

# 屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會

## 作品說明書

科 別：物理科

組 別：國中組

作品名稱：保護蛋蛋~利用第二類槓桿原理及橢圓方程式量測雞蛋  
抗壓力大小之研究

關 鍵 詞：應壓力、槓桿原理、橢圓方程式（最多三個）

編號：B2019

# 摘 要

市面上裝雞蛋的盒子琳琅滿目，哪一種對雞蛋的保護最好？故設計製作鐵架，利用理化課第二類槓桿原理，測量雞蛋在不同雞蛋支撐架上所能承受的最大抗力，並考慮不同雞蛋支撐架的張角對雞蛋抗壓力的影響。當我們把所有數據資料整合之後，將雞蛋視為一個橢圓，利用數學~橢圓方程式計算雞蛋支架與雞蛋的切點應壓力方向有某種關係，也藉由不同的支撐架數量來應證此關係是正確的。實驗證明，當雞蛋和與雞蛋盒接觸時，接觸點的壓力方向趨向於雞蛋的橢圓形中心點時，雞蛋的抗壓力最大，蛋盒的保護力可達到最大。蛋盒的傾斜面接近於 28 度(仰角 62 度)時，對雞蛋的保護力會最大。當傾斜角小於 16.5 度時，接觸面已近鉛直面，主要目的是固定雞蛋用的，避免雞蛋晃動。而當傾斜面大於 34 度時  $q$  值會劇增，便難以比較雞蛋應壓力。

## 壹、研究動機

生活中我們經常會遇到，當從市場或蛋商買雞蛋回家時，常因包裝或運送過程中缺乏保護，而造成若干雞蛋破損漏液，非但造成損失，也易造成雞蛋汙染，影響新鮮度或食用安全。走在琳琅滿目的超市和量販店，我們充滿好奇與挑戰性，心中突然萌生了一個疑問，為什麼雞蛋的盒子有各式各樣的呢？雞蛋由蛋殼保護，當然也同時受到蛋盒的保護，但如果廠商在運送的途中蛋殼不慎破裂，那是多麼的浪費與可惜，所以我們就想探討什麼樣的雞蛋盒所能承受的壓力最大。

因為研究的範圍很廣，包括：雞蛋盒的材質種類、厚度、造型.....，所以我們想藉單一方面作探討，並找一個驗證的方式。

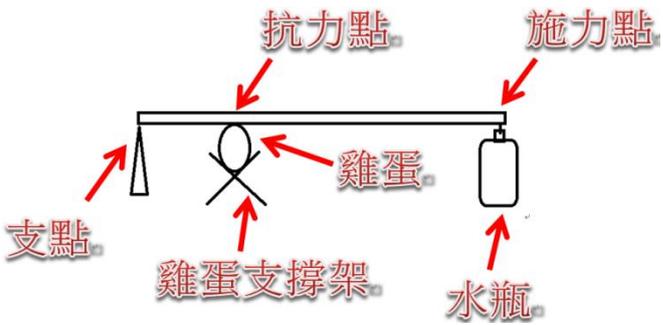
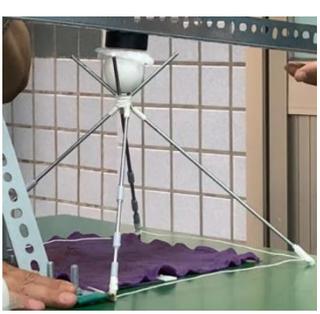
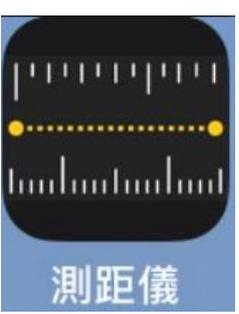
由於此實驗十分有趣且與日常生活息息相關，於是我們就開啟了對雞蛋盒的一番研究，展開一系列的研究之旅！

## 貳、研究目的

- 一、探討雞蛋盒槽角度和雞蛋所能承受的壓力關係。
- 二、探討雞蛋盒凹槽的受力點數量和雞蛋所能承受的壓力關係。
- 三、探討利用橢圓方程式來計算雞蛋支架與雞蛋的切點應壓力方向之間的關係。

## 參、研究設備與器材

一、設備器材：下圖表(1)為實驗設備器材

利用角鐵所自製之測量工具		測量工具示意圖	
			
電子秤	雞蛋支撐架	雞蛋	手機 app「測距儀」
			
游標尺			
			

圖表(1)

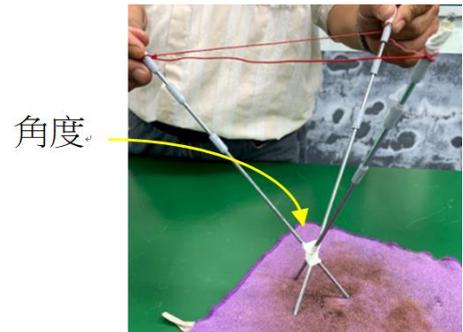
## 肆、研究過程與方法

### 一、研究過程

(一)思考醞釀：我們想知道雞蛋在不同蛋盒中，有不同數量的接觸點和不同角度的接觸點時，雞蛋盒對雞蛋的保護力夠不夠，並找出在何種的角度下及多少接觸點時，雞蛋所能受到的蛋盒保護力會最大。

(二)實驗的設計：

1. 購買相同品牌的雞蛋。
2. 測量雞蛋的寬、高、重量。
3. 利用第二槓桿原理測量雞蛋的抗壓力。
4. 測量雞蛋在不同角度的支撐架上的抗壓力。  
如右圖(2)。
5. 統整數據。

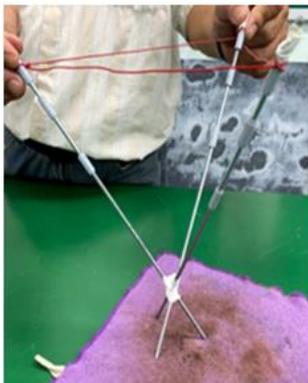


圖(2)

(三)數據分析：

1. 利用槓桿原理測得雞蛋的抗壓力。
2. 依不同的角度排序比較。
3. 依不同數目的接觸點，如下圖(3)排列依序比較。
4. 利用橢圓方程式計算抗壓力的方式是否指向特定方位。

三支架



四支架



五支架

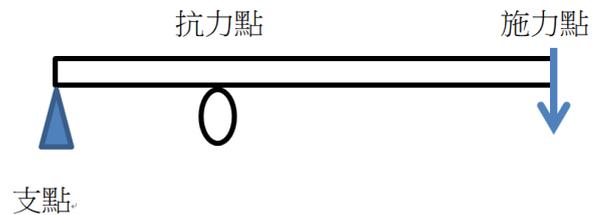


圖(3)

