屏東縣第 62 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：乾坤大挪移—排序位移規律性之研究

關 鍵 詞：排列、位移、規律性

編號：________

乾坤大挪移—排序位移規律性之研究

摘要

找尋發現生活中的規律是學習數學的樂趣。當在排隊或移動物品位置時，會想到有什麼較快的方法排出自己想要的順序或位置。本研究從不同花色（字母），從少到多增加相同數量的情況下，探討最後達到「倒換花色位置排列」、「花色順序重新循環排列」及「任意排列」等，從移位互換的過程中歸納其規律性，並將其結果思考以數學通式來表示。

壹、前言

一、研究動機

每到新學期安排座位，老師會讓我們在班級走廊先任意排成一列，然後才依身高讓我們交換次序，最後形成「由矮到高」的次序。過程中，同學們需要互相比較身高，往左或往右移動，才能完成「由矮排到高」的任務，我們移來移去花了不少時間。

「有沒有比較快的換位方法或較少的移動次數呢？」

這讓我們想到數學課的花片，不同顏色的花片，每種顏色花片數量相同，交換花片位置到完全倒序排列（ABCDE→EDCBA），一次只能交換一個花片，最少需要幾次步驟才能完成？

二、研究目的

（一）探討不同花色，且每種花色僅有 1 個的情形下，交換花色位置達完全倒序排列（以下簡稱「倒換花色位置」)，所需最少移動步驟數及其規則。

（二）探討不同花色，且每種花色重複數量相同的情形下，倒換花色位置所需最少移動步驟數及其規則。

（三）將各種數量相同的花色，依原花色順序重新循環排列所需最少移動步驟之規則。

（四）探討任意花色種類與數量，進行任意排列最少移動步驟之規則。

三、文獻回顧

中華民國第 51 屆中小學科學展覽會。國小組，數學科。向左走向右走 ～相鄰移位遊戲最佳策略探討之研究

探討每種花色數量相等，中間前後不留空格，花色種類 按 a、b、c……順序排列的情況下進行直線相鄰移位遊戲，研究了三種不同的最後排列順序，花色種類數與每種花色數量為任意數時，歸納最少移位次數(最佳解決策略)之規律，並得到通式。

貳、研究器材設備

紀錄表、筆

參、研究過程與結果

一、探討不同花色，且每種花色僅有 1 個的情形下，交換花色位置達倒換花色位置，所需最少移動步驟數及其規則。

我們用字母代表花色，不同字母代表不同的花色。例如：2 種花色分別以 A、B 表示、3 種花色則以 A、B、C 表示，以此類推。先探討在不同花色，各種花色都僅有 1 個時，交換花色位置到最後可以倒換排序的最少移動步驟數與規則。

【確立移動規則】

為了要讓交換花色的流程一致，才能不重複交換，達到「最少移動次數」，我們設定交換花色位置的規則如下：

（一）序號：由左至右設定花色序位號分別為：①,②,③,④,⑤,……，越往右側，序位號越大。

（二）方向：為達完全倒換位置、過程中不重複交換，取右側花色與相鄰的左側花色交換位置；從開始到完成，都只能左移，不回返右側。

（三）計次：當完成 1 次右側花色與相鄰左側花色交換，就是交換 1 次，計為步驟 1 步。

（四）交換步驟：

1. 從最右側開始，擇序位號最大的花色，向左依序交換，直至所擇花色達「最左側且佔據未曾交換過的花色序位號」即停止交換。
2. 再取最右側（序位號最大）的花色，向左依序交換，直至所擇花色達「最左側且佔據未曾交換過的花色序位號」即停止交換。
3. 重複步驟 2，直至花色排列達完全倒序位置，即終止交換，完成花色倒換位置。

將我們的交換花色規則，試用於 2 種花色與 3 種花色且每種花色僅有 1 個的情形下的完全倒序排列，完成的倒換花色位置情形記錄如下表 1：

表 1 交換 2 至 3 種花色達完全倒序排列步驟記錄表

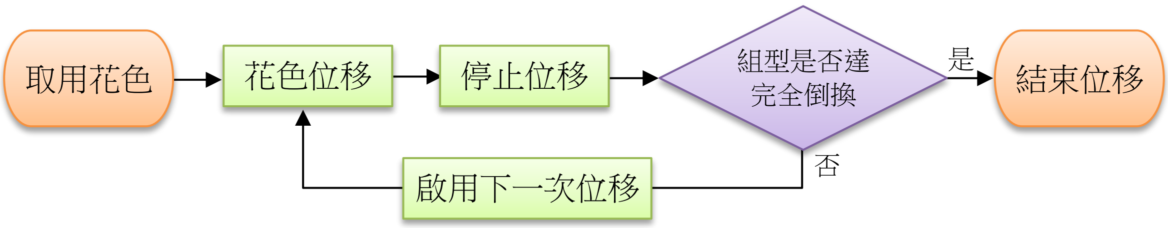
花色種類	原始組型	終點組型	擇定第 1 個移動的花色	第 1 次交換	第 2 次交換	擇定第 2 個移動的花色	第 3 次交換	步驟數
2	①② AB	BA	①② AB 擇最右、序位號最大花色 B	②① BA B 已達最左側且取代未曾交換過的① 達完成倒序排列 終止交換	–	–	–	1
3	①②③ ABC	CBA	①②③ ABC 擇最右、序位號最大花色 C	①③② ACB C 尚未達最左側、尚未取代未曾交換的①位	③①② CAB C 已達最左側且取代未曾交換過的①	③①② CAB 擇最右、序位號最大的 B	③②① CBA B 已達最左側且取代未曾交換過的②。 達完成倒序排列， 終止交換	3

