附件三

屏東縣第 62 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：當漢彌爾頓遇上李白

關鍵詞：<u>三正則圖</u>、<u>一筆畫</u>、<u>漢彌爾頓圈</u>

編號：A1016

當漢彌爾頓遇上李白

摘要

本研究在透過平面到立體圖的點與邊關係，將三正則於日常生活中連結中國古典詩詞、逗趣打油詩。我們從平面圖發掘填字規律之外，尚有幾何規律，好比上下左右對稱、鑲嵌平移，用於正多面體則能在三正則中找出一筆畫路徑，我們進一步探討漢彌爾頓迴圈的可能性，試圖讓數學與文學結合產生跨域美感作品。

壹、研究動機

過年時經過萬年溪畔看到花燈奇幻造型和故宮博物院的數位典藏古玩造型，我們想要把平時琅琅上口的唐詩融入燈籠，做出有趣的唐詩尋奇遊戲。

貳、研究問題

一、　探討正四面體、正八面體與正二十面體面之間的關係。
二、　承上，探討以上三種多面體單位面之間的關係。
三、　完成漢彌爾頓路徑與漢彌爾頓圈的可能。
四、　給予特定數字條件下如何找出漢彌爾頓圈。

參、研究設備與材料

一、　網路資源 Geogebra、文書處理軟體與實體文書工具。
二、　討論紙本記錄與閱讀筆記。

肆、研究歷程

一、　　文獻分析

與本研究類似的國展作品有以下數篇：

(一) 第 56 屆**遨遊棋盤：與直–橫–斜一筆畫共舞**

有一 **m** ×n 矩形方格，任選一格為起點，每次有三種移動方式任選其一：直向、橫向跳 三格，或斜向(左上、右上、左下或右下)跳兩格，且不可超過此矩形。一筆畫走完所有 **m** ×n 矩形方格即有解。任意 **m** ×n 棋盤方格(m≧4、n≧4 且 m 跟 n 不可同時等於 4)皆為有解迴圈 棋盤方格(除 **4×6**、**4×7**、**4×8**為有解路徑棋盤方格外)。

(二) 關於我們的研究：與往常圖論探討多面體頂點、面與邊的關係有所不同。我們將面抽象化為點，是一個將立體化為平面再抽象化為實體的過程。從分割後的多邊形，找到邊和點各自的共同特性。進一步探求漢彌爾頓路徑與迴圈的可能性。

二、　　名詞定義

我們的作品是利用正多面體特性，以圖論為基礎融入中國近體詩，發展出趣味燈籠或字謎的可能。名詞定義如下：

(一) 漢彌爾頓路徑(Hamiltonian Path)又叫做漢彌爾頓連結圖，指圖中任意兩點間都有一筆畫路徑存在。

(二) 漢彌爾頓圈(Hamiltonian Cycle)如果上述路徑終點與起點相連接則稱為漢彌爾頓圈。

(三) 三正則圖(3-regular graph) 指每一個頂點恰好有三個出入口的圖形。

(四) 路徑走法依方向分為縱走(v)、橫走(h)與斜走(o)。

伍、 研究發現與結果討論

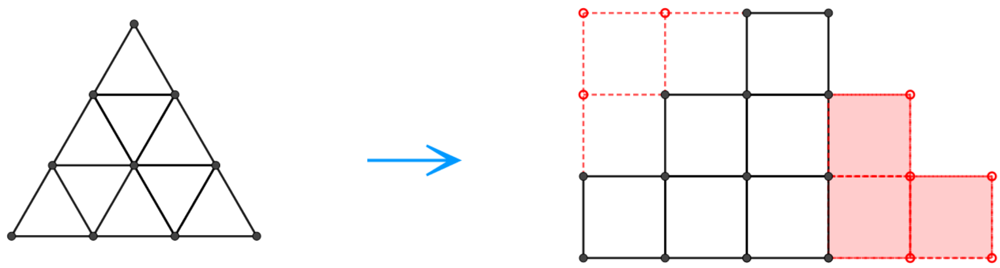
我們選擇柏拉圖立體中的正四面體、正八面體和正二十面體作為研究主體，因為這三種每一面都是正三角形，以下探討皆以T表示原多面體的面，分割後的正三角形以t表示。

一、 「**以面為點**」的平面型態探討

我們的設計是以正三角形為大單位(以T表示)，「**以面為點**」將每一個面代表一個字的位置，取重心代表點(vertex)位置。

(一) 面→點正三角形數(分割後的正三角形以t表示)