## 二、研究原理：

### (一)槓桿原理：

1. 我們是利用第二槓桿原理(抗力點在中間)，如右圖(4)。將雞蛋放置在抗力點的位置，在施力點的位置吊掛一個寶特瓶空瓶，然後在寶特瓶內加水，直到雞蛋被壓破為止。



圖(4)

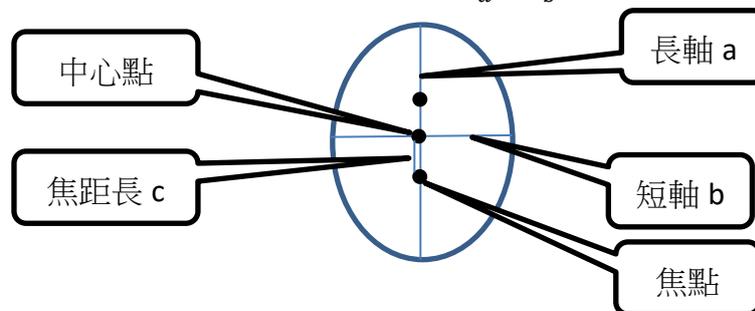
2. 利用施力矩等於抗力矩，計算雞蛋的抗力大小。

公式：(寶特瓶+水重)(g<sup>w</sup>)×寶特瓶施力臂(cm) + 槓桿重(g<sup>w</sup>)×槓桿施力臂(cm)

=雞蛋受力(g<sup>w</sup>)×雞蛋施力臂(cm)

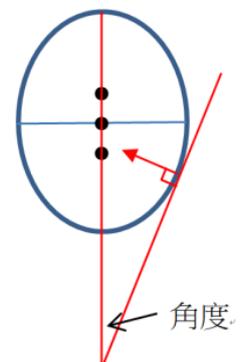
### (二)橢圓方程式：如下圖(5)

1. 將雞蛋的外型視為標準橢圓。
2. 將雞蛋的高，視為橢圓的長軸長(2a)；雞蛋的寬，視為橢圓的短軸長(2b)。
3. 設雞蛋中心點座標為(0, 0)。利用橢圓公式： $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ，可以求出焦點(0, c)。



圖(5)

4. 因為  $a^2 = b^2 + c^2$ ，所以利用長軸和短軸求橢圓焦距。
5. 利用角度求抗壓力的方向，是否指向中心點還是焦點。
6. 使用所做的實驗數據分析，不同的抗力與不同的角度關係。當抗力最大時，雞蛋的應力角度是指向哪一個位置？或是有何相關的關係。如右圖(6)。



圖(6)

### 三、實驗步驟：

(一) 利用自製角鐵的第二橫桿，測量雞蛋所受的力之裝置。如下圖(7)

(二) 利用鐵棒所製成的放雞蛋支撐器。如下圖(8)並在鐵棒與鐵棒之間加上細鐵絲固定，避免實驗中，鐵架的支撐角度改變。

(三) 利用游標尺測量雞蛋的高和寬。如下圖(9)

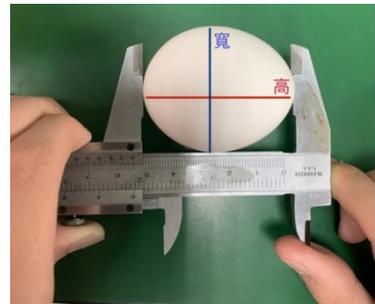
1. 每次實驗前，會先測量雞蛋的高和寬，我們取蛋高 5.70~5.75cm、蛋寬 4.30~4.35cm 的雞蛋來做實驗。將雞蛋的大小變因控制在此範圍內。
2. 若將雞蛋是視為一標準的橢圓，則長軸長(2a)為 5.725cm，短軸長(2b)為 4.325cm。
3. 依照橢圓公式： $a^2=b^2+c^2$ 。所以求得焦距長  $c=1.875\text{cm}$ 。



(圖 7)



(圖 8)

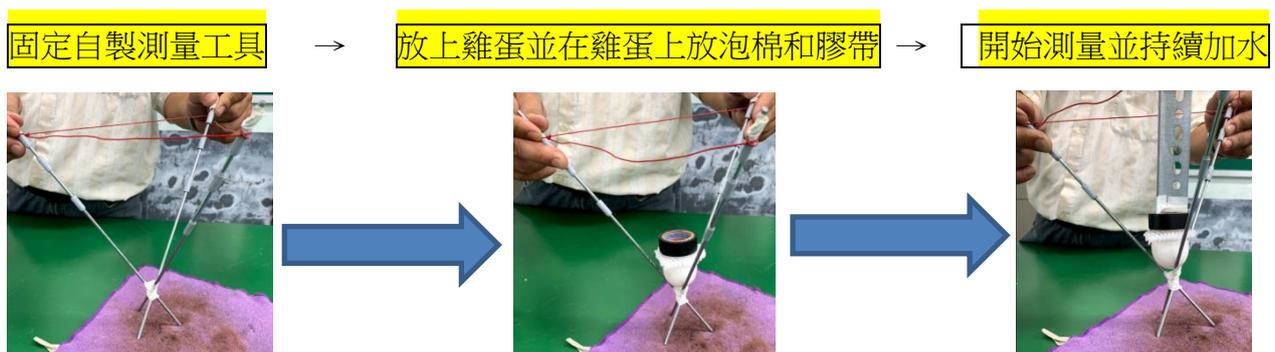


(圖 9)

(四) 在鐵棒支撐架上放雞蛋。

1. 分別測量不同數目下的鐵棒。
2. 分別測量在相同的鐵棒數目下，不同的支撐角度。
3. 在橫桿的施力端的寶特瓶內加水施力，測量抗力端的雞蛋所能承受的力。

(五) 由於我們想測得的是雞蛋下方能夠承受多少的力，故在雞蛋上方放置泡棉和膠帶，使雞蛋上方不至於會先破裂。如下圖(10)



(圖 10)

(六) 當一切準備好後，在鐵條後方放置寶特瓶並使用燒杯持續裝水。如下圖(11)

(七) 當雞蛋出現裂縫或破裂時，停止加水。如下圖(12)

(八) 測量在雞蛋破裂時的水平重，然後再計算各施力矩的總和。如下圖(13)



(圖 11)



(圖 12)



(圖 13)

1. 測量鐵條重，再利用簡易的槓桿原理(第一槓桿)找出此鐵條的重心，如下圖(14)，並計算出鐵條的施力矩。
2. 測量雞蛋破裂時的水重(含瓶子及固定瓶子的線)。並測量水瓶的施力矩。
3. 測量蛋的抗力臂。再利用總施力矩等於總抗力矩，算出雞蛋的抗力。