綜上，為了使倒換花色位置的花色交換過程一致，以確保完成換位所需步驟為最小移動步驟數，我們設定倒換花色位置的方式如下：

1. <u>取用花色</u>：從最右側開始，擇序位號最大的花色。
2. <u>花色位移</u>：往左、依序與「相鄰」花色互換位置，每次交換 1 個花色。
3. <u>停止位移</u>：交換花色直至所擇花色達「最左側且佔據最末個未曾交換過的花色序位號」
4. <u>啟用下一次位移</u>：如尚未達全體倒換花色，則再取最右側（未換位過、序位號最大）

的花色進行位移，重複步驟 2～4，直至所有花色達完全倒序排列時的終點位置。

5. 結束位移（完成倒換花色位置）：整個花色組型序列達與初始完全倒序排列。



運用上述所設定的倒換花色位置規則，我們列出「2 至 5 種、n 種花色每色各 1 個」的組型，進行倒換花色位置，欲找出這些組型的倒換花色位置最少步驟數。花色位置倒換的移動過程與算式記錄如下表 2：

表 2 倒換 2 至 n 種花色排列組型之位置步驟記錄表

原始排列組型		①② AB	①②③ ABC	①②③④ ABCD	①②③④⑤ ABCDE	①②③④⑤⑥…… ABCDEF……
花色種類(種)		2	3	4	5	k
每種花色數量(個)		1	1	1	1	1
總個數(個)		2	3 × 1	4 × 1	5 × 1	k × 1
開始位置		AB	ABC	ABCD	ABCDE	ABCDEF……
移動過程紀錄	移動第 1 個花色	BA 停止 (結束)	ACB CAB 停止	ABDC ADBC DABC 停止	ABCED ABECD AEBCD EABCD 停止	ABCDEF……
	移動第 2 個花色		CBA 停止 (結束)	DACB DCAB 停止	EABDC EADBC EDABC 停止	……
	移動第 3 個花色			DCBA 停止 (結束)	EDACB EDCAB 停止	
	移動第 4 個花色				EDCBA 停止 (結束)	……FEDCBA (結束)
終點組型		②① BA	③②① CBA	④③②① DBCA	⑤④③②① EDCBA	…⑥⑤④③②① …FEDCBA
移動步驟數		1	2+1＝3	3+2+1＝6	4+3+2+1＝10	$(k-1)+\cdots+3+2+1$ $=\dfrac{k\times(k-1)}{2}$
過程發現		B 換位 1 次 A 換位 0 次 ①②→②①	C 換位 2 次 B 換位 1 次 A 換位 0 次 ①②③→③②①	D 換位 3 次 C 換位 2 次 B 換位 1 次 A 換位 0 次 ①②③④→④③②①	E 換位 4 次 D 換位 3 次 C 換位 2 次 B 換位 1 次 A 換位 0 次 ①②③④⑤→⑤④③②①	歸納推論： 第 k 個花色換位 $k-1$ 次 …… 第 2 個花色換位 1 次 第 1 個花色（序位最小）不動 ①②③④⑤⑥…→…⑥⑤④③②①

結果發現	1.序位號最小的，換位數=0（A 換位 0 次，不動） 2.結束交換時，終點組型的所有相鄰 2 花色，右側花色序位號必定小於左側花色序位號。 3.從序位號最大的開始交換，並且換位次數＝最大序位號－1＝總個數－1 4.若以n代表花色總數，則總換位次數＝最少步驟數=$\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+(k-1))=\frac{1}{2}k\times(k-1)$

【研究結果 1】

當花色種類不同，且每種花色都只有 1 個的情形下，擇最右側（序位號最大）的花色與相鄰的左側花色互換位置，此時，被選擇的花色需要跟它左側的其他每個花色依序交換，交換至最左側，如果遇到之前已經被選過用於換位的花色，就停止換位。因此，第 1 個換位花色所需的換位數必為「總個數－1」，而其次換位的花色所需換位數為「總個數－2」、再其次換位的花色所需換位數為「總個數－2」……，以此類推，最後一個花色，已無法遇到其他未曾選用於換位的花色，因此最後一個花色必無法換位，它的序位號一定最小，且換位數=0。

綜上，在多種花色、且每種花色都只有 1 個的情形下，每種組型的倒換花色位置所需步驟數是〔1+2+3+……+(總個數－1)〕=$\frac{1}{2}$總個數$\times$(總個數-1)，亦即當花色數量為 n，第 1 個移動的花色只需跟剩下的$n-1$種花色互換，後續每個花色的換位數量都會依次遞減，逐次少 1，所以，完成組型完全倒序排列的步驟數可以寫成$\frac{n\times(n-1)}{2}$。

當交換完成達組型完全倒序排列時，終點組型的序位號排列由左至右，必為最大序位號排到最最小序位號;如果中間有右側序位號大於左側序位號的情形，一定是還沒有換位完成，要繼續進行換位，直到終點組型的序位號是由左側起最大、逐序排到右側越來越小。

二、探討不同花色，且每種花色重複數量相同的情形下，倒換花色位置所需最少移動步驟數及其規則。

增加花色種類，且重複花色數量相同，最後要倒換花色位置排列的移動步數，皆從最右方的字母開始移動，因會與相同字母互換，為了辨別，以不同顏色代表。整理記錄列表如下:

表 3

原排列	AABBCC	AAABBBCCC	AAAABBBBCCCC	A.. AB.. BC..C
花色種類數 (k)	3	3	3	3
每種花色數量 (n)	2	3	4	n
總個數	6	9	12	3n

移動過程	AABBCC AABCBC AACBBC ACABBC CAABBC CAABCB CAACBB CACABB CCAABB CCAABB CCABAB CCBAAB CCBABA CCBBAA CCBBAA	AAABBBCCC AAABBBCCC AAABBCBCC AAABCBBCC AAACBBBCC AACABBBCC ACAABBBCC CAAABBBCC CCCBBBAAA	AAAABBBBCCCC AAAABBBBCCCC	A.. AB.. BC.. CC CC…BB…AA …
移步數	5 + 4 +3 +2+1 =15	8+7+6+5+4+3+2+1 = 36	11+10+9……+1=66	$1+2+3$ $+\cdots(3n-1)$ $=\frac{[(3n-1)+1](3n-1)}{2}$ $=\frac{3n\,(3n-1)}{2}$
重複數	1	2 +1	3 + 2 +1	$[1+2+3+\cdots$ $+(n-1)]$ $=\frac{n\times(n-1)}{2}$
扣重複 =重複數 x　k	1 x 3	3 x 3	6 x3	$\frac{3n\times(n-1)}{2}$

