屏東縣第 62 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：「交換糖果」之延伸與研究

關 鍵 詞：交換 、平分 、操作次數

編號：B1001

摘要

暑假在科教館網站上搜尋我們的研究題目時，看到了科學研習月刊第 59 卷第 1 期中森棚教官的數學專欄「交換糖果」這個遊戲。我們覺得有趣且有挑戰性，便開始了我們的研究。我們一開始就先朝著如何成功交換糖果的方向去研究，接著就研究糖果交換操作次數的規律。後來我們又想研究改變交換規則後，是否也能成功交換糖果？經過不斷地嘗試和討論，也讓我們成功找到了規律。在研究的過程中，我們時常遇到無法成功交換糖果的例子，於是就反過來研究無法成功交換的規律。完成了這幾個研究結果之後，讓我們信心大增，就突發奇想，想要研究如何交換能讓糖果平分或無法平分？最後發現必須要改變交換規則才能讓糖果平分。

壹、前言

編按：……的潛力，……
些小問題都有發展成國小或國中科展的潛力，
有發現與探索數學的經驗，一窺數學的美妙。

交換糖果

文/游森棚

小怡有兩堆糖果放在左右兩盤,，左盤有四個,，右盤有五個。每一次她都從偶數堆的糖果拿一半放到奇數堆去.，然後反覆動作。她發現經過三次動作後可以變成左邊五個，右邊四個，如下：

(4, 5) ! (2, 7) ! (1, 8) ! (5, 4)

但是她也發現如果左盤兩個右盤五個，再怎麼換也不會變成左五右二。

(2, 5) ! (1, 6) ! (4, 3) ! (2, 5) ! ......

1. 如果一開始左盤15個，右盤16個，有沒有可能變成左盤16個，右盤15個？
2. 一開始左盤a個，右盤b個，什麼樣的(a, b)可以經由若干次操作後變成(b, a)？

游森棚
國立臺灣師範大學數學系教授

一、研究動機

暑假在科教館網站上搜尋我們的研究題目時，看到了科學研習月刊第 59 卷第 1 期中森棚教官的數學專欄「交換糖果」這個遊戲。遊戲規則是將兩堆糖果放在左右兩盤，一堆偶數個，另一堆奇數個，每一次都從偶數堆的糖果拿一半放到奇數堆去，然後反覆動作，試看看是否能把兩堆糖果成功交換。我們覺得有趣且有挑戰性，便開始了我們的研究。

二、目的

(一)研究在何種情況下操作一定能達成糖果交換。

(二)研究能達成糖果交換操作次數的規律。

(三)研究改變交換規則後，在何種情況下操作一定能達成糖果交換。

(四)研究在何種情況下操作一定不能達成糖果交換。

(五)研究在何種情況下操作一定能達成糖果平分。

(六)研究改變交換規則後，在何種情況下操作一定能達成糖果平分。

(七)研究在何種情況下操作一定不能達成糖果平分。

三、文獻回顧

我們上網搜尋資料做文獻探討時，找到了二篇和我們研究目的有相關的報告：

(一)金門縣第 61 屆中小學科學展覽會＜交糖瑪奇朵＞。

該作品也是針對交換規則來做研究，其中只有提到數對中兩數總和與2^k+1 的關係，而我們的交換規則聚焦在同一個數對中兩數之間的關係去作完整的探討，例如：(2n，2n±1)。另外，我們有發現許多代入後能夠成功交換或無法成功交換的一般式，還自行編寫電腦程式來輔助尋找交換的例子，最後研究出更多的結果。

(二)中華民國第 58 屆中小學科學展覽會＜公平分配遊戲＞。

該作品是針對平分來做研究，交換規則並無奇數和偶數之分，而是以大數和小數來分，以小數作為交換數來交換，也就是(a，b) →(a－b，2b)，再以此規則繼續交換，例如：(11，5) →(6，10) →(12，4) →(8，8)，明顯與我們研究的交換規則不同。

貳、研究設備及器材

一、紙、筆、電腦。以下是我們使用 python 編寫程式來輔助研究的程式碼：

```python
from ast import Not
global i ,a
def mult(n1,n2):
    if n1%2==0:
        n1=n1/2
        n2=n2+n1
        print(n1,n2)
    else:
        n2=n2/2
        n1=n1+n2
        print(n1,n2)
    while not(i==n1 and a==n2 or a==n1 and i==n2):
        # print(i,a)
        if n1%2==0:
            n1=n1/2
            n2=n2+n1
            print(n1,n2)
        else:
            n2=n2/2
            n1=n1+n2
            print(n1,n2)
i=input("第一個數?")
i=int(i)
a=input("第二個數?")
a=int(a)
mult(i,a)
```

參、研究過程或方法

一、研究在何種情況下操作一定能達成糖果交換。

(一)我們從森棚教官「交換糖果」的問題中發現，可以達成糖果交換的情況(a，b)，當交換到最後時 a(偶數)所剩下的糖果數會為 1，b(奇數)糖果數會變為 a+b-1(偶數)，再將 a+b-1(偶數) 交換之後變為$\frac{a+b-1}{2}$(偶數)，另一數變為$\frac{a+b+1}{2}$(奇數)，因為兩數原先相差 1(b=a+1)，最後兩數會剛好相反，就能成功交換。我們得到：

當兩堆糖果之數為任意奇數大於偶數且差為 1 時，就能成功交換。

例 1：(2，3) →(1，4)→(3，2)

例 2：(4，5)→(2，7)→(1，8)→(5，4)

例 3：(6，7)→(3，10)→(8，5)→(4，9)→(2，11)→(1，12)→(7，6)

例 4：(8，9)→(4，13)→(2，15)→(1，16)→(9，8)