公式：雞蛋的抗力=(鐵條重量×鐵條力臂+水重量×水瓶力臂)/(雞蛋的抗力臂)。

(九) 計算雞蛋支撐架角度：

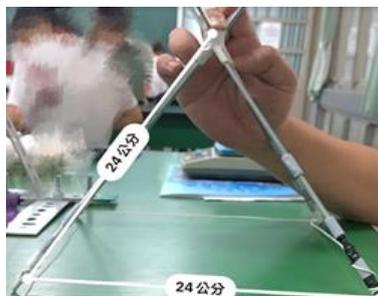
1. 利用手機 ios 系統內建 app「測距儀」測得自製測量工具的邊長，如下圖(15)。
2. 將(底邊長的一半)/斜邊長，並查表找出對應的 sin 值，查表找出對應的角度 $\theta$ 。

如下圖(16)

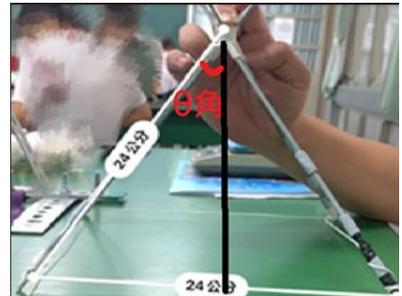
3. 雞蛋支撐架的張角為  $2\theta$ 。



(圖 14)



(圖 15)



(圖 16)

## 五、研究結果與討論

一、研究結果：

(一)以三支鐵條製作的雞蛋支撐架，由槓桿原理計算，求鐵架張角與雞蛋的抗力關係(如表 1、圖 17)。

表 1 三支鐵條製作的雞蛋支撐架其鐵架張角與雞蛋的抗力關係比較

鐵架張角 (度)	施力矩總和		雞蛋的抗力距 (cm)	雞蛋的抗力 (g <sup>w</sup> )
	鐵架(g <sup>w</sup> · cm)	水瓶(g <sup>w</sup> · cm)		
100	17864	29511.8	29	1633.65
97	17864	36214.9	29	1864.79
92	17864	53308.7	29	2454.23
87	17864	66167.6	29	3001.13
82	17864	85772.1	29	3573.66
78	17864	75684.1	29	3225.80
73	17864	51589.7	29	2394.96
68	17864	30512.2	29	1668.14
62	17864	53414.2	29	2457.87
56	17864	65556.7	29	2876.58
54	17864	37039.2	29	1893.21
48	17864	27212.1	29	1554.35
43	17864	36346.0	29	1869.31
36	13146	34251.5	21	2257.02
33	13146	42162.6	20	2765.43

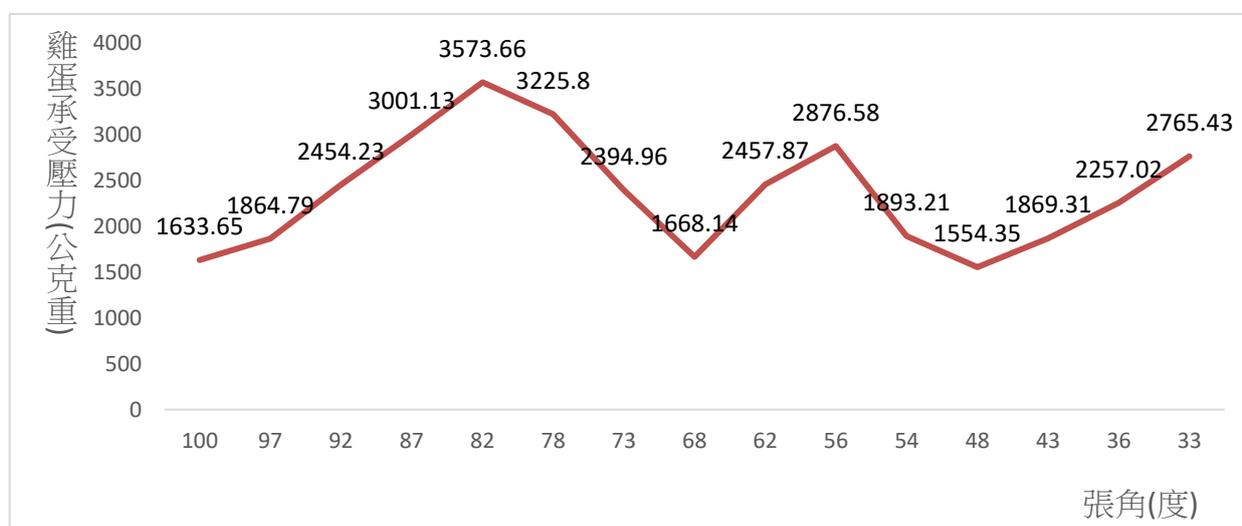


圖 17 三支鐵條製作的雞蛋支撐架其雞蛋承受壓力與張角的折線關係圖

(二)以四支鐵條製作的雞蛋支撐架，由槓桿原理計算，求鐵架張角與雞蛋的抗力關係(如表 2、圖 18)。

表 2 四支鐵條製作的雞蛋支撐架其鐵架張角與雞蛋的抗力關係比較

鐵架張角 (度)	施力矩總和		雞蛋的抗力距 (cm)	雞蛋的抗力 (g <sup>w</sup> )
	鐵架(g <sup>w</sup> · cm)	水瓶(g <sup>w</sup> · cm)		
86	13146	109654.5	19	6463.18
81	131468	82654.2	17	5635.31
78	13146	83724.7	18	5381.71
72	13146	78563.8	19	4826.83
68	13146	88309.7	20	5072.79
62	13146	91134.0	18	5793.33
60	13146	114582.4	17	7513.44
57	13146	90814.2	16	6497.51
54	13146	66368.0	14	5679.57
50	13146	51154.6	13	4946.20
48	13146	44377.5	18	3195.75
46	13146	47317.7	16	3778.98
44	13146	52219.2	15	4357.68
38	13146	81221.5	19	4966.71
34	13146	87803.4	18	5608.30

