{m-1} - 1]\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$$

四邊形 C'FGE 分母：

$$\begin{cases} a_1 = 2(m+1)^3(m+2) \\ a_n = a_{n-1} + 2[8\mathrm{n}^3 + 3\mathrm{n}^2(7\mathrm{m} - 4) + \mathrm{n}(18\mathrm{m}^2 - 21\mathrm{m} + 8) + (5\mathrm{m}^3 - 9\mathrm{m}^2 + 7\mathrm{m} - 2)]\ (\mathrm{n} \geq 2) \end{cases}$$

陸、討論

一、本次研究均使用正方形的色紙，未來將會嘗試使用不同的四邊形(長方形或平行四邊形)紙張進行研究，進而求出在不同的邊長比例下，不同線段長度、區塊面積的一般式及其分子和分母的遞迴式。

二、本次研究只限制在不同正整數比例下的數值關係，所以不會出現無理數比例，因此就沒有研究$\overline{\mathrm{GF}}$分子和分母的遞迴式。

柒、結論

一開始我們不太知道怎麼研究芳賀第三定理，所以遇到了很多瓶頸，經過不斷地上網搜尋資料並和老師討論之後，終於皇天不負苦心人，我們不僅在研究過程中學到了相似形和遞迴式的數學知識，還對畢氏定理和乘法公式有了更

進一步的了解，最高興的當然是順利地完成了這件作品。

捌、參考資料及其他

一、羅和憲(2013)．芳賀第二定理的延伸及其形成線段數值的數字變化方式．中華民國第 53 屆中小學科學展覽會。
二、賴昱維(2014)．畢氏三元數生成公式之研究與發展．數學傳播，38(2)，88-96。
三、芳賀和夫(2016)．摺紙玩數學：日本摺紙大師的幾何學教育．臺北市：世茂。
四、阮華剛、譚志良(2016)．摺紙與數學．香港教育局課程發展處數學教育組。