當大三角形分割為數個單位，其分割後t總數就是n^2。我們發現正三角形棋盤可以改用正方形思考，正三角形若改用正方形並加以平移部分單位，就可以形成正方形。



n單位	分割數=點數	平面圖入詩可能性			
		五言絕句	含標點	七言絕句	含標點
1	1				
⋮	⋮	x	x	x	x
4	16				
5	25	1	1	x	x
6	36	1	1	1	1

7	49	2	2	1	1
8	64	2	2	2	2
打油詩	依研究者整理收入錄，最少 16 字至多 84 字。				

【討論】由於絕句取自格律詩，截句有上下聯對仗特性，構詞法平仄讀音都可以納入考慮，但是需要的背景知識更多，所以我們先針對是否納入國音標點符號討論。唐詩本無標號停頓，然上下聯之間停頓或有轉折，每句各有代表意思且可入歌成譜，所以最後決定將含標點納入路徑循跡要素，填詩實作由研究組員自行決定是否加入標點以及截句數量。

(二) 多面體入詩可能性

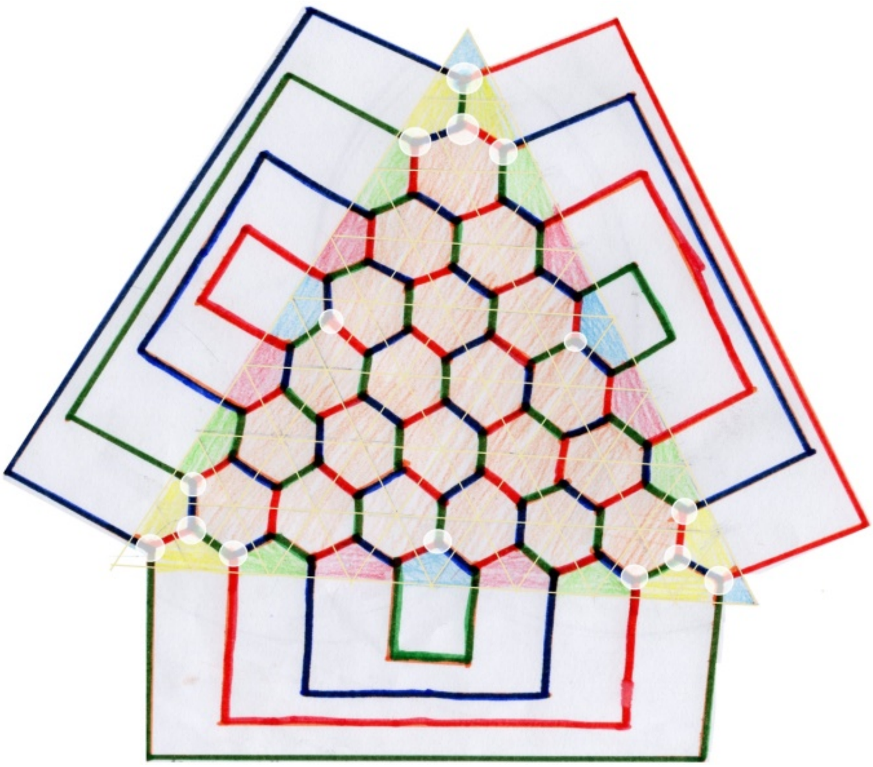
	詩體	無標點	有標點	呈形
1 首	五言絕句	20	24	
	七言絕句	28	32	正八面體
2 首	五言絕句	40	48	
	七言絕句	56	64	正四面體
3 首	五言絕句	60	72	正八面體
	七言絕句	84	96	
4 首	五言絕句	80	96	
	七言絕句	112	128	正八面體
5 首	五言絕句	100	120	正四面體
	七言絕句	140	160	

(三) 正 n 邊形混和型組

T→n 單位數	平面t個數	正四面體		正八面體		正二十面體	
1	1	4	4×1	8	8×1	20	20×1
2	4	16	4×4	8	8×4	80	20×4
3	9	36	4×9	32	8×9	180	20×9
4	16	64	4×16	72	8×16	320	20×16
5	25	100	4×25	128	8×25	500	20×25

【發現】正多面體展開後，將每面分割為 n 個單位後，每一個面改以點代表，我們發現新的多邊形組合型態，有四邊形、五邊形、六邊形等混和型組。當重組回正多面體後，這些型組會呈現正方形、正五邊形、正六邊形組合。