例 5：(16，17)→(8，25)→(4，29)→(2，31)→(1，32)→(17，16)

但是後來我們發現了一些例外，有些數對雖然符合上述條件卻無法成功交換，第一個發現的例外是(10，11) ，第二個是(24，25)，我們對於這些例外發現了一些相同的規律，偶數方只要不是 2 的次方，便有機會使一開始的奇數方變為 2 的次方，這個時候便無法成功交換了，因為再繼續交換下去將使一開始的奇數方變為 1，最後就會回到原來的數對。換句話說：

只要偶數方最後變成 1 就能成功交換，奇數方最後變成 1 那就無法成功交換。

例外 1：(10，11)→(5，16)→(13，8)→(17，4)→(19，2)→(20，1)→(10，11)

例外 2：(24，25)→(12，37)→(6，43)→(3，46)→(26，23)→(13，36)→(31，18) →(40，9)→(20，29) →(10，39) →(5，44) →(27，22) →(38，11) →(19，30) →(34，15) →(17，32) →(33，16) →(41，8) →(45，4) →(47，2) →(48，1) →(24，25)

(二)接著，我們依照上述的結論繼續探討，只要偶數方最後變成 1 就能成功交換，那麼我們直接從偶數變成 1 的次數開始研究，最後我們發現：

【性質 1】： 1 能跟任意2^n(n ∈N)交換，若不是2^n的話可能會無法交換。

【證明】：

(1， 2^n)→(1+ 2^{n-1}， 2^{n-1})→(1+ 2^{n-1}+ 2^{n-2}， 2^{n-2}) →……→

(1+ 2^{n-1}+ 2^{n-2}+……+ 2^0， 2^0) ＝ (2^n，1)

例 1：(1，2)→(2，1)

例 2：(1，4)→(3，2)→(4，1)

例 3：(1，8)→(5，4)→(7，2)→(8，1)

例 4：(1，16)→(9，8)→(13，4)→(15，2)→(16，1)

例 5：(1，32)→(17，16)→(25，8)→(29，4)→(31，2)→(32，1)

例外 1：(1，6)→(4，3)→(2，5)→(1，6)

例外 2：(1，14)→(8，7)→(4，11)→(2，13)→(1，14)

後來我們思考了一下，若條件只是要偶數為2^n，那是否代表任意奇數都可以與2^n交換呢？先把 2 放入數對，(3，2)、(7，2)、(9，2)、 ……等可以成功交換，接著(5，4)、(7，4) 、(9，4)、 ……等也能成功交換，最後將 8、16、32、……等偶數逐個嘗試後，我們發現：

【性質 2】：奇數 $3 \times 2^n + 1$能與 2^n交換(奇數＞2^n)。

【證明】：

假設可以成功交換的數對一般式為($2^n + 2k + 1$，2^n) ($n \in N$， $k \in N$、0)，

($2^n + 2k + 1$，2^n)→($2^n + 2^{n-1} \cdots\cdots + 2^0 + 2k + 1$ ，1)＝($2^{n+1} + 2k$，1)→

($2^n + k$，$2^n + k + 1$) →(2^n，$2^n + 2k + 1$) ，∴$k=2^n$ ，∴($2^n + 2k + 1$，2^n)＝

($3 \times 2^n + 1$，2^n)。

例 1：(7，2)→(8，1)→(4，5)→(2，7)

例 2：(13，4)→(15，2)→(16，1)→(8，9)→(4，13)

例 3：(25，8)→(29，4)→(31，2)→(32，1)→(16，17)→(8，25)

例 4：(49，16)→(57，8)→(61，4)→(63，2)→(64，1)→(32，33)→(16，49)

(三)綜合研究目的一的探討，我們可以得到下列結論：

1.當任意奇數大於偶數且差為 1，只要偶數方最後變成 1 就能成 功交換，奇數方最後變成 1 那就無法成功交換。

2.【性質 1】： 1 能跟任意2^n($n \in N$)交換，若不是2^n的話可能會無法交換。

3.【性質 2】：奇數 $3 \times 2^n + 1$能與 2^n交換(奇數＞2^n)。

二、研究能達成糖果交換操作次數的規律。

(一)我們在尋找研究目的一的例子時，發現有些例子的偶數方是奇數方的倍數，而這些倍數剛好是 2 的次方，例如：(3，6)。當同一個奇數配上不同 2 的次方偶數倍數時，糖果交換的操作次數似乎有某種規律：當 k 為奇數，(k，$k \times 2^1$)可以成功交換且要 1 次操作次數；(k，$k \times 2^2$)可以成功交換且要 2 次操作次數；(k，$k \times 2^3$)可以成功交換且要 3 次操作次數；……；以此類推。這是因為每次交換時，偶數倍數都會減少一次 2 的次方，因此只要將偶數倍數的 2 的次方減少到 0，就能成功交換。故我們得到：

【性質 3】：當 k 為奇數，$n \in N$ ，(k，$k \times 2^n$)可以成功交換且要 n 次操作次數。

【證明】：

(k，$k \times 2^n$)→($k + k \times 2^{n-1}$，$k \times 2^{n-1}$)→($k + k \times 2^{n-1} + k \times 2^{n-2}$，$k \times 2^{n-2}$) →……→

($k + k \times 2^{n-1} + k \times 2^{n-2} + \cdots\cdots + k \times 2^0$，$k \times 2^0$) ＝ ($k \times 2^n$，k)