表 4

原排列	AABBCCDD	AAABBBCCCDDD	AAAABBBBCCCCDDDD	A.. AB.. BC..C
花色種類數(k)	4	4	4	4
每種花色數量(n)	2	3	4	n
總個數	8	12	16	4n

移動過程	AABBCCDD AABBCDCD AABBDCCD AABDBCCD AADBBCCD ADABBCCD DAABBCCD ↓ DDCCBBAA	AAABBBCCCDDD ↓ DDDAAABBBCCC ↓ DDDCCCBBBAAA	AAAABBBBCCCCDDDD ↓ DDDDCCCCBBBBAAAA	A.. AB.. BC.. CC ↓ DD…CC…BB…AA
移步數	7+6+5+4+3+2+1 =28	11+10+9……+1=48	15+14+13+………+1=120	$1+2+3+\cdots(4n-1)$ $=\frac{4n\times(4n-1)}{2}$
重複數	1	2+1	3+2+1	$[1+2+3+\cdots+(n-1)]$ $=\frac{n\times(n-1)}{2}$
扣重複 =重複數 x k	1 x 4	2 x 4	3 x4	$[1+2+3+\cdots+(n-1)]\times 4=$ $\frac{4n\times(n-1)}{2}$

表 5

原排列	AABBCCDDEE	AAABBBCCCDDDEEE	AAAABBBBCCCCDDDDEEEE	A..AB…BC...CD…DE…E
花色種類數(k)	5	5	5	5
每種花色數量(n)	2	3	4	n
總個數	10	15	20	n x 5

移動過程	AABBCCDDEE AABBCCDDEE AABBCCDEDE AABBCCEDDE AABBCECDDE AABBECCDDE AABEBCCDDE AAEBBCCDDE AEABBCCDDE EAABBCCDDE EEDDCCBBAA	AAABBBCCCDDDEEE EEEDDDCCCBBBAAA	AAAABBBBCCCCDDDDEEEE EEEEDDDDCCCCBBBBAAAA	A..AB…BC...CD…DE…EE E…ED…DC...CB…BA…A
移步數	9+8+7+……+1=45	14+13+12+4+…..+1=105	19+18+17+……+1=190	$1+2+3+\cdots(5n-1)$ $=\frac{[(5n-1)+1](5n-1)}{2}$ $=\frac{5n\times(5n-1)}{2}$
重複數	1	2+1	3+2+1	$\frac{n\times(n-1)}{2}$
扣重複=重複數 x k	1 x 5	3 x 5	6 x 5	$\frac{5n\times(n-1)}{2}$

【研究結果】

從上表整理來看，當花色種類增加，重複相同數量時，字母互換的最少移步數可以用最後一項加上 1 後乘上項數除以 2 來計算，如花色種類 5 種，每個字母重複相同數量 n 時，其算式可以寫成$\frac{[(5n-1)+1](5n-1)}{2}$，其中 5 是字母種類(k=5)，所以算式化簡後可以寫成

$$\frac{[(kn-1)+1](kn-1)}{2}$$
$$=\frac{kn\times(kn-1)}{2}$$

上述過程是將相同字母視為不同物去做排列(如 AAABBB，第 1 個 A 和第 2、3 個 A 不同)。當將字母視為相同物去排列時(如 AAABBB，第 1 個 A 和第 2、3 個 A 相同)，即要扣掉相同字母每次互換的重複步數。以花色種類 3 種(k=3)，重複數 n 為例：

$$\frac{3n(3n-1)}{2}-\frac{3n\times(n-1)}{2}=\frac{9^2-3n-3n^2+3n}{2}=\frac{6n^2}{2}=3n^2$$

$\frac{3n(3n-1)}{2}-\frac{3n\times(n-1)}{2}$又可以寫成$\frac{3^2n^2-3n-3n^2+3n}{2}=\frac{1}{2}n^2(3^2-3)$

K =4，重複數 n

$$\frac{4n(4n-1)}{2}-\frac{4n\times(n-1)}{2}=\frac{16^2-4n-4n^2+4n}{2}=\frac{12n^2}{2}=6n^2$$
$$=\frac{4^2n^2-4n-4n^2+4n}{2}=\frac{1}{2}n^2(4^2-4)$$

K =5，重複數 n

$$\frac{5n(5n-1)}{2}-\frac{5n\times(n-1)}{2}=\frac{25^2-5n-5n^2+5n}{2}=\frac{20n^2}{2}=10n^2$$
$$=\frac{5^2n^2-5n-5n^2+5n}{2}=\frac{1}{2}n^2(5^2-5)$$

整理上述算式，當花色種類不同，重複相同數量，扣除重複交換步數時，的最少移動步數的通式可以寫成：

$$\frac{1}{2}n^2\,(K^2-K)\ =\frac{1}{2}n^2\,(K-1)\times k$$

表 6 以 2 種花色每色各 2 至 5 個排列組型，倒換所需步驟記錄表

花色	AABB	AAABBB	AAAABBBB	AAAAABBBBB
花色種類	2	2	2	2
每種花色數量	2	3	4	5
位置編號	①②③④ A A B B	①②③④⑤⑥ A A A B B B	①②③④⑤⑥⑦⑧ A A A A B B B B	①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩ A A A A A B B B B B
倒換後組型	③④①② B B A A	④⑤⑥①②③ B B B A A A	⑤⑥⑦⑧①②③④ B B B B A A A A	⑥⑦⑧⑨⑩①②③④⑤ B B B B B A A A A A