1. 正四面體分割後的多邊形組合

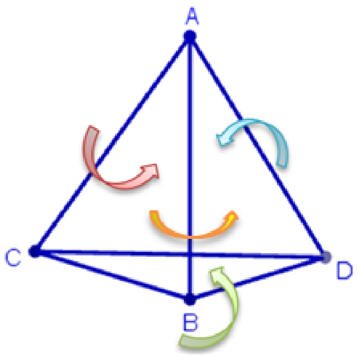


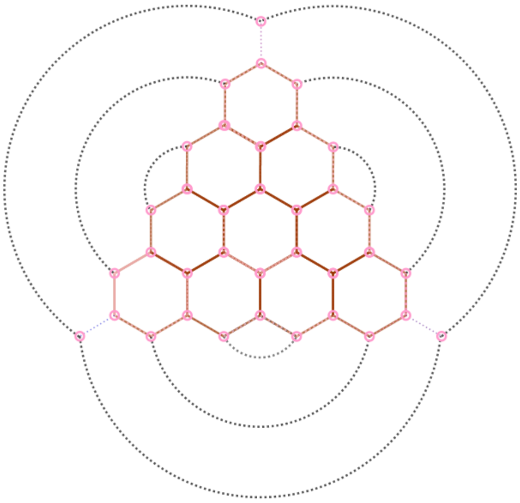
我們討論正四面體是由 4 個大三角形，組合而成。分割後呈現多邊形種類和個數，發現有正三角形(eT)、正五邊形(eP)和正六邊形(eH)混和，其形態及數量變化如下：

正四面體	多邊形型態			
	正三角形(eT)	正五邊形(eP)	正六邊形(eH)	數列發現
1	4	0	0	0
2	4	0	6	6
3	4	0	16	10
4	4	0	30	14
5	4	0	48	18
6	4	0	70	22