例 1：(3，6)→(6，3) ……1 次

例 2：(3，12)→(9，6)→(12，3) ……2 次

例 3：(3，24)→(15，12)→(21，6)→(24，3) ……3 次

例 4：(3，48)→(27，24)→(39，12)→(45，6)→(48，3) ……4 次

(二)另外，我們還發現了研究目的一(2n，2n+1)(n ∈ N) 成功交換的操作次數規律：

若 m、n ∈ N，使得 4n+1 可整除 2^m+1，m 就是(2n，2n+1) 可成功交換時的操作次數。

例 1： n=1 代入 4n+1 得到 5，5=2^2+1 ，∴ m=2。

(2，3) →(1，4) →(3，2)……2 次

例 2： n=2 代入 4n+1 得到 9，9=2^3+1，∴ m=3。

(4，5) →(2，7) →(1，8) →(5，4) ……3 次

例 3： n=3 代入 4n+1 得到 13，13×5=65=2^6+1，∴ m=6。

(6，7) →(3，10) →(8，5) →(4，9) →(2，11) →(1，12) →(7，6) ……6 次

例 4： n=4 代入 4n+1 得到 17，17=2^4+1，∴ m=4。

(8，9) →(4，13) →(2，15) →(1，16) →(9，8) ……4 次

(三)綜合研究目的二的探討，我們可以得到下列結論：

1.【性質 3】：當 k 為奇數，n ∈ N ，(k，k×2^n)可以成功交換且要 n 次操作次數。

2.若 m、n ∈ N，使得 4n+1 可整除 2^m+1，m 就是(2n，2n+1) 可成功交換時的操作次數。

三、研究改變交換規則後，在何種情況下操作一定能達成糖果交換。

(一)上述的交換規則都是以分 $\frac{1}{2}$ 份給對方為條件的情況下做出來的結果，但若我們把交換規則改成分 $\frac{1}{3}$ 份給對方呢？也就是說交換規則變更為一數為 3 的倍數，另一數不為 3 的倍數，而交換後有一數為 3 的倍數，另一數則必不可為 3 的倍數，最後交換後一樣要與原來的數對剛好相反。首先，我們嘗試以 3 的倍數代入數對，發現(2n，3n)可以成功交換，且可以 1 次操作次數完成。一般式如下：

(2n，3n) →(3n，2n) (n ∈ N，$\frac{n}{3}$ ∉N)

例 1：(2，3)→(3，2)

例 2：(4，6)→(6，4)

例 3：(8，12)→(12，8)

接著，以 6 的倍數代入數對發現(6n，7n)也能成功交換，且可以 2 次操作次數完成。我們在(6n，7n)的交換操作中發現到(4n，9n)也可以成功交換，交換操作都會不斷循環，成功交換後繼續交換也會重複同樣的次數，而且操作過程中永遠只有一個數為 3 的倍數。一般式如下：

(6n，7n)→(4n，9n)→(7n，6n) →(9n，4n) →(6n，7n) ($n \in N$，$\frac{n}{3} \notin N$)

例 1：(6，7)→(4，9)→(7，6) →(9，4)→(6，7)

例 2：(12，14)→(8，18)→(14，12) →(18，8)→(12，14)

例 3：(24，28)→(16，36)→(28，24) →(36，16)→(24，28)

(二)再來，我們把交換規則改成分 $\frac{1}{4}$ 份給對方，一數為 4 的倍數，另一數不為 4 的倍數，我們發現(3n，4n)能成功交換，且可以 1 次操作次數完成。一般式如下：

(3n，4n) →(4n，3n) ($n \in N$，$\frac{n}{4} \notin N$)

例 1：(3，4)→(4，3)

例 2：(6，8)→(8，6)

例 3：(9，12)→(12，9)

另外，我們參考分 $\frac{1}{3}$ 份給對方的交換規則，發現到(12n，13n)和(9n，16n) 也可以成功交換，交換操作都會不斷循環，成功交換後繼續交換也會重複同樣的次數，而且操作過程中永遠只有一個數為 4 的倍數。一般式如下：

(12n，13n)→(9n，16n)→(13n，12n) →(16n，9n) →(12n，13n) ($n \in N$，$\frac{n}{4} \notin N$)

例 1：(12，13)→(9，16)→(13，12) →(16，9)→(12，13)

例 2：(24，26)→(18，32)→(26，24) →(32，18)→(24，26)

例 3：(36，39)→(27，48)→(39，36) →(48，27)→(36，39)

(三)最後，我們把交換規則改成分 $\frac{1}{5}$ 份給對方，一數為 5 的倍數，另一數不為 5 的倍數，我們發現(4n，5n)能成功交換，且可以 1 次操作次數完成。一般式如下：

(4n，5n) →(5n，4n) ($n \in N$，$\frac{n}{5} \notin N$)

例 1：(4，5)→(5，4)

例 2：(8，10)→(10，8)

例 3：(12，15)→(15，12)

另外，我們參考分 $\frac{1}{3}$ 份給對方的交換規則，發現到(20n，21n)和(16n，25n) 也可以成功交換，交換操作都會不斷循環，成功交換後繼續交換也會重複同樣的次數，而且操作過程中永遠只有一個數為 5 的倍數。一般式如下：

(20n，21n)→(16n，25n)→(21n，20n) →(25n，16n) →(20n，21n) ($n\in N$，$\frac{n}{5}\notin N$)

例 1：(20，21)→(16，25)→(21，20) →(25，16)→(20，21)

例 2：(40，42)→(32，50)→(42，40) →(50，32)→(40，42)

例 3：(60，63)→(48，75)→(63，60) →(75，48)→(60，63)

(四)綜合研究目的三的探討，我們可以得到下列結論：

1.【性質 4】：只要把交換規則改成分 $\frac{1}{k}$ 份給對方，$\forall$ n、k $\in$ N，$\frac{n}{k}\notin N$，((k-1) n， kn)就能成功交換，且可以 1 次操作次數完成。

