

# 屏東縣第 62 屆國中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學

組 別：國中組

作品名稱：Knights Swap—無標號樹之探討

關 鍵 詞：雙中心樹、圖同構、交換群

編號：B1020

# Knights Swap—無標號樹之探討

## 摘要

這是延伸自我們在中華民國第 60 屆中小學科學展覽會提交的作品 *Crazy Knights*，相對於已完成的環圖分析，我們認為非環圖尚有擴充發展的可能。在圖論研究中，樹(Tree)是無環的連通圖，是圖論中是相當重要的一支。因其結構簡單，在有標號的點容易解出，但無標號的樹就不容易有好的解答。根據過往研究，我們發現連方塊雖然能夠以二元編碼方式篩出唯一圖，但我們從已知的騎士交換節點圖擴大範圍解出無標號樹(unlabelled trees)，發現無標號樹產生規律，從其中解析並賦予權值後驗證。我們擷出的無標號樹可以解決圖同構問題並進一步得到樹圖說明騎士交換可用之規律。

關鍵詞：雙中心樹、圖同構、交換群

## 壹、 研究動機

這是延伸自我們在中華民國第 60 屆中小學科學展覽會提交的作品 Crazy Knights，相對於已完成的環圖分析，我們認為非環圖尚有擴充發展的可能，成為我們這次持續研究的動力。

## 貳、 研究目的

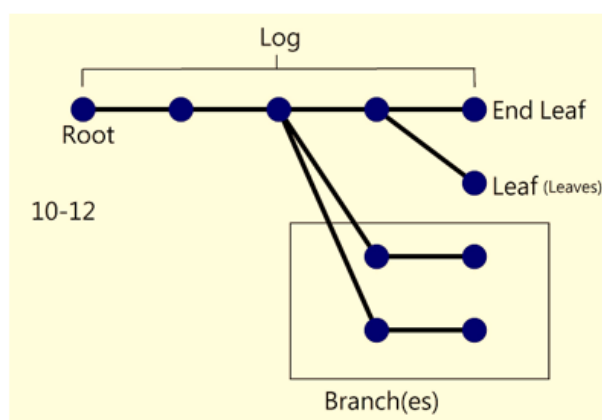
- 一、解出系統化產生樹圖的方法。
- 二、以樹圖說明騎士交換可用之規律。
- 三、探討樹圖權重和騎士交換對數和步數之間的關係。研究工具
  - 一、數位與實體文書工具。
  - 二、討論紙本記錄與閱讀筆記。

## 肆、研究歷程

在圖論研究中，樹(Tree)是無環的連通圖，在圖論中是相當重要的一支。因為樹圖的結構簡單，在有標號的點容易解出，但無標號的樹就不容易有好的解答<sup>[1]</sup>，我們從已知的騎士交換節點圖中 39 張樹圖<sup>[2]</sup>擴大範圍解析無標號樹(unlabelled trees)，以自創分析方法發現無標號樹產生規律，從其中解析並賦予權值後驗證。以此研究結果再檢視原 39 張數圖刪除同構之後僅剩下 18 張唯一圖。在歷屆科展作品中，我們發現尚無任何作品與該子題有關之研究，無標號樹圖從早期以生成函數驗證<sup>[3][4]</sup>發展到近五年研究，多借助高階運算工具以擴增該數列為主，其方法與結果皆與本研究有所差異。

我們除了將無標號樹圖分析外，進一步將交換本研究重要名詞定義與圖示如下：

- 一、根(Root)：深度為 0 的點(vertex)是樹的「根」，屬性是唯一一點可任意發展為任意非環連通圖。
- 二、主幹(Log)：在編碼中，若第一項(0)到第 n 項之間公差為 1 的等差數列時點 0 到點 n+1 的集合為主幹。
- 三、葉(Leaf)：葉即度序列為 1 的點。以近圖為例  $G = (V, E)$ ，與葉相連的邊數為 1，標註為  $deg_G(v) = 1$ 。
- 四、終點葉(End Leaf)：這裡特別指的是「主幹」終點的葉。主幹終點前若有分支則該終點為終點葉。
- 五、權重(summation of weighting)：分指點權重和圖權重，前者指每個點的「晚輩」數，圖權重則指將圖中每一點權重予以加總。