【發現】隨著 T 分割單位數增加，正六邊形呈現等量增加。

【原因】正四面體與平面大三角形不同，雖然單面是正三角形，但是要形呈立體的話會用到兩個正三角形，兩兩一組。正六邊形依排列序逐列增加呈現。

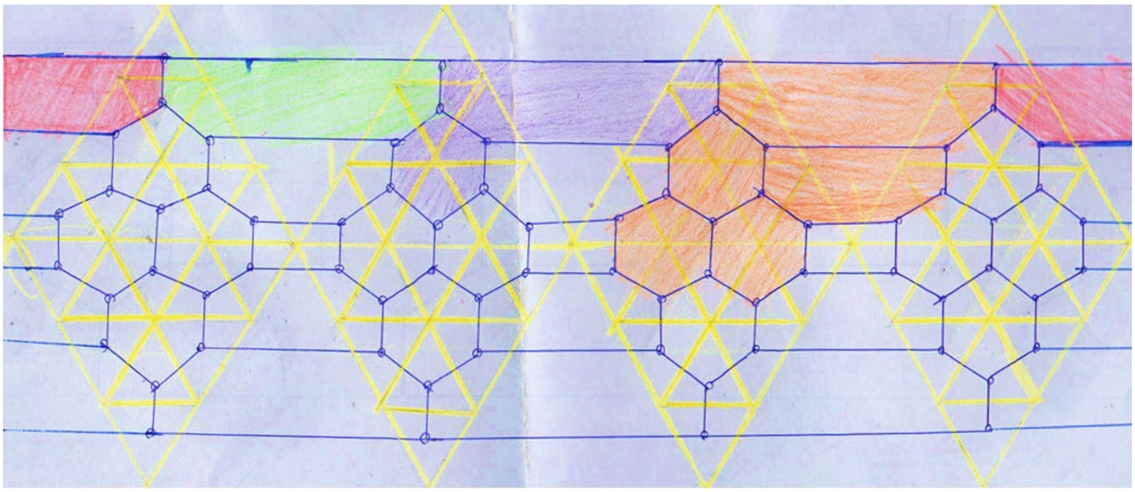


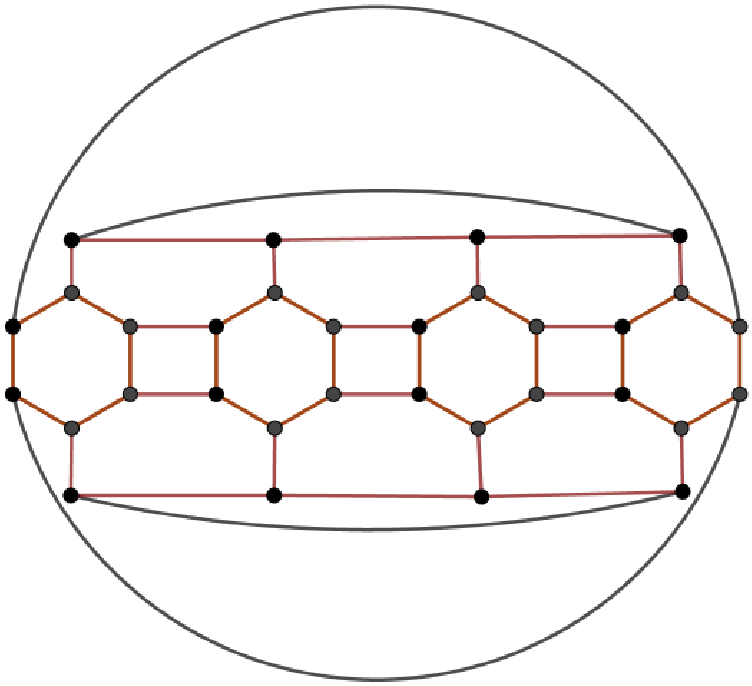


【發現漢彌爾頓圈】

正四面體$n=3$展開後，以展開圖轉換為點圖，根據我們的觀察歸納得到得到 36 點，54 條邊。奇偶一組連線得到以下圈圖，起始點 v1 走到第 24 條邊後遇到 v26，v1 與 v26 頭尾相接，形成漢彌爾頓圈。

2. 正八面體展開後的多邊形混和型態

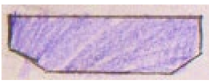




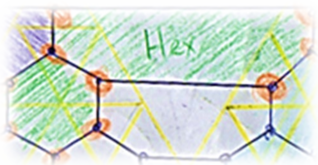
正八面體	多邊形型態			
	正 4 邊形(eT)	正五邊形(eP)	正六邊形(eH)	數列發現
1	6	0	0	0
2	6	0	12	12
3	6	0	32	20
4	6	0	60	28
5	6	0	96	36
6	6	0	140	44

【發現】正八面體特別之處在於，正四邊形(各點相連呈正方形)永遠是 6 個，不會有正五邊形。正六邊形呈現規律增加，是階差數列。

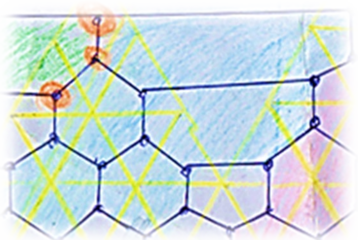
【原因】我們逐層分析，利用共用邊和共用點來計數避免重複，就每一層的點數計算(以$\mathbb{v}_{\ell}$表示該層的點數，ℓ *表示層序*)後找出規律。



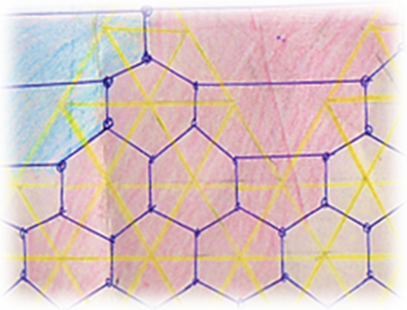
$\ell = 1$ $\mathbb{v}_{\ell 1} = 6, 10, 14, 18, 22, 26 \ldots.$



$\ell = 2$ $\mathbb{v}_{\ell 2} = 10, 17, 24, 31, 38 \ldots$



$\ell = 3$ $\mathbb{v}_{\ell 3} = 16, 27, 38, 49, 60 \ldots$



$\ell = 4$ $\quad$ $\mathbb{v}_{\ell 4} = 21, 34, 47, 60, 73\ \ldots$

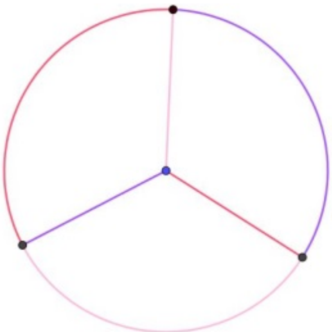
3. 正二十面體

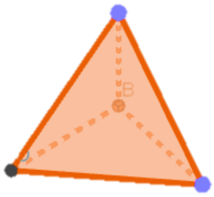
正二十面體	多邊形型態			
	邊(edges)	正五邊形(eP)	正六邊形(eH)	數列發現
1	30	12	0	0
2	120	12	30	30
3	270	12	80	50
4	480	12	150	70
5	770	12	240	90
6	1080	12	350	110
7	1490	12	480	130
8	1920	12	630	150
9	2450	12	800	170
10	3000	12	990	190