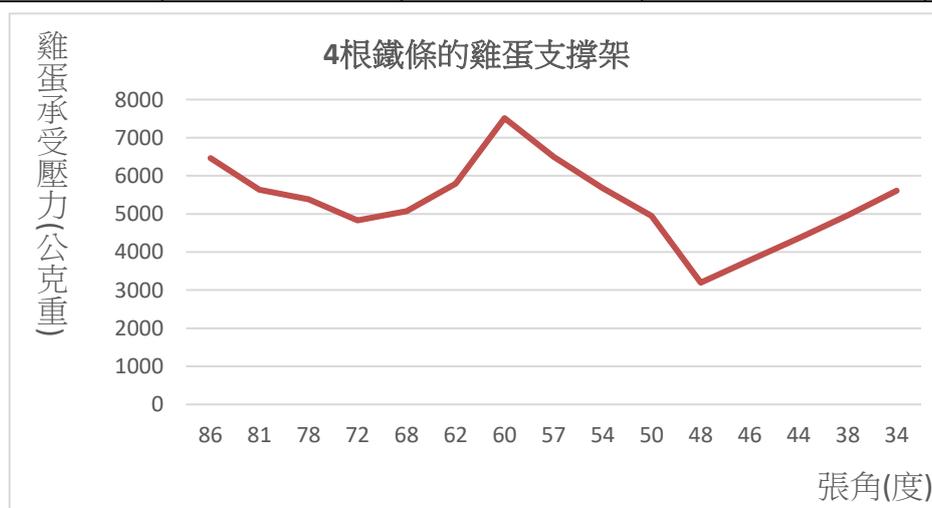


圖 19 四支鐵條製作的雞蛋支撐架其雞蛋承受壓力與張角的折線關係圖

(三)以五支鐵條製作的雞蛋支撐架，由槓桿原理計算，求鐵架張角與雞蛋的抗力關係 (如表 3、圖 19)。

表 3 五支鐵條製作的雞蛋支撐架其鐵架張角與雞蛋的抗力關係比較

鐵架張角 (度)	施力矩總和		雞蛋的抗力距 (cm)	雞蛋的抗力 (g <sup>w</sup> )
	鐵架(g <sup>w</sup> · cm)	水瓶(g <sup>w</sup> · cm)		
89	13146	135947.5	17	8770.21
83	13146	93095.4	16	6640.09
79	13146	93645.9	16	6674.50
76	13146	98124.6	18	6118.70
72	13146	95637.2	17	6399.01
67	13146	128991.7	18	7896.54
63	13146	107893.5	16	7564.97
60	13146	110861.0	17	7294.55
57	13146	92668.4	15	7054.29
54	13146	95275.9	16	6776.37
52	13146	125477.0	19	7295.95
46	13146	127344.0	14	7387.01
43	13146	103811.3	18	6497.63
38	13146	78854.7	16	5750.04
32	13146	60512.6	15	4910.57
31	13146	62593.2	15	6382.61