過程步驟記錄	(1)ABAB (2)ABBA (3)BABA (4)BBAA	(1)AABABB (2)ABAABB (3)BAAABB (4)BAABAB (5)BABAAB (6)BBAAAB (7)BBAABA (8)BBABAA (9)BBBAAA	(1) AAABABBB (2) AABAABBB (3) ABAAABBB (4) BAAAABBB (5) BAAABABB (6) BAABAABB (7) BABAAABB (8) BBAAAABB (9) BBAAABAB (10) BBAABAAB (11) BBABAAAB (12) BBBAAAAB (13) BBBAAABA (14) BBBAABAA (15) BBBABAAA (16) BBBBAAAA	(1) AAAABABBBB (2) AAABAABBBB (3) AABAAABBBB (4) ABAAAABBBB (5) BAAAAABBBB (6) BAAAABABBB (7) BAAABAABBB (8) BAABAAABBB (9) BABAAAABBB (10) BBAAAAABBB (11) BBAAAABABB (12) BBAAABAABB (13) BBAABAAABB (14) BBABAAAABB (15) BBBAAAAABB (16) BBBAAAABAB (17) BBBAAABAAB (18) BBBAABAAAB (19) BBBABAAAAB (20) BBBBAAAAAB (21) BBBBAAAABA (22) BBBBAAABAA (23) BBBBAABAAA (24) BBBBABAAAA (25) BBBBBAAAAA
倒換完成所需最少移動步驟數	2 × 2 = 4	3 × 3 = 9	4 × 4 = 16	5 × 5 = 25

綜整表 1 組型與表 2 的倒換步驟結果如下表 3：

表 6 以 2 種花色每色各 2 至 5 個排列組型，倒換花色位置所需最少移動步驟數

花色種類	2	2	2	2	2
每種花色數量	1	2	3	4	5
原始組型	AB	AABB	AAABBB	AAAABBBB	AAAAABBBBB
倒換後組型	BA	BBAA	BBBAAA	BBBBAAAA	BBBBBAAAAA
倒換完成所需最少移動步驟數	1＝1x1	2 × 2 = 4	3 × 3 = 9	4 × 4 = 16	5 × 5 = 25

從表 6 的歸納結果，我們發現，在 2 種花色的情形下，倒換花色位置排列所需的最少移動步驟數，恰好是每種花色數量的自乘積；也就是：

當花色數量是 2 時，所需最少步驟是 2×2

當花色數量是 3 時，所需最少步驟是 3×3

當花色數量是 4 時，所需最少步驟是 4×4

當花色數量是 5 時，所需最少步驟是 5×5

……

因此可以推估，當花色數量是 n 時，所需最少步驟是 $n×n$，我們可以用 $\mathrm{n} \times \mathrm{n} = n^2$ 的數學一般式來表示。

【研究結果】

從表 6 的花色排列倒換過程中，我們發現在 2 種花色且每種花色數量相同情況下，倒換花色位置所需最少的移動步驟數，有下列的規則：

1. 交換花色位置達完全倒序排列，所需最少移動步驟數，就是 2 種花色的數量相乘（在本例中是指「A 的個數×B 的個數」)。
2. 承上，如果以 n 表示花色數量，倒換花色位置所需最少的移動步驟數可以用 $n \times n = n^2$ 的數學一般式來表示。

三、將各種數量相同的花色，依原花色順序重新循環排列所需最少移動步驟之規則。

表 7 原花色順序重新循環排列過程

字母	① AABB	② AAABBB	③ AAAABBBB	④ AABBCC	⑤ AABBCCDD
數量(n)	2	3	4	2	2
花色(k)	2	2	2	3	4
過程記錄	ABAB	AABABB ABAABB ABABAB	AAABABBB AABAABBB ABAAABBB ABAABABB ABABAABB ABABABAB	ABABCC ABACBC ABCABC	ABABCCDD ABACBCDD ABCABCDD ABCABDCD ABCADBCD **ABCDABCD**
最後排列	ABAB	ABABAB	ABABABAB	ABCABC	ABCDABCD
最少移動步數	1	3	6	3	6
第一次分解	1+0	3+0	6+0	1+2	1+2+3
第二次分解	1+0	2+1	3+2+1	(1+0)+(2+0)	(1+0)+(2+0)+(3+0)

花色數量增加，花色種類固定 2 種時，如上表①②③

移動目標：先形成第一組 AB

②AAABBB 的例子中，形成第 1 組 AB 需要 2 步，形成第 2 組 AB 需要 1 步，同時也形成了第 3 組 AB。所以步數是 **2+1(第二次分解)。**

③AAAABBBB 的例子中，形成第 1 組 AB 需要 3 步，形成第 2 組 AB 需要 2 步，形成第 3 組 AB 需要 1 步，同時也形成了 4 組 AB。所以步數是 3+**2+1(第二次分解)。**

當花色種類為 2，而且數量每增加 1，形成 AB 的步數就要再加(n-1)

而算式可以寫成(n-1)+(n-2)+(n-3)+……

字母數量是 2，互換成**重新循環排列的移動步數 可以寫 1+0**

字母數量是 3，互換成**重新循環排列的移動步數 可以寫 2+1**

字母數量是 4，互換成**重新循環排列的移動步數 可以寫 3+2+1**

字母數量是 5，互換成**重新循環排列的移動步數 可以寫 4+3+2+1**

字母數量是 6，互換成**重新循環排列的移動步數 可以寫 5+4+3+2+1**

字母數量為 n，互換成**重新循環排列的移動步數 可以寫**(n-1)+(n-2)+(n-3)+……

從以上發現最少互換步數的算式都是相差 1 的數列相加。這個與計算總和的公式$\frac{n\times(n+1)}{2}$(這裡的 n 代表數列的第一項)很像，但是第一項都會比<u>字母數量</u>少 1。所以，當字母數量增加，花色種類固定 2 種時，互換的步數可以寫成$\frac{(n-1)\times n}{2}$