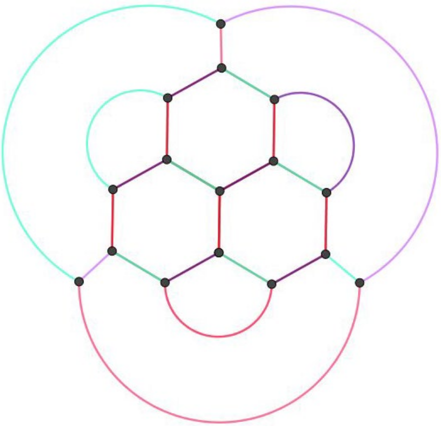
【研究結果】 我們在以上組合發現沒有正三角形單位，只有正五邊形和正六邊形存在。正五邊形不管分割單位為多少永遠在共用邊最近頂點處形呈正五邊形，合計有 12 個。因為正五邊形和正六邊形呈現規律地增加，所以在正二十面體也有數列的發現。

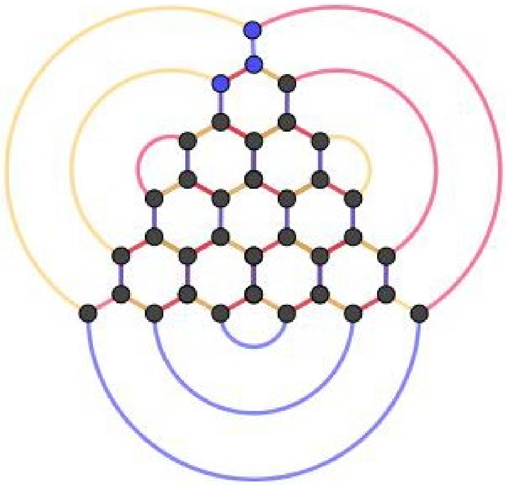
二、　關於三正則圖的發現

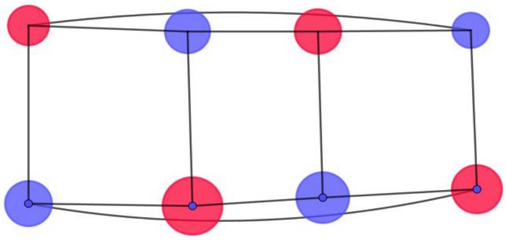
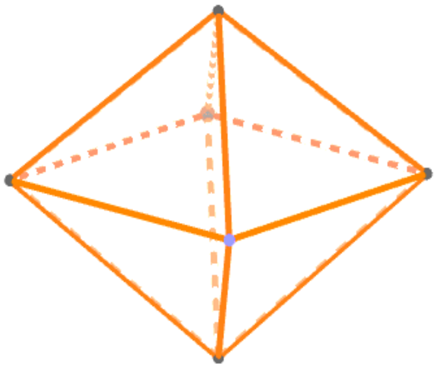
從正四面體、正八面體到正二十面體，當面轉為點時，我們發現點和點之間的關係呈現如下圖型，每一點都有三條邊和相鄰點相連。