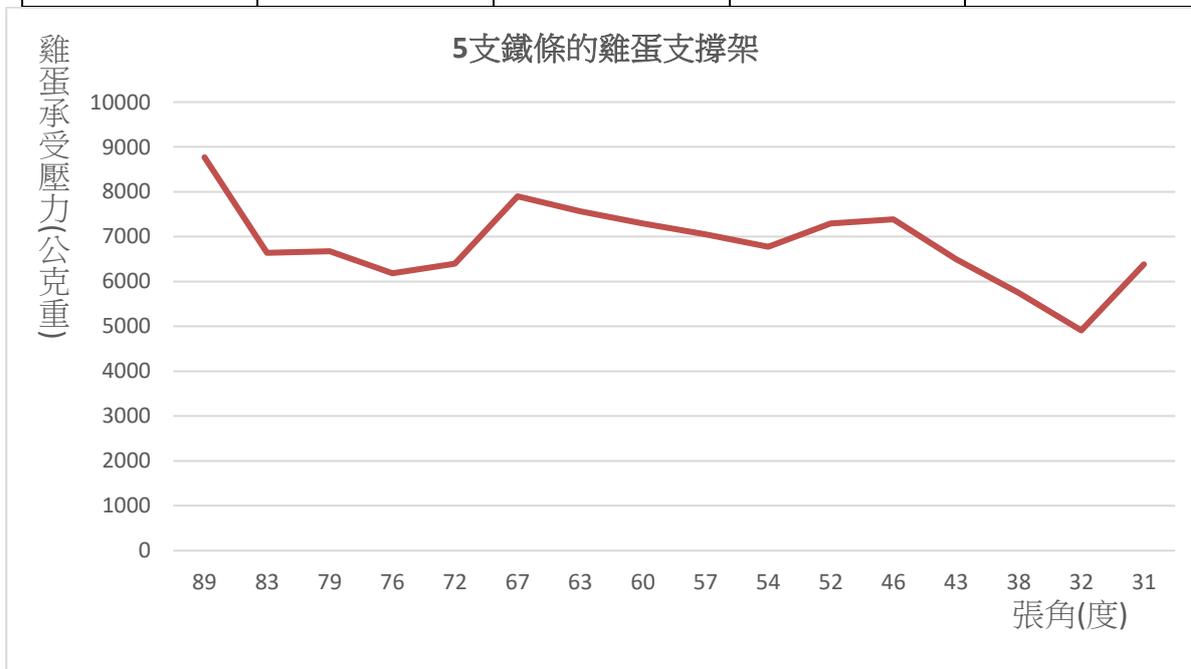


圖 20 五支鐵條製作的雞蛋支撐架其雞蛋承受壓力與張角的折線關係圖

## 二、分析與討論

(一)不同角度範圍下，各種鐵條數量之雞蛋支撐架裝置所承受的總力：

1. 連續性角度範圍，不同雞蛋支撐架承受的總力( $g^w$ )大小比較，如圖 21。

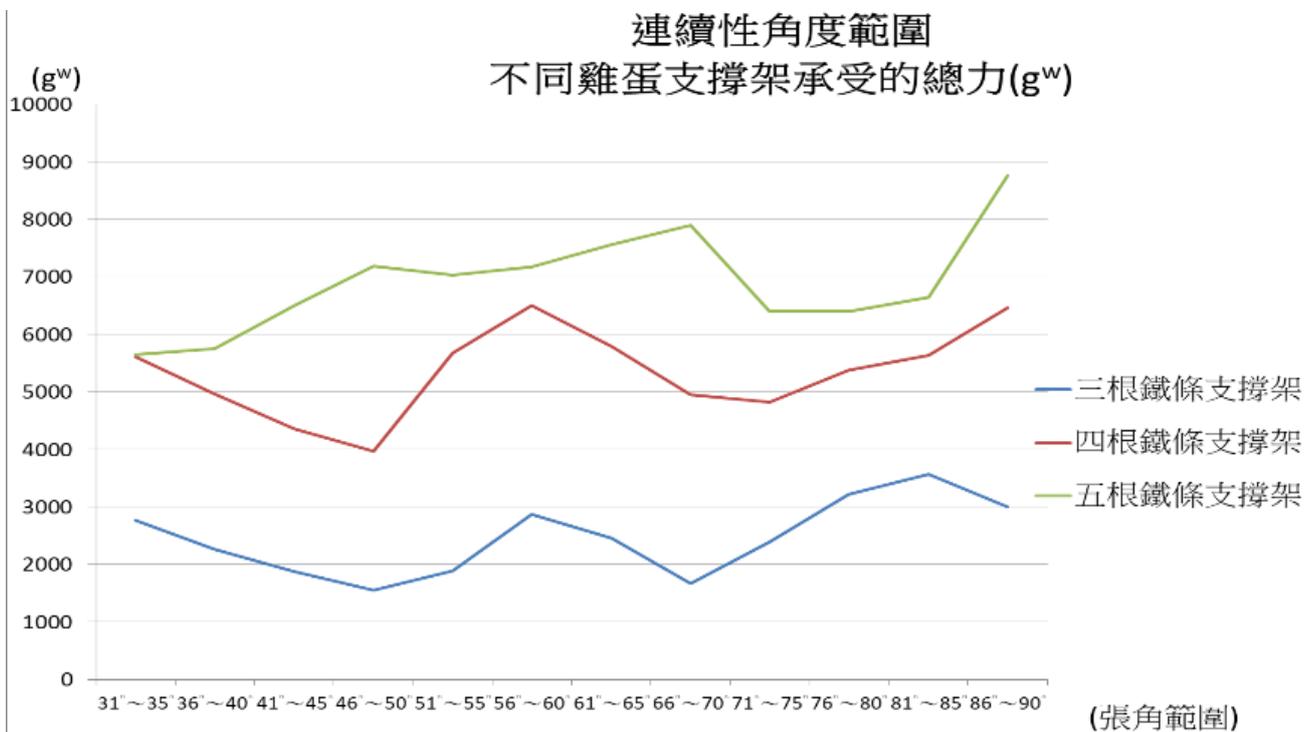


圖 21 連續性角度範圍不同雞蛋支撐架承受的總力分析比較圖

2. 由圖 21 可明確得知三種不同的雞蛋支撐架承受的總力( $g^w$ )之間的大小關係：

五根鐵條 > 四根鐵條 > 三根鐵條，也證明接觸點越多，雞蛋能承受的壓力越大。

3. 由圖 22 之紅色圓圈處，可知張角範圍約為 33°~47°、57°~67°、83°~88° 時，會出現雞蛋承受壓力達到極大值，而藉由黑色虛線可發現，隨著相同鐵條數的雞蛋支撐架的張角增加，雞蛋所能承受的壓力極大值就會增加。