花色數量固定 2 個，花色種類增加時，如上表①④⑤

移動字母順序：先 AB→ABC→ABCD→ABCDE

1 是第二種花色的移動步數(B)

2 是第三種花色的移動步數(C)

3 是第四種花色的移動步數(D)

4 是第五種花色的移動步數(E)

以此類推……

花色種類是 2，互換成**重新循環排列可以寫 0+1**

花色種類是 3，互換成**重新循環排列可以寫 1+2**

花色種類是 4，互換成**重新循環排列可以寫 1+2+3**

花色種類是 5，互換成**重新循環排列可以寫 1+2+3+4**

花色種類是 6，互換成**重新循環排列可以寫 1+2+3+4+5**

最少互換步數的算式也都是相差 1 的數列相加。

從以上發現最少互換步數的算式，與數量增加，花色種類固定 2 種時相同，都是相差 1 的數列相加。當字母數量固定 2 種時，花色種類增加，互換的步數可以寫成$\frac{(k-1)\times k}{2}$

因此，當花色數量、種類增加時，如果最後要依原花色順序重新循環排列所需最少移動步驟可以寫成

$$\frac{(n-1)\times n}{2}\times\frac{(k-1)\times k}{2}$$

四、探討在不限制花色種類和數量情況下，一次只能交換一個花色，任意排列的最少移動次數。

(一)討論在 K=3 和 n=1 的情況下(K=花色種類、n=花色數量)，以 ABC 為例，組合種類共有 6 種，探討從 ABC→任意排列的最少移動步數。先思考 ABC 三種花色，數量 1 的移位互換組合。

將每種字母按前後順序編上數字 123……。ABC 三種花色交換的過程整理如下表：

表 8

原排列	任意排		交換情形	序位差異	步驟數
ABC 123	ACB 132	Step1 C 往左，B”自然:”往右交換(1)	A C B 1 3 2	B＜C，交換	1
	BAC 213	Step1 B 往左，A”自然:”往右交換(1)	B A C 2 1 3	A＜B，交換	1
	BCA 231	Step1 → BAC B 往左，A”自然:”往右交換(1) Step2 → BCA C 往左，A”自然:”往右交換(2)	B C A 2 3 1	A＜C ，交換 A＜B ，交換	2
	CAB 312	Step1 → ACB C 往左，B”自然:”往右交換(1) Step2 → CAB C 往左，A”自然:”往右交換(2)	C A B 3 1 2	A＜C B 經過 A 才小於 C ，交換	2
	CBA 312	Step1 → ACB C 往左，B”自然:”往右交換(1) Step2 → CAB C 往左，A”自然:”往右交換(2) Step3 → CBA B 往左，A”自然:”往右交換(3) B 本來可以不用動的，可是前面的移位造成 B 自然往左”必須”移回來 所以 B 往左移回去，交換(3)	C B A 3 2 1	B＜C 交換 A＜B 交換 A 經過 B 才小於 C ，交換	3

我們從 ABC 的 6 種換位情形發現，花色交換(swap)有 2 種情況:

①因為右方花色往左(前)移動，造成其它花色”自然”被往右擠。

②本來不用動(或是交換途中被移到)，而要移回花色的”必須”交換。為了更清楚顯示，改以花色序位說明(見交換情形欄)，我們發現發生交換都在左右序位號小於左方時，「相鄰」或「間隔其它花色」。既然如此，無論”自然”或”必須”的交換，均以序位號小於左方認定，且無論「相鄰」或「間隔其它花色」，均予以計入。

(二)序位比較

討論任意排是否有通式。我們假設序位會影響移動步數，最右邊序位為最大、最左邊序位為最小，以 ABCD 為例，D 最大、A 最小，所以，要計算最少移動步數，需要從最大的序位開始累計，累計數值為該花色右邊比它序位小的花色數量，且每一個序位都需要確認。

討論 1:

字母	A	B	C	D
序位	1	2	3	4
大小	最小			最大

例 1：ABCD→DACB 圖示

字母	A	B	C	D
序位	1	2	3	4

最後排列	D	A	C	B	最少移動步數
序位	4	1	3	2	
序位比較數	3	0	1	0	4

一共有 ABCD 4 種花色，數量各為 1，假設最後排列為 DACB，最少移動步數為 4，說明如下。

D 往右邊計數有 3 個字母，且字母序位都比它小，計為 3 步；A 因為序位最小，為 0 步；C 往右邊計數有 1 個字母(B)，字母序位比它小，計為 1 步；B 的右邊沒有字母，無法比較，為 0 步，所以最少移動步數為 3+1=4。

討論 2:

ABCD→DCBA 圖示

字母	A	B	C	D
序位	1	2	3	4

最後排列	D	C	B	A	最少移動步數
最後序位	4	3	2	1	
序位比較數	3	2	1	0	6

一共有 ABCD 4 種花色，數量各為 1，假設最後排列為 **DCBA**，最少移動步數為 6，說明如下。

D 往右邊計數有 3 個字母，且字母序位都比它小，計為 3 步；C 往右邊計數有 2 個字母(B、A)，且字母序位都比它小，計為 2 步；B 往右邊計數有 1 個字母(A)，且字母序位都比它小，計為 1 步；A 因為序位最小，為 0 步，所以最少移動步數為 3+2+1=6。

討論 3：**AABCCCDD→DACBCDAC**

起始字母排列	A	A	B	C	C	C	D	D
序位	1	1	2	3	3	3	4	4

最後排列	D	A	C	B	C	D	A	C	最少移動步數
序位	4	1	3	2	3	4	1	3	
序位比較數	6	0	2	1	1	2	0	0	12

一共有 ABCD 4 種花色，起始排列為 AABCCCDD、最後移動為 **DACBCDAC**，最少移動步數為 12，說明如下。(為了利於辨識，我們將字母編號為 **$D^1A^1C^1B^1C^2D^2A^2C^3$)**