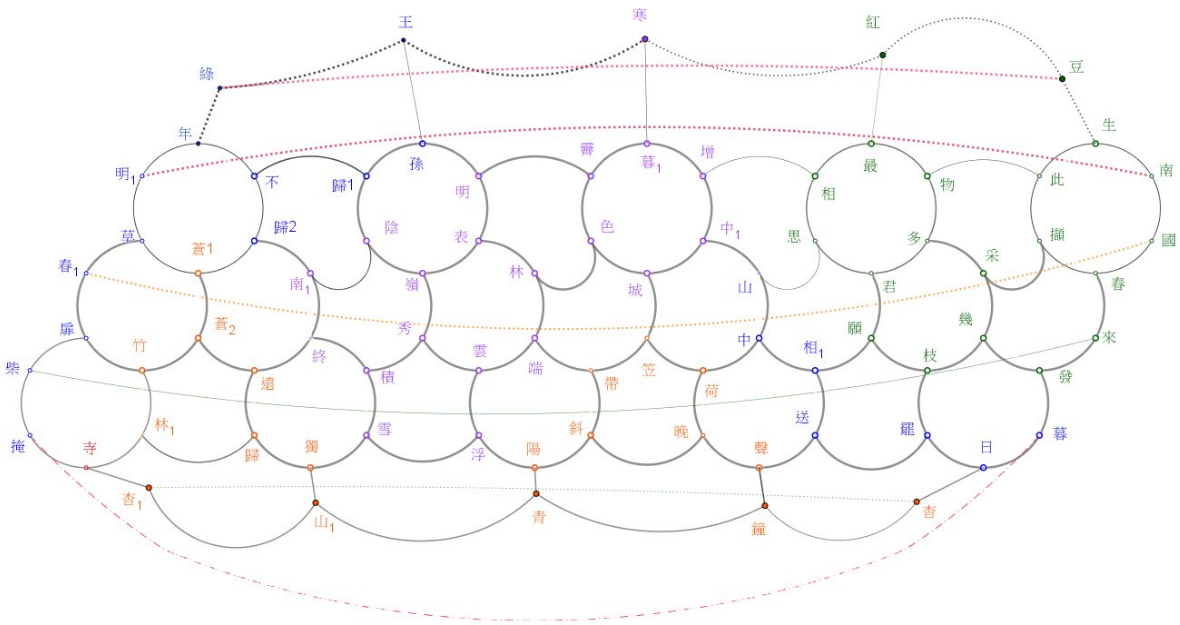




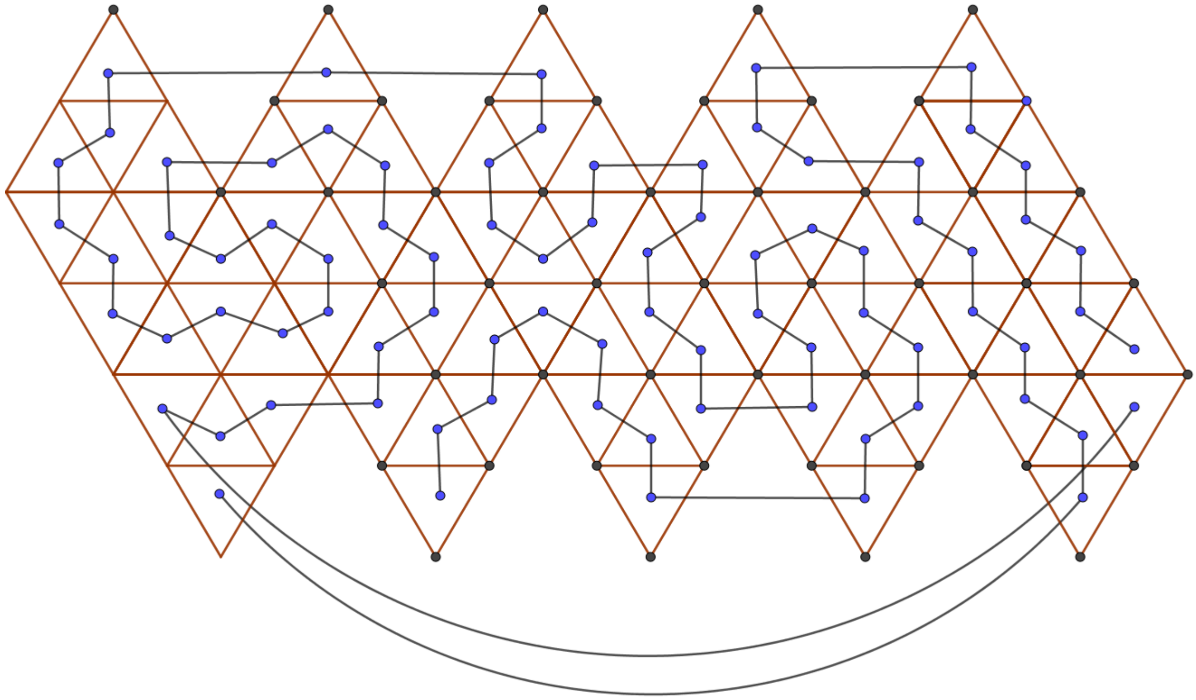


【理由】我們發現從平面圖嘗試到正多面體展開圖後發現每一個點都有三條邊與其他點相連。



【一筆畫遊歷】



三、 完成漢彌爾頓圈可能型組

我們完成漢彌爾頓圈之後，觀察分析路徑，發現有數種走法。首先，立體圖展開後的平面路徑有三角形、長方形、五邊形、六邊形(或如上圖「擠壓甜甜圈」一樣的六點環)，方向定義有縱走 v、橫走 h、斜走 o 三種走法。以四首填 n=2 正二十面體為例，我們找出以下幾種分類：