2.【性質 5】：只要把交換規則改成分 $\frac{1}{k}$ 份給對方，$\forall$n、k$\in$N，$\frac{n}{k}\notin N$，((k-1) kn，((k-1) k+1) n) 和 ((k-1)^{2}n，k^{2}n) (n、k$\in$N，$\frac{n}{k}\notin N$)都能成功交換，且可以 2 次操作次數完成。

【證明】：

1.((k-1) n，kn) →(kn，(k-1)n)

2.((k-1) kn，((k-1) k+1) n) →((k-1)^{2}n，k^{2}n)→(((k-1) k+1) n，(k-1) kn) →(k^{2}n，(k-1)^{2}n)

四、研究在何種情況下操作一定不能達成糖果交換。

(一)反過來想，在何種情況下操作一定不能達成糖果交換的呢？我們想到研究目的一的結論：當任意奇數大於偶數且差為 1，只要偶數方最後變成 1 就能成功交換，奇數方最後變成 1 那就無法成功交換。我們先假設原來數對為 (2n+1， 2n) ($n\in N$)，並將 n 分為奇數和偶數來討論。

1.當 n 為偶數，奇數方和偶數方的交換操作過程如下：

(2n+1， 2n)→(3n+1， n)→($\frac{7n}{2}+1$，$\frac{n}{2}$)→($\frac{15n}{4}+1$，$\frac{n}{4}$)→($\frac{31n}{8}+1$，$\frac{n}{8}$)→

$(\frac{63n}{16}+1，\frac{n}{16})$……

我們發現把任意偶數 n 代入後都不能將奇數方變成 1，但是卻能將偶數方變成 1 那就能成功交換。

例 1：要將 $\frac{n}{2}$ 變成 1，得到 n＝2，原來的數對為(5，4)。

(5，4)→(7，2)→(8，1)→(4，5)

例 2：要將 $\frac{n}{4}$ 變成 1，得到 n＝4，原來的數對為(9，8)。

(9，8)→(13，4)→(15，2)→(16，1)→(8，9)

例 3：要將 $\frac{n}{8}$ 變成 1，得到 n＝8，原來的數對為(17，16)。

(17，16)→(25，8)→(29，4)→(31，2)→(32，1)→(16，17)

例 4：要將 $\frac{n}{16}$ 變成 1，得到 n＝16，原來的數對為(33，32)。

(33，32)→(49，16)→(57，8)→(61，4)→(63，2)→(64，1)→(32，33)

接著，我們又發現，代入後能成功交換的 n 剛好符合下列遞迴式：

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} \end{cases}$(n≧2)

後來，我們又推導出一般式：

$a_n = 2^n$ (n ∈ N)

【證明】：

1.當 n＝1 時，$a_1 = 2^1 = 2$，成立。

2.(1)設 n=k 時，成立，$\therefore a_k = 2^k$。

(2)當 n＝k+1 時，$a_{k+1} = 2a_k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$，成立。

根據數學歸納法，∀ n ∈ N，$a_n = 2^n$。

由上述推論我們可以得知：

【性質 6】：∀ n ∈ N，$(2^{n+1}+1，2^{n+1})$ 能成功交換。

【證明】：

$(2^{n+1}+1，2^{n+1}) \to (3 \times 2^n + 1，2^n)$，由性質 2 得知能成功交換。

2.當 n 為奇數，奇數方和偶數方的交換操作過程如下：

(2n+1， 2n)→(3n+1， n)→$(\frac{3n+1}{2}，\frac{5n+1}{2})$→$(\frac{3n+1}{4}，\frac{13n+3}{4})$→$(\frac{3n+1}{8}，\frac{29n+7}{8})$→

$(\frac{3n+1}{16}$，$\frac{61n+15}{16})$……

我們發現，把任意奇數 n(n≠1)代入後都不能將偶數方變成 1，但是卻能將奇數方變成 1，那就無法成功交換。其中有一個例外，當 n＝1 代入時，會將偶數方變成 1，那就能成功交換。另外，要將 $\frac{3n+1}{2}$ 、$\frac{3n+1}{8}$、$\frac{3n+1}{32}$、……變成 1，得到的 n 為分數，與假設不合。

例外 1：要將 $\frac{3n+1}{4}$ 變成 1，得到 n＝1，原來的數對為(3，2)。

(3，2)→(4，1)→(2，3)

例 1：要將 $\frac{3n+1}{16}$ 變成 1，得到 n＝5，原來的數對為(11，10)。

(11，10)→(16，5)→(8，13)→(4，17)→(2，19)→(1，20)→(11，10)

例 2：要將 $\frac{3n+1}{64}$ 變成 1，得到 n＝21，原來的數對為(43，42)。

(43，42)→(64，21)→(32，53)→(16，69)→(8，77)→(4，81)→(2，83)→(1，84)→(43，42)

例 3：要將 $\frac{3n+1}{256}$ 變成 1，得到 n＝85，原來的數對為(171，170)。

(171，170)→(256，85)→(128，213)→(64，277)→(32，309)→(16，325)→(8，333)→(4，337) →(2，339)→(1，340)→(171，170)

接著，我們又發現，代入後無法成功交換的 n 剛好符合下列遞迴式：

$$\begin{cases} \mathbf{a_1 = 5} \\ \mathbf{a_n = 4a_{n-1} + 1} \end{cases} (n \geqq 2)$$