D^1 往右邊計數有 6 個字母序位都比它小，計為 6 步；**D^2** 往右邊計數有 2 個字母序位比它小，計為 2 步；**A^1、A^2** 因為序位最小，為 0 步；**C^1** 往右邊計數有 2 個字母序位都比它小，計為 2

步、**C^2** 往右邊計數有 1 個字母序位比它小、**C^3** 在最右邊，它的右方無任何字母，無法比較，計為 0 步；**B^1** 往右邊計數有 1 個字母序位都比它小，計為 1 步，所以最少移動步數為 **8+3+1=12**

討論 4：

起始字母排列 AAABCDDDDD，最後要排成 ABDDADADDC。按照各字母序位比較與計算的最少步數，如下表格：

起始字母排列	A	A	A	B	C	D	D	D	D	D
序位	1	1	2	3	3	4	4	4	4	4

最後排列	A	B	D	D	A	D	A	D	D	C	最少移動步數
最後序位	1	2	4	4	1	4	1	4	4	3	
序位比較數	0	2	3	3	0	2	0	1	1	0	12

A 是最小，它的序位比較數 0，後面的 A 的序位比較數都是 0。B 在排列中第 2 小，它的序位比

較數為 2。D 在排列序位是最大，它的序位比較數為 3，後面接著出現的 D 序位比較數分別為 3、

2、1、1。最後的字母 C 因為右方已無字母，所以序位比較數是 0。將序位比較數加起來，

總和

12，就是它的最少移動的步數。

討論 5:

起始字母排列 BDCA，最後要排成 ABCD。按照各字母序位比較與計算的最少步數，如下表格:

起始字母排列	B	D	C	A	最少移動步數
序位	1	2	3	4	
最後排列	A	B	C	D	
最後序位	4	1	3	2	
序位比較數	3	0	1	0	4

花色	B D C A
過程記錄	BDAC BADC ABDC ABCD
最後排列	ABCD
最少移動步數	4

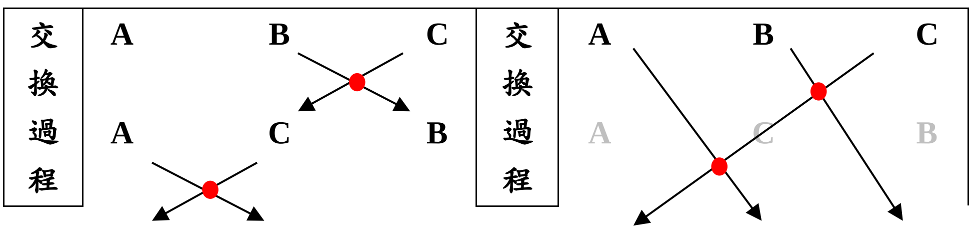
結果:

序位比較法是：將每個字母與右方的字母序位比較大小，找出序位比較數，最後將每個字母的『序位比較數加總』就是最少移位步數。

(三)連線交點法

從表 o 中，我們發現其步數改變具有規律，但無法形成一般式，於是，我們改變方式，從花色種類為 3(k=3)，花色數量為 1(n=1)開始，用圖示表示花色交換過程的移動軌跡。

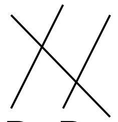
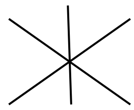
圖 o-1 為分解軌跡，當同字母連成一條線，兩條線形成一個交點時，有 2 個交點，和最少移動步數是一樣的，因此我們推測用連線方式找交點，等同於找到最少移動步數；也可以用圖 2 的方式算交點，圖 2 是將圖 1 簡化，圖 2 總共有兩個交點，所以最少移動步數為 2。



	C　　　A　　　B		C　　　A　　　B
<圖 o-1> **最後排列為 CAB 之交換過程(分解版)**		<圖 o-2> **最後排列為 CAB 之交換過程(簡化版)**	

但如果 n ≠1 時，用字母與最後排列的連線交點數代表最少移位步數，發現相同字母連線，可能會有相交於一點的情況，就不會是字母互換的最少移位步數，如下：

討論 1：當有字母相同時(K=2)

互換過程	**ABB BAB BBA**	**A　B　B**  **B　B　A**	**A　B　B**  **B　B　A**
說明	**2 步**	**2 交點，2 步 (正確連法)**	**1 交點，3 步 (不正確連法 ，違反規則 2)**

當花色(字母)數量增加時，需注意：

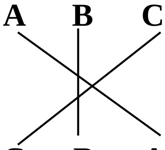
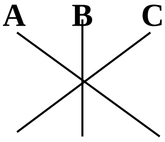
1.由右向左或由左向右

2.同字母的連線不能相交

3.連「最近」且「相同」的字母(不違反 2.)

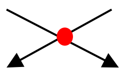
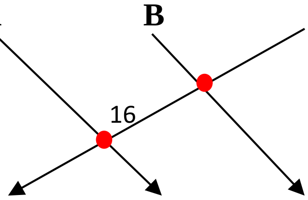
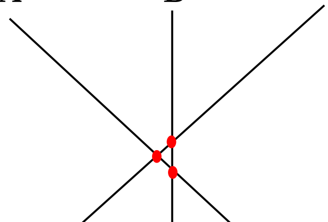
4.一個字母只限連一次

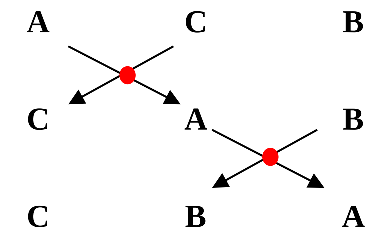
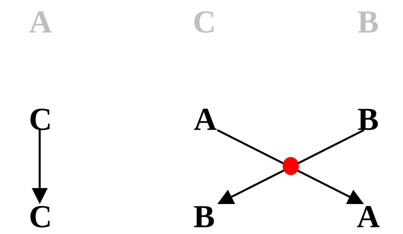
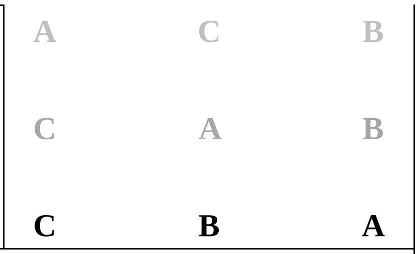
討論 2:當字母都不同時(K=3,N=1)