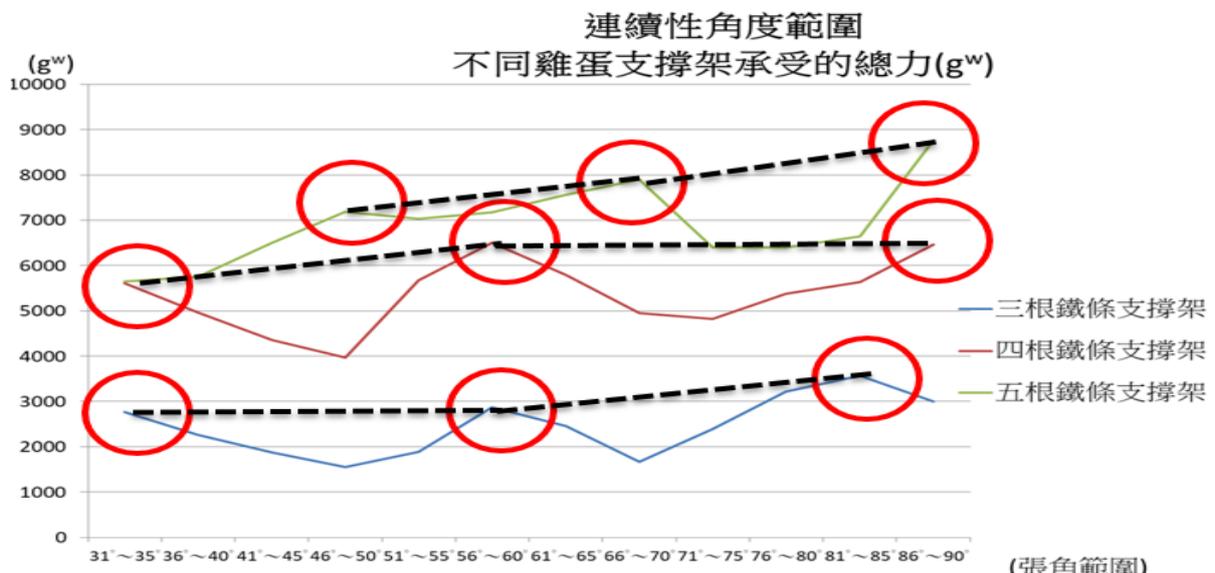


圖 22 連續性角度範圍不同雞蛋支撐架承受的總力分析比較圖

(二)圖 23 為連續性範圍角度，不同雞蛋支撐架上，每支鐵條所承受的平均力。

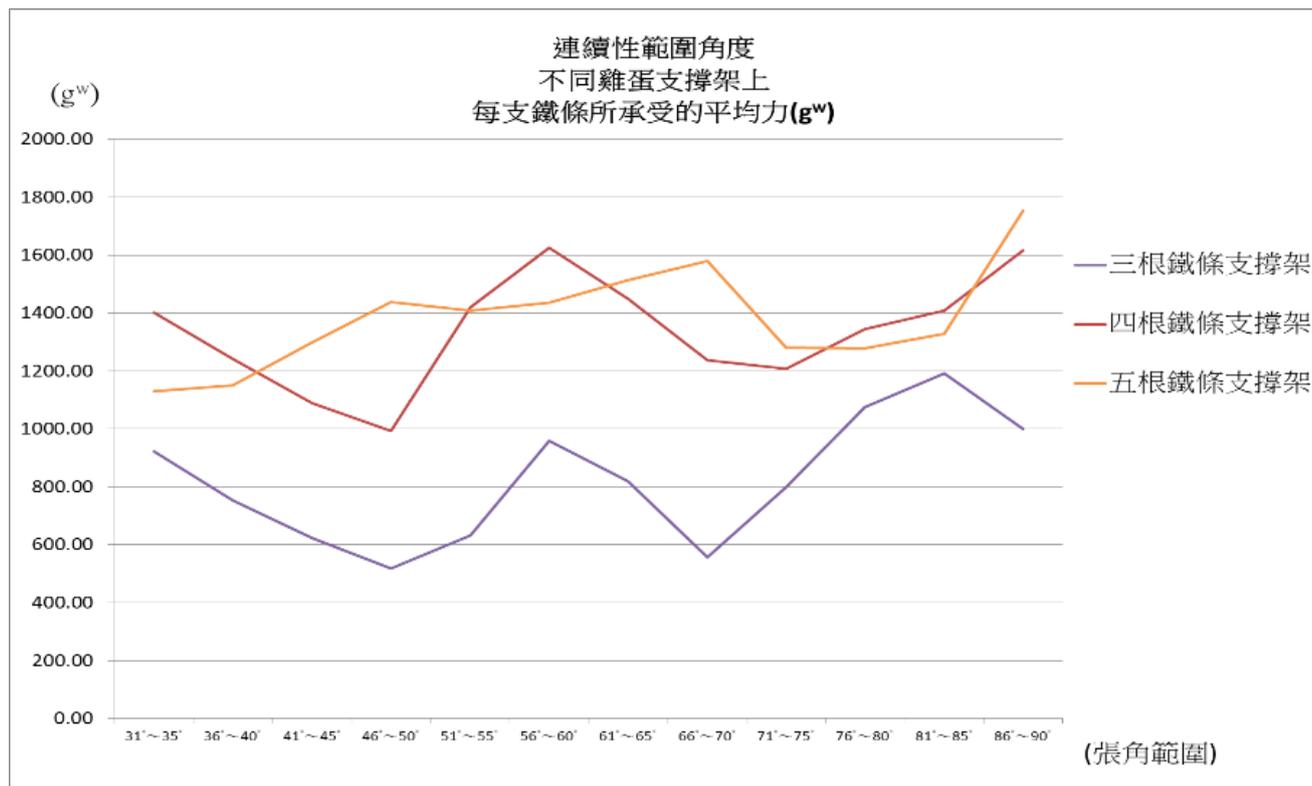


圖 23 連續性範圍角度，不同雞蛋支撐架上，每支鐵條所承受的平均力

### 結果分析~

- 1.由(圖 23)知，**三根鐵條支撐架**，其每支鐵條所承受的平均力較小。而**四根鐵條支撐架**和**五根鐵條支撐架**，其每支鐵條所承受的平均力較大，而且差不多。理論上，鐵條越多時，所承受的平均力要越大，但之所以會有這樣的結果，經我們討論之後，應該是在實驗時，雞蛋很難同時接觸 5 根鐵條，或是 5 根鐵條同時受力不均，導致雞蛋提早破裂。所以五根鐵條支撐架，其每支鐵條所承受的平均力的分布，才和其他兩種不同。也因為如此，所以我們才沒有繼續做六根鐵條支撐架。
- 2.由(圖 23)知，**三根鐵條支撐架**和**四根鐵條支撐架**，在張角  $56^{\circ}\sim 60^{\circ}$  之間和  $81^{\circ}\sim 85^{\circ}$  之間，每支鐵條所承受的平均力較大。而在張角  $46^{\circ}\sim 50^{\circ}$  之間和  $66^{\circ}\sim 70^{\circ}$  之間，每支鐵條所承受的平均力較小。

(三)雞蛋支撐架，在不同張角( $\theta$ )時，其應壓力方向與長軸的交點位置(X)，及距離中心點與焦點的距離的關係(如圖 24)。

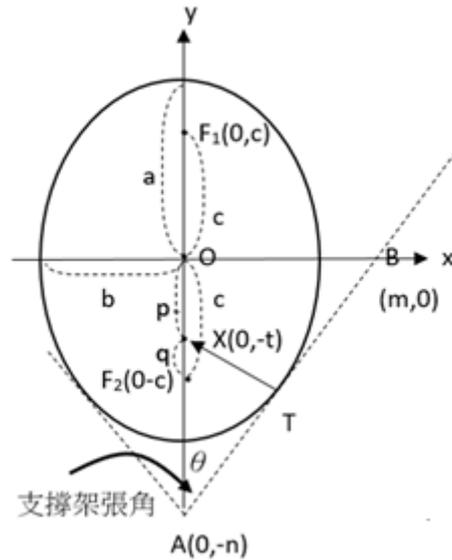


圖 24 雞蛋支撐架，在不同張角( $\theta$ )時，其應壓力方向與長軸的交點位置(X)，及距離中心點與焦點的距離的關係

1. 橢圓長軸的  $a$  取平均值為 2.86 cm， $b$  取平均值為 2.16 cm，經計算出  $c$  值為 1.88 cm。

(1)  $a$  為長軸長； $b$  為短軸長； $c$  為焦距長； $F_1(0, c)$ 、 $F_2(0, -c)$  分別為焦點； $O(0, 0)$  為中心點； $X(0, -t)$  為應壓力方向與長軸的交點位置； $p$  為  $\overline{OX}$  距離大小； $q$  為  $\overline{XF_2}$  距離大小。

(2) 求  $\theta$  與  $p$  值、 $q$  值的關係：

$\because$  直線 AB 與  $x$  軸交與  $B(m, 0)$  點；與  $y$  軸交於  $A(0, -n)$  點。

$\therefore$  AB 直線方程式為： $y = \frac{n}{m}x - n$ ，

且  $\tan \theta = \frac{m}{n}$ ，即  $y = \cot \theta x - n$

又直線 AB 與橢圓  $\frac{y^2}{2.86^2} + \frac{x^2}{2.16^2} = 1$  相切

$\therefore$  將直線 AB 帶入橢圓方程式中，得方程式

即： $(4.67 \cot^2 \theta + 8.18)x^2 - (9.34n \cot \theta)x + (n^2 - 38.20) = 0$

又判別式為 0，即  $(9.34n \cot \theta)^2 - 4(4.67 \cot^2 \theta + 8.18)(n^2 - 38.20) = 0$

求得  $n = \left( \frac{178.40 \cot^2 \theta + 312.48}{87.24 \cot^2 \theta + 8.18} \right)^2$ ，代回原方程式，

得  $X = \frac{9.34n \cot \theta}{9.34 \cot^2 \theta + 16.36}$

將  $x$  代回橢圓  $\frac{y^2}{2.86^2} + \frac{x^2}{2.16^2} = 1$ ，求得  $y = \frac{38.20 - 8.18x^2}{4.67}$

即座標 T 點的座標為  $\left( \frac{9.34n \cot\theta}{9.34 \cot^2\theta+16.36}, \frac{38.20-8.18x^2}{4.67} \right)$ 。

$$\overline{AT} = \sqrt{\left(\frac{9.34n \cot\theta}{9.34 \cot^2\theta+16.36}\right)^2 + \left(\frac{38.20-8.18x^2}{4.67} + n\right)^2}$$

在  $\triangle ATX$  中， $\overline{AX} = \overline{AT} \frac{1}{\cos\theta}$

$\therefore p = |n - \overline{AX}|, q = |c - p|$

當  $q$  值越接近 0 時，表示應壓力的方向越接近焦點  $F_1$  或  $F_2$ 。

## 2. 不同角度( $\theta$ )與對應之 $q$ 值的關係：如表 4

表 4 是依照圖 24 的上述計算過程，利用 Excel 來推算，推算如下：先將角度換算成弧度，再轉成  $\cot$  值，帶入換算求出  $n$  值，利用  $n$  求出 T 座標的(x, y)值，利用畢氏定理在求出  $\overline{AT}$ ，然後和  $\cos\theta$  換算出  $\overline{AX}$ ，求出  $p$  值後，再利用  $c$  求出  $q$  值。