後來，我們又推導出一般式：

$$a_n = \frac{4^{n+1}-1}{3}\ (n \in N)$$

【證明】：

1.當 n＝1 時，$a_1 = \frac{4^{1+1}-1}{3} = 5$，成立。

2.(1)設 n=k 時，成立，$\therefore a_k = \frac{4^{k+1}-1}{3}$。

(2)當 n＝k+1 時，$a_{k+1} = 4a_k + 1 = 4\left(\frac{4^{k+1}-1}{3}\right) + 1 = \left(\frac{4^{k+2}-4}{3}\right) + 1 = \frac{4^{k+2}-1}{3} = \frac{4^{(k+1)+1}-1}{3}$，成立。

根據數學歸納法，$\forall\, n \in N$，$a_n = \frac{4^{n+1}-1}{3}$。

由上述推論我們可以得知：

【性質 7】：$\forall n \in N$，$(2\times\frac{4^{n+1}-1}{3}+1，2\times\frac{4^{n+1}-1}{3})$ 無法成功交換。

【證明】：

$(2\times\frac{4^{n+1}-1}{3}+1，2\times\frac{4^{n+1}-1}{3})\rightarrow(3\times\frac{4^{n+1}-1}{3}+1，\frac{4^{n+1}-1}{3})\rightarrow(2\times 4^{n}，\frac{4^{n+1}}{2}+\frac{4^{n+1}-1}{3})\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow(2^{0}，\frac{4^{n+1}}{2}+\frac{4^{n+1}}{4}+\frac{4^{n+1}}{8}+\cdots+2^{0}+\frac{4^{n+1}-1}{3})=(1，4\times\frac{4^{n+1}-1}{3})\rightarrow(2\times\frac{4^{n+1}-1}{3}+1，2\times\frac{4^{n+1}-1}{3})$

(二)接著，我們想到當任意奇數大於偶數且差為 1 時，有可能會成功交換，換個方向思考，若是偶數大於奇數且差為 1 時，是否就無法成功交換？我們假設原來數對為(2n－1， 2n)(n ∈ N)，並將 n 分為奇數和偶數來討論。

1.當 n 為偶數，奇數方和偶數方的交換操作過程如下：

$(2n-1，2n)\rightarrow(3n-1，n)\rightarrow(\frac{7n}{2}-1，\frac{n}{2})\rightarrow(\frac{15n}{4}-1，\frac{n}{4})\rightarrow(\frac{31n}{8}-1，\frac{n}{8})\rightarrow(\frac{63n}{16}-1，\frac{n}{16})\cdots\cdots$

我們發現把任意偶數 n 代入後都不能將奇數方變成 1，但是卻能將偶數方變成 1 那就無法成功交換。

例 1：要將 $\frac{n}{2}$ 變成 1，得到 n＝2，原來的數對為(3，4)。

(3，4)→(5，2)→(6，1)→(3，4)

例 2：要將 $\frac{n}{4}$ 變成 1，得到 n＝4，原來的數對為(7，8)。

(7，8)→(11，4)→(13，2)→(14，1)→(7，8)

例 3：要將 $\frac{n}{8}$ 變成 1，得到 n＝8，原來的數對為(15，16)。

(15，16)→(23，8)→(27，4)→(29，2)→(30，1)→(15，16)

例 4：要將 $\frac{n}{16}$ 變成 1，得到 n＝16，原來的數對為(31，32)。

(31，32)→(47，16)→(55，8)→(59，4)→(61，2)→(62，1)→(31，32)

接著，我們又發現，代入後無法成功交換的 n 剛好符合下列遞迴式：

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} \end{cases} (n\geq 2)$$

後來，我們又推導出一般式：

$a_n = 2^n$ (n ∈ N)

【證明】：

1.當 n＝1 時，a_1＝ 2^1＝2，成立。

2.(1)設 n=k 時，成立，$\therefore a_k = 2^k$。

(2)當 n＝k+1 時，a_{k+1}＝ $2a_k = 2 \times 2^k$＝2^{k+1} ，成立。

根據數學歸納法，∀n∈N，$a_n = 2^n$。

由上述推論我們可以得知：

【性質 8】：∀n∈N，($2^{n+1}-1$，2^{n+1}) 無法成功交換。

【證明】：

($2^{n+1}-1$，2^{n+1})→($2^{n+1}+2^n-1$， 2^n)→($2^{n+1}+2^n+2^{n-1}-1$， 2^{n-1})

→……→($2^{n+1}+2^n+2^{n-1}+\cdots+2^0-1$， 2^0)＝ ($2^{n+2}-2$， 1)→

($2^{n+1}-1$，2^{n+1})

2.當 n 為奇數，奇數方和偶數方的交換操作過程如下：

(2n－1， 2n)→(3n－1， n)→($\frac{3n-1}{2}$， $\frac{5n-1}{2}$)→($\frac{3n-1}{4}$， $\frac{13n-3}{4}$)→($\frac{3n-1}{8}$， $\frac{29n-7}{8}$)→

($\frac{3n-1}{16}$， $\frac{61n-15}{16}$)……

我們發現，把任意奇數 n(n≠1)代入後都不能將偶數方變成 1，但是卻能將奇數方變成 1，那就能成功交換。其中有一個例外，當 n＝1 代入時，會將偶數方變成 1，因為 1 能跟任意2^n(n∈N)交換，所以也能成功交換。另外，要將 $\frac{3n-1}{4}$ 、$\frac{3n-1}{16}$、$\frac{3n-1}{64}$、……變成 1，得到的 n 為分數，與假設不合。

例 1：要將 $\frac{3n-1}{2}$ 變成 1，得到 n＝1，原來的數對為(1，2)。

(1，2)→(2，1)

例 2：要將 $\frac{3n-1}{8}$ 變成 1，得到 n＝3，原來的數對為(5，6)。

(5，6)→(8，3)→(4，7)→(2，9)→(1，10)→(6，5)