ABC BAC BCA CBA	**A　B　C**  **C　B　A**	**A　B　C**  **C　B　A**
3 步	**3 線交 3 點**	3 條線交於 1 點 2 條線 1 個交點，所以要算 3 交點

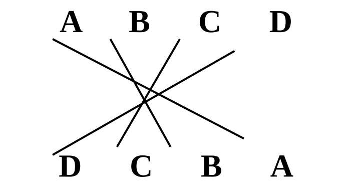
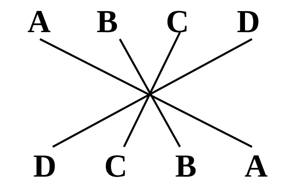
看似 3 線焦於 1 點，就連線原則來說，AA 和 BB 的連線形成一個交點，AA 和 CC 的連線成一個交點，BB 和 CC 的連線形成一個交點，所以，一共是 3 個交點。

表 o 最後排列為 CBA 之交換過程

交換	**A　　B　　C** 	**交換**	**A　　B　　C** 		**A　　B　　C** 

<table>
<tr><td>過程</td><td>
</td><td>過程</td><td>
</td><td>交換過程</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2"><圖 1>
最後排列為 CBA 之交換過程(分解版)</td><td colspan="2"><圖 2>
最後排列為 CBA 之交換過程(簡化 1 版)</td><td colspan="2"><圖 3>
最後排列為 CBA 之交換過程(簡化 2 版)</td></tr>
</table>

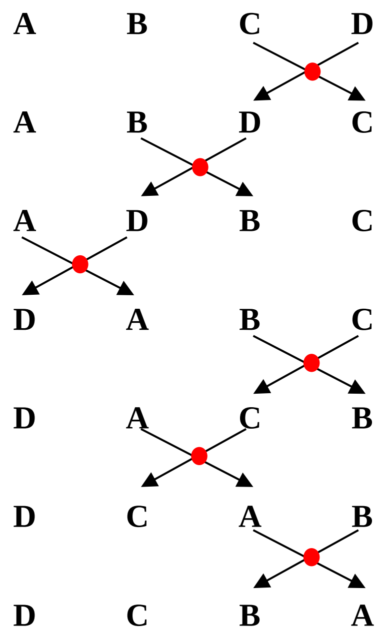
討論 3:當字母都不同時(K=4,N=1)

<table>
<tr><td>ABDC
ADBC
DABC
DACB
DCAB
DCBA</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6 步</td><td>4 線交 6 點</td><td>4 條線交於 1 點
2 條線 1 個交點,
所以要算 6 交點</td></tr>
</table>

看似 4 線焦於 1 點，就連線原則來說，AA 和 BB 的連線形成一個交點，AA 和 CC 的連線形成一個交點，AA 和 DD 的連線形成一個交點，BB 和 CC 的連線形成一個交點，BB 和 DD 的連線形成一個交點，CC 和 DD 的連線形成一個交點，所以，一共是 6 個交點。

表 0 最後排列為 DCBA 之交換過程

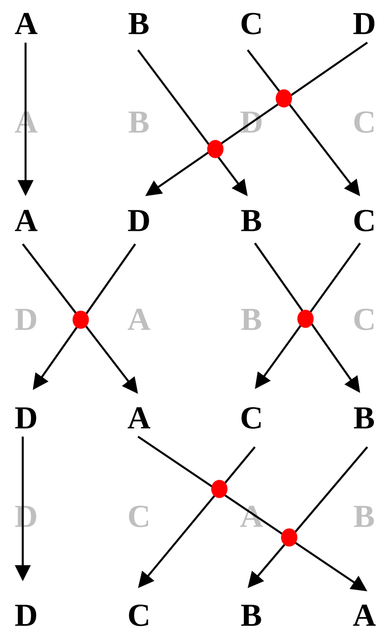
交換過程



<圖 1>

最後排列為 DCBA 之交換過程(分解版 1)

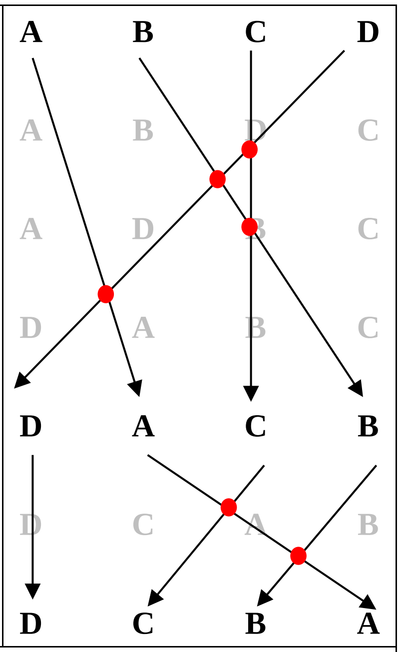
交換過程



<圖 2>

最後排列為 DCBA 之交換過程(分解版 2)

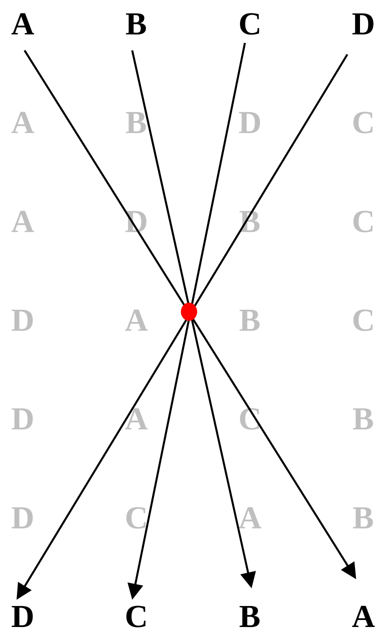
交換過程



<圖 3>

最後排列為 DCBA 之交換過程(分解版 3)