字序	第一首 相思·王維						第二首 送別·王維					
句	邊(Edge)走向		1	2	3	4	邊(Edge)走向		1	2	3	4
首	前聯	第 1 句	h	v	o	v	前聯	第 1 句	v	o	v	h
字		第 2 句	v	o	o	o		第 2 句	o	h	v	o
起	下聯	第 3 句	v	o	o	o	下聯	第 3 句	o	v	o	v
始		第 4 句	h	o	o	v		第 4 句	v	o	h	v

	第三首　送靈澈·劉長卿						第四首　終南望餘雪·祖詠					
	邊(Edge)走向		1	2	3	4	邊(Edge)走向		1	2	3	4
	前聯	第 1 句	v	o	v	o	前聯	第 1 句	v	o	o	v
		第 2 句	h	h	v	o		第 2 句	v	h	v	o
	下聯	第 3 句	o	o	v	o	下聯	第 3 句	o	v	h	v
		第 4 句	h	v	o	v		第 4 句	o	v	o	v

字序	第一首　相思·王維						第二首　送別·王維					
	邊(Edge)走向		1	2	3	4	邊(Edge)走向		1	2	3	4
	前聯	第 1 句	v	o	v	o	前聯	第 1 句	o	v	h	o
		第 2 句	o	o	o	o		第 2 句	h	v	o	v
第	下聯	第 3 句	o	o	o	v	下聯	第 3 句	v	o	v	h
2		第 4 句	o	o	v	o		第 4 句	o	h	v	o
字	第三首　送靈澈·劉長卿						第四首　終南望餘雪·祖詠					
起	邊(Edge)走向		1	2	3	4	邊(Edge)走向		1	2	3	4
始	前聯	第 1 句	o	v	o	v	前聯	第 1 句	o	o	v	o
		第 2 句	h	v	o	v		第 2 句	h	v	o	v
	下聯	第 3 句	o	v	o	v	下聯	第 3 句	v	h	v	o
		第 4 句	v	o	v	o		第 4 句	v	o	v	h

字序	第一首　相思·王維						第二首　送別·王維					
第	邊(Edge)走向		1	2	3	4	邊(Edge)走向		1	2	3	4
3	前聯	第 1 句	o	v	o	v	前聯	第 1 句	v	h	o	o
字		第 2 句	o	o	o	v		第 2 句	o	v	o	v
起	下聯	第 3 句	o	o	v	h	下聯	第 3 句	o	v	h	v
始		第 4 句	o	v	o	v		第 4 句	h	v	o	v

字序	第一首　相思·王維						第二首　送別·王維					
	第三首　送靈澈·劉長卿						第四首　終南望餘雪·祖詠					
	邊(Edge)走向		1	2	3	4	邊(Edge)走向		1	2	3	4
	前聯	第 1 句	v	o	v	h	前聯	第 1 句	o	v	o	v
		第 2 句	v	o	v	o		第 2 句	v	o	v	o
	下聯	第 3 句	v	o	v	h	下聯	第 3 句	h	v	o	o
		第 4 句	o	v	o	v		第 4 句	o	v	h	h

字序	第一首　相思·王維						第二首　送別·王維					
第 4 字起始	邊(Edge)走向		1	2	3	4	邊(Edge)走向		1	2	3	4
	前聯	第 1 句	v	o	v	o	前聯	第 1 句	h	o	o	h
		第 2 句	o	o	v	o		第 2 句	o	v	o	v
	下聯	第 3 句	o	v	h	o	下聯	第 3 句	v	h	v	o
		第 4 句	v	o	v	o		第 4 句	v	o	v	o
	第三首　送靈澈·劉長卿						第四首　終南望餘雪·祖詠					
	邊(Edge)走向		1	2	3	4	邊(Edge)走向		1	2	3	4
	前聯	第 1 句	o	v	h	h	前聯	第 1 句	v	o	v	h
		第 2 句	o	v	o	o		第 2 句	o	v	o	v
	下聯	第 3 句	o	v	h	v	下聯	第 3 句	v	o	o	v
		第 4 句	v	o	v	o		第 4 句	v	h	h	v

字序	第一首　相思·王維						第二首　送別·王維					
第 5 字起始	邊(Edge)走向		1	2	3	4	邊(Edge)走向		1	2	3	4
	前聯	第 1 句	o	v	o	o	前聯	第 1 句	o	o	h	v
		第 2 句	o	v	o	o		第 2 句	v	o	v	o
	下聯	第 3 句	v	h	o	o	下聯	第 3 句	h	v	o	h
		第 4 句	o	v	o	v		第 4 句	o	v	o	v