例 3：要將 $\frac{3n-1}{32}$ 變成 1，得到 n＝11，原來的數對為(21，22)。

(21，22)→(32，11)→(16，27)→(8，35)→(4，39)→(2，41)→(1，42)→

(22，21)

例 4：要將 $\frac{3n-1}{128}$ 變成 1，得到 n＝43，原來的數對為(85，86)。

(85，86)→(128，43)→(64，107)→(32，139)→(16，155)→(8，163)→

(4，167)→(2，169) →(1，170)→(86，85)

接著，我們又發現，代入後能成功交換的 n 剛好符合下列遞迴式：

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 4a_{n-1} - 1^{(n\geqq 2)} \end{cases}$$

後來，我們又推導出一般式：

$$a_n = \frac{2^{2n-1}+1}{3} \ (n \in N)$$

【證明】：

1.當 n＝1 時，$a_1 = \frac{2^{2-1}+1}{3} = 1$，成立。

2.(1)設 n=k 時，成立，$\therefore a_k = \frac{2^{2k-1}+1}{3}$。

(2)當 n＝k+1 時，$a_{k+1} = 4a_k - 1 = 4\left(\frac{2^{2k-1}+1}{3}\right) - 1 = \left(\frac{4^{2k+1}+4}{3}\right) - 1 = \frac{4^{2k+1}+1}{3}$

$= \frac{4^{2(k+1)-1}+1}{3}$，成立。

根據數學歸納法，$\forall n \in N$，$a_n = \frac{2^{2n-1}+1}{3}$。

由上述推論我們可以得知：

【性質 9】：$\forall n \in N$，$(2 \times \frac{2^{2n-1}+1}{3} - 1，2 \times \frac{2^{2n-1}+1}{3})$ 能成功交換。

【證明】：

$(2 \times \frac{2^{2n-1}+1}{3} - 1，2 \times \frac{2^{2n-1}+1}{3}) \to (3 \times \frac{2^{2n-1}+1}{3} - 1，\frac{2^{2n-1}+1}{3}) \to (2^{2n-2}，2^{2n-2} + \frac{2^{2n-1}+1}{3}) \to \cdots\cdots \to (2^0，2^{2n-2} + 2^{2n-3} + 2^{2n-4} + \cdots + 2^0 + \frac{2^{2n-1}+1}{3}) = (1，4 \times \frac{2^{2n-1}+1}{3} - 2) \to (2 \times \frac{2^{2n-1}+1}{3}，2 \times \frac{2^{2n-1}+1}{3} - 1)$

(三)再來，我們又從研究目的一的結論中，發現大部分奇數能與任意2^n交換(奇數＞2^n)，但是有少數例外。我們從推論中可以得知：

【性質 10】：若 $\frac{2^n+x+1}{2} = 2^k$ (k≧n)時，(x，2^n)無法成功交換。

【證明】：

假設這些數對為(x，2^n)(x 為奇數，n∈ N)，(x，2^n) → $(2^{n-1} + x，2^{n-1})$ →⋯⋯→

$(2^{n-1} + 2^{n-2} \ldots\ldots + 1 + x，1) = (2^n - 1 + x，1) \to (\frac{2^n+x-1}{2}，\frac{2^n+x+1}{2}) \to (\frac{2^{k+1}-1}{2}，2^k)$

→⋯⋯→(x，2^n)

例 1：設 n＝2、k＝2 代入$\frac{2^n+1+x}{2}=2^k$ (k≧n)，得 x＝3， 故數對為(3，4)。

(3，4)→(5，2)→(6，1)→(3，4)

例 2：設 n＝2、k＝3 代入$\frac{2^n+1+x}{2}=2^k$ (k≧n)，得 x＝11， 故數對為(11，4)。

(11，4)→(13，2)→(14，1)→(7，8) →(11，4)

例 3：設 n＝3、k＝3 代入$\frac{2^n+1+x}{2}=2^k$ (k≧n)，得 x＝7， 故數對為(7，8)。

(7，8)→(11，4)→(13，2)→(14，1) →(7，8)

例 4：設 n＝3、k＝4 代入$\frac{2^n+1+x}{2}=2^k$ (k≧n)，得 x＝23， 故數對為(23，8)。

(23，8)→(27，4)→(29，2)→(30，1) →(15，16) →(23，8)

(四)綜合研究目的四的探討，我們可以得到下列結論：

1.當任意奇數大於偶數且差為 1，只要奇數方最後變成 1 那就無 法成功交換，偶數方最後變成 1 就能成功交換。

2.【性質 6】：$\forall n \in N$，$(2^{n+1}+1，2^{n+1})$ 能成功交換。

3.【性質 7】：$\forall n \in N$，$(2\times\frac{4^{n+1}-1}{3}+1，2\times\frac{4^{n+1}-1}{3})$ 無法成功交換。

4.當任意偶數大於奇數且差為 1，只要偶數方最後變成 1 那就無法成功交換，奇數方最後變成 1 就能成功交換。

5.【性質 8】：$\forall n \in N$，$(2^{n+1}-1，2^{n+1})$ 無法成功交換。

6.【性質 9】：$\forall n \in N$，$(2\times\frac{2^{2n-1}+1}{3}-1，2\times\frac{2^{2n-1}+1}{3})$ 能成功交換。