交換過程



<圖 4>

最後排列為 DCBA 之交換過程(分解版 4)

討論 4: 當字母都不同時且起始字母任意排列(K=4,N=1)，例如：起始字母排列 BDCA，最後要排成 ABCD，按照各字母序位比較與計算的最少步數，如下表格:

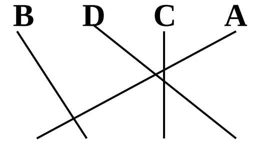
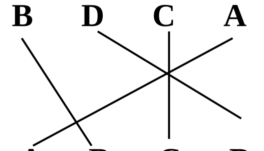
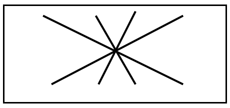
BDCA **BADC** **ABDC** **ABCD**	**B D C A**  **A B C D**	**B D C A**  **A B C D**
4 步	**4 線交 4 點**	**4 條線交 2 點，其中 3 條線交於 1 點，2 條線一個交點，所以要算 4 交點。**

表 o 起始花色為 BDCA 最後排列 ABCD 之移動過程記錄

花色	B D C A
過程記錄	BDAC BADC ABDC ABCD
最後排列	ABCD
最少移動步數	4

結果：

連線交點法是「將起始排列和最後排列的同字母連線，若 n>1(例：ABBC)，則相同字母連線不可相交，計算有幾個交點時，要留意『二條線一個交點』，如下圖，雖然看似只有一個交點，但其實有 6 個交點。



(四)交換次數法

討論例 1: aabccc → cccbaa

移動字母	a a b
字母交換次數	$\overbrace{(1+3)}^{a} + \overbrace{(1+3)}^{a} + \overset{b}{3} = (2+1)\times 3 + 2\times 1 = 11$

$(\underset{b}{1} + \underset{c}{3}) + (\underset{b}{1} + \underset{c}{3}) + 3 = (\underset{a}{2} + \underset{b}{1}) \times \underset{c}{3} + \underset{a}{2} \times \underset{b}{1} = 11$

討論例 2：

aabcccdd

↓

ddcccbaa

移動字母

$$\overbrace{(1+3+2)}^{a}+\overbrace{(1+3+2)}^{a}+\overbrace{(3+2)}^{b}+\overset{c}{2}+\overset{c}{2}+\overset{c}{2}=(\underset{a}{2}+\underset{b}{1}+\underset{c}{3})\times\overset{d}{2}+(\underset{a}{2}+\underset{b}{1})\times\overset{c}{3}+\underset{a}{2}\times\overset{b}{1}$$

字母交換次數

討論例 3：

ddbbbacc

↓

abbbccdd

移動字母

$$\overbrace{(\underset{c}{2}+\underset{b}{3}+\underset{a}{1})\times 2}^{d}+\overbrace{\underset{b}{3}\times\underset{a}{1}}^{a}=15$$

字母交換次數

討論例 4：如果最後是成任意排列的最少移動步數？

ddbbbacc

↓

bbbccdda

移動字母
字母交換次數

$$\overbrace{\underset{b}{3}\times\underset{d}{2}}^{b}+\overbrace{(\underset{a}{1}+\underset{d}{2})\times\underset{c}{2}}^{c}=12$$

依照上述討論與發現，使用字母交換次數法去找出任意排列可以寫成通式如下：

$$\underbrace{a\ldots\ldots a}_{n_a}\ \underbrace{b\ldots\ldots b}_{n_b}\ \underbrace{c\ldots\ldots c}_{n_c}\ \ldots\ldots\ \underbrace{z\ldots\ldots z}_{n_z}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{z\ldots\ldots z}_{n_z}\ \underbrace{y\ldots\ldots y}_{n_y}\ \underbrace{x\ldots\ldots x}_{n_x}\ \ldots\ldots\underbrace{b\ldots\ldots b}_{n_b}\ \underbrace{a\ldots\ldots a}_{n_a}$$

移動次數:

$(n_a+ n_b+ \ldots\ldots+n_y) \times n_z + (n_a+ n_b+ \ldots\ldots+n_x) \times n_y + \ldots\ldots + (n_a + n_b) \times n_c + n_a \times n_b$

肆、 結論:

1. 不同花色，且每種花色數量相同，交換花色位置達倒換花色位置完全倒序排列，所需最少移動步驟數的通式可以寫成:

$$\frac{(n-1) \times n \, X \, k}{2}$$

2. 在不同花色，且每種花色重複數量相同，將每種相同花色(字母)視為相異物，倒換花色位置所需最少移動步驟數的通式可以寫成:

$$\frac{kn \times (kn-1)}{2}$$

3. 結論 2 中，若將相同字母視為相同物，若扣除重複數後，其達最後倒換花色位置所需最少移動步驟數的通式可以寫成:

$$\frac{1}{2}\,n^2\,(K^2-K) \;=\; \frac{1}{2}\,n^2\,(K-1)\times k$$

4. 各種數量相同的花色，最後想依原花色(子母)順序重新循環排列所需最少移動步驟的通式可以寫成

$$\frac{(n\text{-}1)\times n}{2} \times \frac{(k\text{-}1)\times k}{2}$$

5. 序位計算法可以解決字母排列無規則次序的情況，但需要花時間去排出起始排列字母間的順序和比較大小，與最後的排列序位大小進行比較，並算出序位比較數，加總後即得到最少移動步數。
6. 交點連線法視覺上較清楚、容易懂，但是當連線較複雜時，不容易分辨出交點。
7. 交換次數法適用於當排列較整齊有規則時，但遇到較字母無規則散亂的排列，計算上會較複雜。

伍、 參考資料及其它

向左走向右走 ～相鄰移位遊戲最佳策略探討之研究。中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書。國小組，數學科。