	第三首　送靈澈·劉長卿					第四首　終南望餘雪·祖詠				
邊(Edge)走向		1	2	3	4	邊(Edge)走向		1	2	3	4
前聯	第 1 句	v	h	h	v	前聯	第 1 句	o	v	h	v
	第 2 句	v	o	o	v		第 2 句	v	a	v	h
下聯	第 3 句	v	h	v	o	下聯	第 3 句	o	o	v	o
	第 4 句	o	v	o	o		第 4 句	h	h	v	o

【結果】原本 2h1o1v 跟 1h2o1v 這兩種組合有 12 種，但是 1h1o2v 的組合只有 6 種。

【理由】因為不能連續兩個 v 在一起，受限於正六邊形構造，六點環每走完每一直條線段都會轉 60 度角。

【延伸探討】我們再試著將所有路徑析出組合變化，並找出實際出現次數：

路徑組合				**路徑組合**				**路徑組合**			
hh→起始			合計	oh→起始			合計	vh→起始			合計
hh→	h→	h	2	oh→	h→	h	0	vh→	h→	h	1
		o	0			o	1			o	0
		v	2			v	0			v	0
	o→	h	0		o→	h	0		o→	h	0
		o	0			o	4			o	2
		v	0			v	1			v	1
	v→	h	0		v→	h	1		v→	h	0
		o	2			o	2			o	0

路徑組合				**路徑組合**				**路徑組合**			
ho→起始			合計	oo→起始			合計	vo→起始			合計
ho→	h→	h	0	oo→	h→	h	0	vo	h→	h	0
		o	0			o	4			o	1
		v	0			v	2			v	1
	o→	h	6		o→	h	0		o→	h	1
		o	0			o	24			o	2
		v	2			v	2			v	0
	v→	h	1		v→	h	2		v→	h	0
		o	0			o	1			o	0

路徑組合				**路徑組合**			
hv→起始			合計	ov→起始			合計
hv→	h→	h	0	ov→	h→	h	2
		o	1			o	2
		v	0			v	0
	o→	h	3		o→	**h**	0
		o	2			o	1
		v	0			v	0

路徑類型	組合	實際出現次數
4h	hhhh*3	2
3h1o	hhho/hhoh/hohh/ohhh	0
3h1v	hhhv/hhvh/hvhh/vhhh	1
2h2o	hhoo/hoho/ohho/hooh/ohoh/oohh	10
2h1o1v	hhov/hhvo/hohv/hovh/hvho/hvoh/ ohhv/ohvh/ovhh/vhho/vhoh/vohh	10
1h3o	hooo/ohoo/ooho/oooh	8
1h2o1v	hovo/hoov/hvoo/ohov/ohvo/oovh/ oohv/ovho/ovoh/vhoo/voho/vooh	16
2h2v	hvhv/vhvh/vhhv*3	0
1h1o2v	hvov/ovhv/vhov/vhvo/vohv/vovh	1
4o	oooo*3	24
3o1v	ooov/oovo/ovoo/vooo	6
2o2v	ovov/voov/vovo*3	0

【結果】這些組合雖然有相當數量，但並不會在每次嘗試迴圈時都出現。出現比例最高的走法依排序為：4o 高達 24 次，1h2o1v 達 16 次，2h2o 和 2h1o1v 則有 10 次。

【說明】這與分割後的單位面轉化為點有關，正六邊形數遠大於正五邊形數量，斜走容易達成迴圈，成形後的迴圈會呈現上下對稱或左右對稱。

伍、研究結論

一、 正三角形分割後，每增加一列其數量累計成m^2，即正方形數。

二、 正四面體、正八面體和正二十面體每一大面在分割後其正多邊形數以階差數列增加。

三、 正四面體、正八面體和正二十面體每一大面在分割後，單位面轉化為圖點，相鄰點會分別呈現正三角形、正方形、正五邊形和正六邊形組合鑲嵌。

四、 特定形狀數量影響路徑型態，正二十面體分割後斜走次數縱走橫走。斜走容易達成迴圈，成形後的迴圈會呈現上下對稱或左右對稱。

陸、參考文獻

徐力行(2003)。沒有數字的數學。天下文化：臺北市。

唐詩三百首。http://cls.lib.ntu.edu.tw/300/ALL/ALLFRAME.htm

國立故宮博物院典藏資料檢索 https://digitalarchive.npm.gov.tw/

陳柔安、陳昭偉和張宸溥(2016)：遨遊棋盤：與直–橫–斜一筆畫共舞。中華民國第 56 屆全國科學展覽會作品說明書。