7.【性質 10】：若$\frac{2^n+x+1}{2}=2^k$ (k≧n)時，$(x，2^n)$無法成功交換。

五、研究在何種情況下操作一定能達成糖果平分。

(一)在我們尋找前四個研究目的的例子時，意外發現了一些兩數剛好平分的情況，於是，在研究完前四個研究目的後，我們就嘗試研究在何種情況下操作一定能達成糖果平分？原來交換規則的條件是一邊為偶數，另一邊為奇數，但是偶數與奇數相加後為奇數，並無法平分成兩個正整數，再加上偶數才能交換到另一邊，因此必須修改交換規則使兩數都為偶數，才有可能達成兩數平分。後來我們發現，任意二偶數若是以分$\frac{1}{2}$份給對方的交換規則來交換，是無法成功平分的。既然在一般的情況下無法成功平分，那如果直接將二偶數和放在同一邊呢

？也就是只要其中一數是 0，就可與任意偶數平分，而平分後的數會等於偶數的一半。一般式如下：

$(0，2n) \to (n，n)\ (n \in N)$

例 1：(0，2)→(1，1)

例 2：(0，4)→(2，2)

例 3：(0，6)→(3，3)

(二)綜合研究目的五的探討，我們可以得到下列結論：

1.在分 $\frac{1}{2}$ 份給對方的交換規則下，只有 0 能跟任意偶數成功平分。

六、研究改變交換規則後，在何種情況下操作一定能達成糖果平分。

(一)首先，我們把交換規則改成分 $\frac{1}{3}$ 份給對方，也就是說交換規則變更為一數為 3 的倍數，另一數不為 3 的倍數，而交換後有一數為 3 的倍數，另一數則必不可為 3 的倍數，最後交換後看看是否能達成兩數平分？於是，我們嘗試以 3 的倍數代入數對，發現有幾組數對能達成兩數平分，而從一個數對成功平分的交換過程中，有可能延伸出更多能成功平分的數對。一般式如下：

1.$(n，3n) \to (2n，2n)\ (n \in N，\frac{n}{3} \notin N)$

2.$(3n，5n) \to (2n，6n) \to (4n，4n)\ (n \in N，\frac{n}{3} \notin N)$

3.$(7n，9n) \to (10n，6n) \to (12n，4n) \to (8n，8n)\ (n \in N，\frac{n}{3} \notin N)$

4.$(n，15n) \to (6n，10n) \to (4n，12n) \to (8n，8n)\ (n \in N，\frac{n}{3} \notin N)$

5.$(11n，21n) \to (18n，14n) \to (12n，20n) \to (8n，24n) \to (16n，16n)\ (n \in N，\frac{n}{3} \notin N)$

6.$(31n，33n) \to (42n，22n) \to (28n，36n) \to (40n，24n) \to (48n，16n) \to (32n，32n)$
$(n \in N，\frac{n}{3} \notin N)$

7.$(n，63n) \to (22n，42n) \to (36n，28n) \to (24n，40n) \to (16n，48n) \to (32n，32n)$
$(n \in N，\frac{n}{3} \notin N)$

例 1：(1，3)→(2，2)

例 2：(3，5)→(2，6)→(4，4)

例 3：(7，9)→(10，6)→(12，4)→(8，8)

例 4：(1，15)→(6，10)→(4，12)→(8，8)

例 5：(11，21)→(18，14)→(12，20)→(8，24)→(16，16)

例 6：(31，33)→(42，22)→(28，36)→(40，24)→(48，16)→(32，32)

例 7：(1，63)→(22，42)→(36，28)→(24，40)→(16，48)→(32，32)

(二)接著，我們把交換規則改成分 $\frac{1}{4}$ 份給對方，也就是說交換規則變更為一數為 4 的倍數，另一數不為 4 的倍數，而交換後有一數為 4 的倍數，另一數則必不可為 4 的倍數，最後交換後看看是否能達成兩數平分？於是，我們嘗試以 4 的倍數代入數對，發現有兩組數對能達成兩數平分。一般式如下：

1.(2n，4n)→(3n，3n) (n∈N，$\frac{n}{4}$ ∉N)

2.(2n，16n)→(6n，12n)→(9n，9n) (n∈N，$\frac{n}{4}$ ∉N)

例 1：(2，4)→(3，3)

例 2：(6，12)→ (9，9)

例 3：(10，20)→ (15，15)

例 4：(2，16)→ (6，12)→ (9，9)

(三)最後，我們把交換規則改成分 $\frac{1}{5}$ 份給對方，也就是說交換規則變更為一數為 5 的倍數，另一數不為 5 的倍數，而交換後有一數為 5 的倍數，另一數則必不可為 5 的倍數，最後交換後看看是否能達成兩數平分？於是，我們嘗試以 5 的倍數代入數對，發現有兩組數對能達成兩數平分。一般式如下：

1.(3n，5n)→(4n，4n) (n∈N，$\frac{n}{5}$ ∉N)

2.(7n，25n)→(12n，20n)→(16n，16n) (n∈N，$\frac{n}{5}$ ∉N)

例 1：(3，5)→(4，4)

例 2：(6，10)→ (8，8)

例 3：(9，15)→ (12，12)

例 4：(7，25)→ (12，20)→ (16，16)

(四)綜合研究目的六的探討，我們可以得到下列結論：

1.【性質 11】：只要把交換規則改成分 $\frac{1}{k}$ 份給對方，，$\forall$ n、k∈ N，$\frac{n}{k}\notin$N，

((k-2) n，kn)就能成功平分，且可以 1 次操作次數完成。

2.【性質 12】：只要把交換規則改成分 $\frac{1}{k}$ 份給對方，，$\forall$ n、k∈ N，$\frac{n}{k}\notin$N，

$(((k-2)^2-2)\,n，k^2n)$就能成功平分，且可以 2 次操作次數完成。

【證明】：

1.((k-2) n，kn)→((k-1) n，(k-1) n)

2.$(((k-2)^2-2)\,n，k^2n)\to((k^2-3k+2)\,n，(k^2-k)n)\to((k^2-2k+1)\,n，(k^2-2k+1)n)$