表 4 不同角度( $\theta$ )與對應之  $q$  值關係圖

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	角度	弧度	餘切值(cot)	n值	X值	Y值	AT	cos	AX	P	c	q
3	16.5	0.287979327	3.375943423	5.475422314	1.405831493	4.718063666	10.28997175	0.958819735	10.73191485	5.256492535	1.88	3.376492535
4	18	0.314159265	3.077683537	5.756774393	1.578576009	3.815040657	9.701110533	0.951056516	10.20035126	4.443576865	1.88	2.563576865
5	21.5	0.375245789	2.538647896	6.571105486	2.035265116	0.924186839	7.766705294	0.930417568	8.347547984	1.776442498	1.88	0.103557502
6	24	0.41887902	2.246036774	7.315325498	2.417568539	-2.05763082	5.786880941	0.913545458	6.334529817	0.980795681	1.88	0.899204319
7	27	0.471238898	1.962610506	8.434047625	2.954030519	-7.10516141	3.239171942	0.891006524	3.635407659	4.798639967	1.88	2.918639967
8	28	0.488692191	1.880726465	8.872148416	3.155021902	-9.25590043	3.178274503	0.882947593	3.599618515	5.272529902	1.88	3.392529902
9	31	0.541052068	1.664279482	10.4251326	3.837353641	-17.6130224	8.148069892	0.857167301	9.505810459	0.919322137	1.88	0.960677863
10	34	0.593411946	1.482560969	12.41995614	4.662085968	-29.8913646	18.08273099	0.829037573	21.81171468	9.391758538	1.88	7.511758538
11	36.5	0.637045177	1.351422438	14.52000918	5.484334292	44.5047981	30.48221594	0.803856861	37.91995495	23.39994577	1.88	21.51994577
12	39	0.680678408	1.234897157	17.13317229	6.457258857	-64.8554283	48.15713769	0.777145961	61.96665759	44.8334853	1.88	42.9534853
13	41	0.715584993	1.150368407	19.68869568	7.365722352	-86.8515251	67.56552017	0.75470958	89.52519213	69.83649644	1.88	67.95649644
14	43.5	0.759218225	1.053780125	23.62081717	8.696938675	-124.3059	101.0599951	0.725374371	139.3211549	115.7003377	1.88	113.8203377
15	46	0.802851456	0.965688775	28.60215689	10.29028581	-177.297656	149.0511368	0.69465837	214.5675388	185.9653819	1.88	184.0853819
16	43.5	0.759218225	1.053780125	23.62081717	8.696938675	-124.3059	101.0599951	0.725374371	139.3211549	115.7003377	1.88	113.8203377
17	50	0.872664626	0.839099631	39.61400962	13.53592847	-312.751761	273.4729462	0.64278761	425.4483785	385.8343688	1.88	383.9543688

3. 將表 3 的雞蛋應壓力和表 4 之  $q$  值進行比較，如圖 25。  
 (註：其中  $q$  值是應壓力的方向和雞蛋的焦點距離之絕對值)。

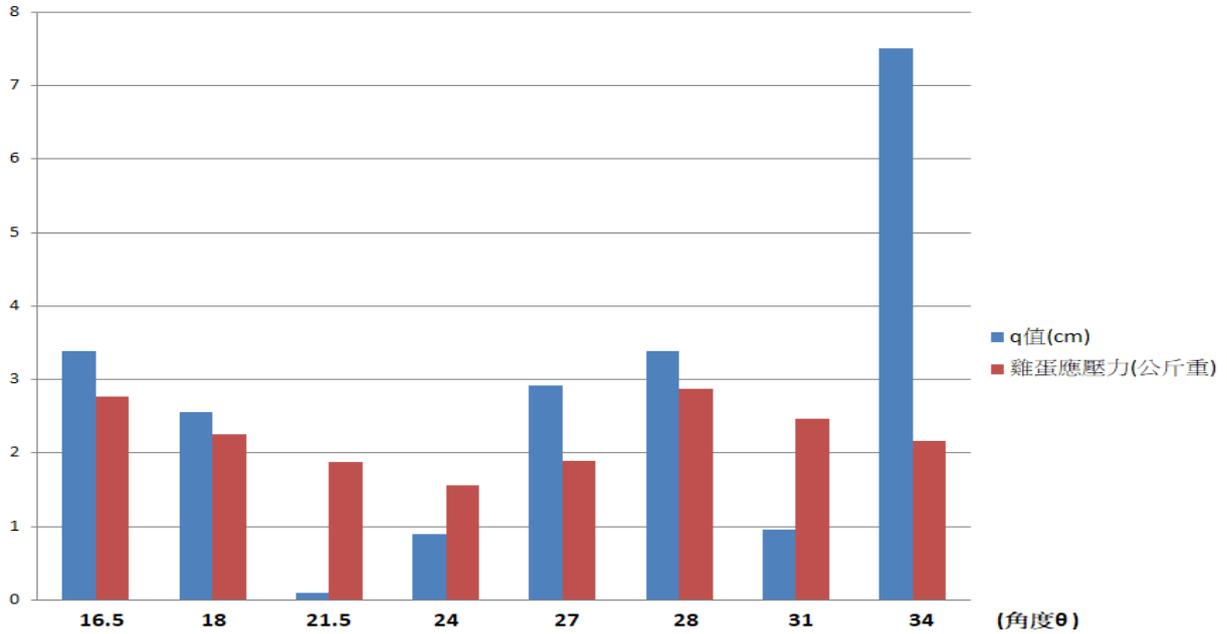


圖 25 雞蛋應壓力和表 4 之  $q$  值比較圖

4. 由圖 25 之  $q$  值與雞蛋應壓力的關係圖表中可發現，在  $\theta$  角介於 16.5 度~34 度之間時 (即雞蛋支撐架張角介於 114 度~44 度之間)，當  $q$  值變小，即表示應壓力方向越接近焦點，其相對可以承受的雞蛋應壓力也會變小，如圖 26 的黑色標線所示。