七、研究在何種情況下操作一定不能達成糖果平分。

(一)我們由研究目的五可以得知，原來交換規則的條件是一邊為偶數，另一邊為奇數，但是偶數與奇數相加後為奇數，並無法成功平分成兩個正整數。

(二)綜合研究目的七的探討，我們可以得到下列結論：

1.在分 $\frac{1}{2}$ 份給對方的交換規則下，任意偶數和奇數無法成功平分。

肆、研究結果

一、研究在何種情況下操作一定能達成糖果交換。

(一)【性質 1】：1 能跟任意2^n(n∈N)交換，若不是2^n的話可能會無法交換。

(二)【性質 2】：奇數 $3\times2^n+1$能與 2^n交換(奇數＞2^n)。

(三) 當任意奇數大於偶數且差為 1，只要偶數方最後變成 1 就能成功交換。

(四)【性質 6】：$\forall$ n∈ N，$(2^{n+1}+1，2^{n+1})$ 能成功交換。

(五) 當任意偶數大於奇數且差為 1，只要奇數方最後變成 1 就能成功交換。

(六)【性質 9】：$\forall$ n∈ N，$(2\times\frac{2^{2n-1}+1}{3}-1，2\times\frac{2^{2n-1}+1}{3})$ 能成功交換。

二、研究能達成糖果交換操作次數的規律。

(一)【性質 3】：當 k 為奇數，n∈N ，$(k，k\times2^n)$可以成功交換且要 n 次操作次數。

(二) 若 m、n∈ N，使得 4n+1 可整除 2^m+1，m 就是(2n，2n+1) 可成功交換時的操作次數。

三、研究改變交換規則後，在何種情況下操作一定能達成糖果交換。

(一)【性質 4】：只要把交換規則改成分 $\frac{1}{k}$ 份給對方，$\forall$ n、k$\in$ N，$\frac{n}{k}\notin$N，((k-1) n， kn)就能成功交換，且可以 1 次操作次數完成。

(二)【性質 5】：只要把交換規則改成分 $\frac{1}{k}$ 份給對方，$\forall$n、k$\in$ N，$\frac{n}{k}\notin$N，((k-1) kn，((k-1) k+1) n) 和 ((k-1)2n，k2n) (n、k$\in$ N，$\frac{n}{k}\notin$N)都能成功交換，且可以 2 次操作次數完成。

四、研究在何種情況下操作一定不能達成糖果交換。

(一)當任意奇數大於偶數且差為 1，只要奇數方最後變成 1 那就無 法成功交換。

(二)【性質 7】：$\forall$ n$\in$ N，$(2\times\frac{4^{n+1}-1}{3}+1，2\times\frac{4^{n+1}-1}{3})$ 無法成功交換。

(三)當任意偶數大於奇數且差為 1，只要偶數方最後變成 1 那就無法成功交換。

(四)【性質 8】：$\forall$ n$\in$ N，$(2^{n+1}-1，2^{n+1})$ 無法成功交換。

(五)【性質 10】：若 $\frac{2^{n}+x+1}{2}=2^{k}$ (k≧n)時，(x，2^{n})無法成功交換。

五、研究在何種情況下操作一定能達成糖果平分。

(一)在分 $\frac{1}{2}$ 份給對方的交換規則下，只有 0 能跟任意偶數成功平分。

六、研究改變交換規則後，在何種情況下操作一定能達成糖果平分。

(一)【性質 11】：只要把交換規則改成分 $\frac{1}{k}$ 份給對方，，$\forall$ n、k$\in$ N，$\frac{n}{k}\notin$N，((k-2) n，kn)就能成功平分，且可以 1 次操作次數完成。

(二)【性質 12】：只要把交換規則改成分 $\frac{1}{k}$ 份給對方，，$\forall$ n、k$\in$ N，$\frac{n}{k}\notin$N，$(((k-2)^{2}-2)$ n，k^{2}n)就能成功平分，且可以 2 次操作次數完成。

七、研究在何種情況下操作一定不能達成糖果平分。

(一)在分 $\frac{1}{2}$ 份給對方的交換規則下，任意偶數和奇數無法成功平分。

伍、討論

從研究目的二的探討中，我們可以從許多例子得到這個規律：若 m、n∈ N，使得 4n+1 可整除 2^m+1，m 就是(2n，2n+1) 可成功交換時的操作次數。我們曾嘗試以數學歸納法來證明，但是卻失敗了，這個規律的證明有待我們將來繼續研究。

陸、結論

對於「交換糖果」這個遊戲，我們一開始就先朝著如何成功交換糖果的方向去研究，接著就研究糖果交換操作次數的規律。後來我們又想研究改變交換規則後，是否也能成功交換糖果？經過不斷地嘗試和討論，也讓我們成功找到了規律。在研究的過程中，我們時常遇到無法成功交換糖果的例子，於是就反過來研究無法成功交換的規律。完成了這幾個研究結果之後，讓我們信心大增，就突發奇想，想要研究如何交換能讓糖果平分或無法平分？最後發現必須要改變交換規則才能讓糖果平分。藉由這次深入的探討，讓我們學到了許多做研究的方法和態度，雖然過程非常地費時和艱辛，但總算皇天不負苦心人，讓我們完成了這份科展報告。

柒、參考文獻資料

一、游森棚(2020)·森棚教官的數學題-交換糖果·科學研習雙月刊，59(1)。

二、呂宜靜、陳宥安、何堉銨(2021)·交糖瑪奇朵·金門縣第 61 屆中小學科學展覽會。

三、徐筠悉、林佳妤、卓品瑜、陳楷翔(2018)·公平分配遊戲·中華民國第 58 屆中小學科學展覽會。