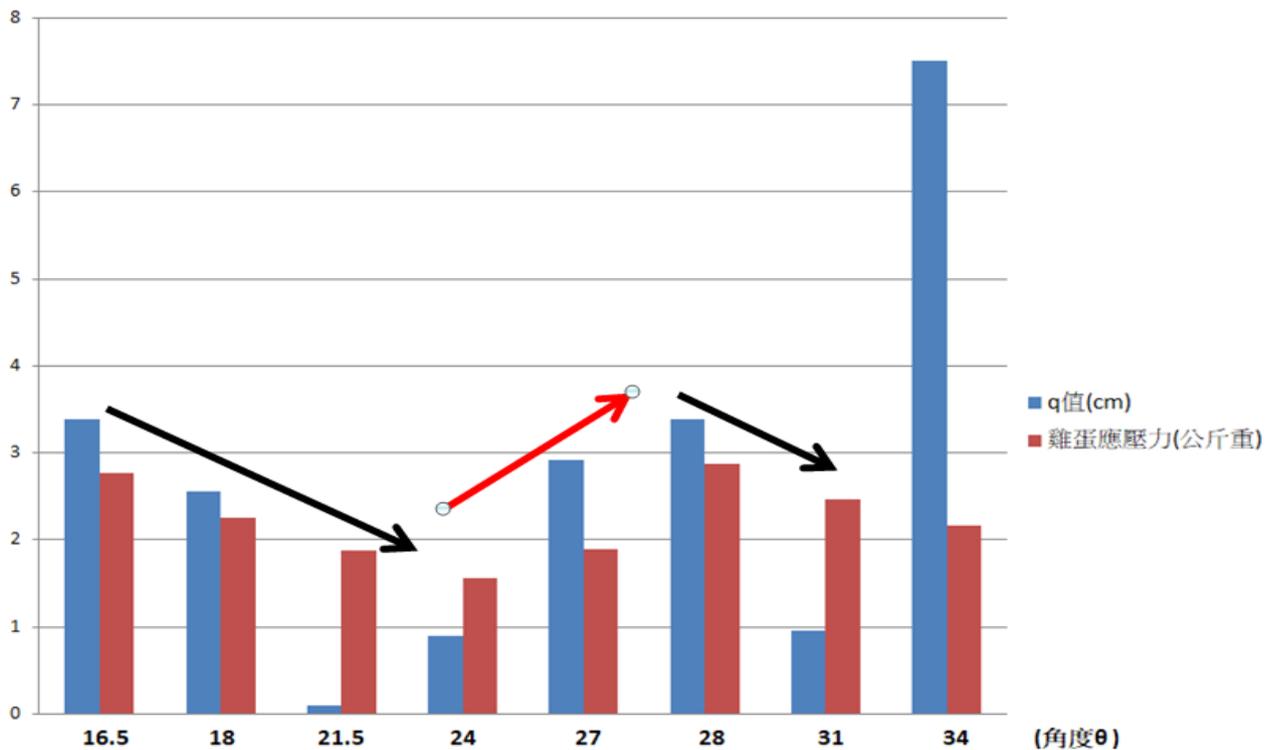


圖 26 雞蛋應壓力和表 4 之  $q$  值比較趨勢圖

5. 但在  $q$  值變大時，雞蛋的應壓力也隨之變大，如上圖 26 之紅色標線所示。
6. 而在  $q$  值的的峰點(角度 28 度時)，雞蛋的應壓力也達到最大值。因為  $q$  值的谷點代表雞蛋應壓力的方向指向焦點(焦點有 2 個)，所以  $q$  值的峰點，即代表雞蛋應壓力的方向指向中心點。
7. 由以上數據綜合推導可知，當雞蛋盒與雞蛋接觸，其接觸點的應壓力方向指向雞蛋中心點時，雞蛋可以承受的應壓力大小，可以達到最大值。

## 陸、結論

- 一、由實驗數據證實，當雞蛋和與雞蛋盒接觸時，接觸點的壓力方向趨向於雞蛋的橢圓形中心點時，雞蛋的抗壓力可以達到最大值。也就是說，蛋盒的保護力可以達到最大。
- 二、由圖 27 統計圖可看出，當傾斜面大於 34 度時，即難以比較，因此我們僅擷取前半段的傾斜面小於 34 度時數值來進行比較。
- 三、當雞蛋盒的傾斜面接近於 28 度(仰角 62 度)時，對雞蛋的保護力會最大。
- 四、當傾斜角小於 16.5 度時，本實驗並沒有做。因為接觸面已經快接近鉛直面了，基本上近乎雞蛋盒的鉛直面，主要目的是固定雞蛋用的，避免雞蛋晃動。

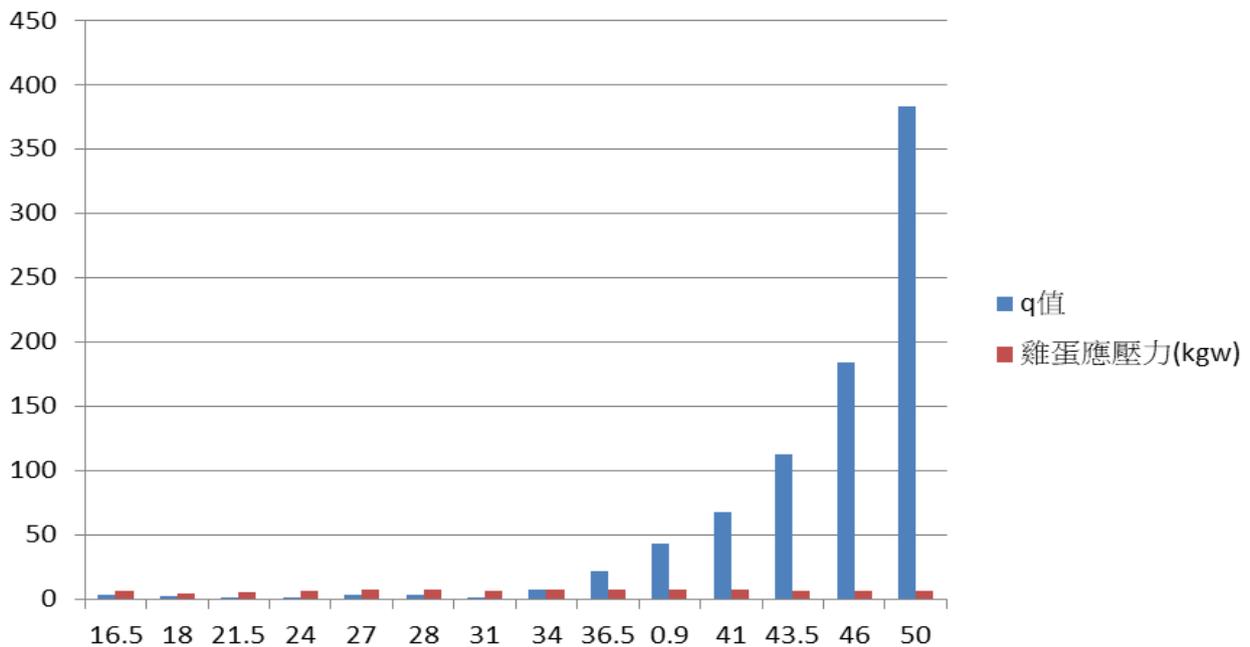


圖 27 雞蛋應壓力和表 4 之 q 值比較圖(判斷可選擇比較區間)

- 五、以上結論為排除或不考慮其他因素(例如：雞蛋盒的材質、雞蛋盒的厚薄、雞蛋生產的日期、雞蛋的品種、...等)所下的結論。

## ◎未來展望

本研究上有若干實驗缺失，期望未來能突破與改進。

- 一、本實驗的變因眾多，所以我們只針對支撐架上的張角和鐵條數目來做為實驗的操作變因進行探討。
- 二、本實驗的控制變因為：
  - (一)購買相同品牌的雞蛋。
  - (二)只取蛋高 5.70~5.75cm、蛋寬 4.30~4.35cm 的雞蛋來做實驗。
  - (三)最後將雞蛋的“鈍端”朝下放置於支撐架上方。
- 三、因為雞蛋每顆與生俱來便不同所以實驗還是會有些許的誤差，所以我們取平均值來計算與驗證。

## 柒、參考資料

- 1.維基百科，槓桿原理，取自：<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9D%A0%E6%9D%86>
- 2.橢圓的定義與解題，取自：<https://www.youtube.com/watch?v=Uajyg7APQ24>，Youtube 影片
- 3.游標尺的使用，取自：<https://www.youtube.com/watch?v=JOC7g6bEqy0>，Youtube 影片