六、群數 group：指對數(pairs)或泛指訊息組數。

七、交換力：指交換最少步數。

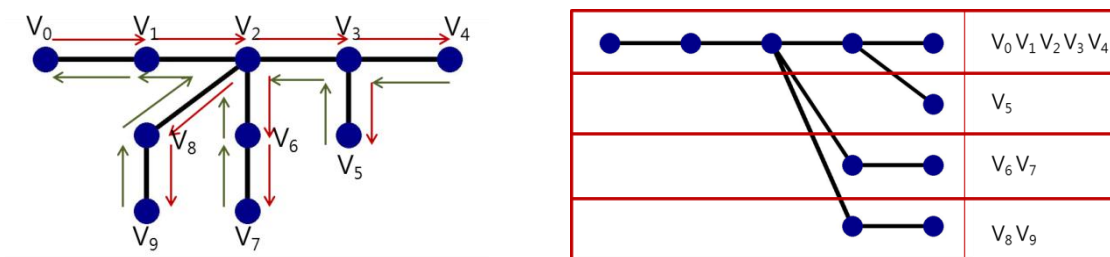
## 伍、 研究結果與討論

以不同的點當成根會有不同的樹序(tree ordering)，把圖的點排成 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 即為樹序，「根」即從任一點選擇，其後的排序則由所謂的固定根衍生為主幹(Log)和分支(Branches)，即成為樹圖。針對無標號樹圖我們試著找出篩選機制檢出唯一圖。相對於較常賦予邊權重來構圖，我們以點權重作為計算基礎，比較停駐點數量後生成樹圖並進一步分析群組交換可能。

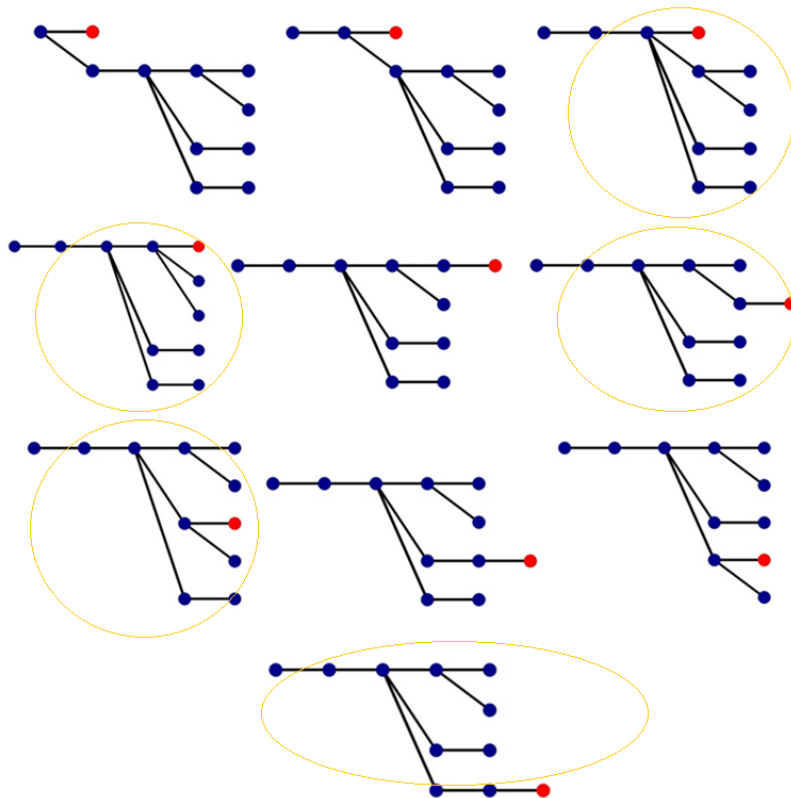
### 一、針對無標號樹圖生成工具

我們設計生成排序挑選編碼系統最終定版 $G(S \leftrightarrow P)E$ 。

在研究前期，所有樹圖都是依據生成(Generate)、排序(Sort)、挑選(Pick)、編碼(Encode)四種子工具產生，簡稱 GPSE。四個當中，E(Encode)是研究工具的核心，是可以將圖形轉為數字代碼重要步驟，有助於將圖系統化、透過編碼分析產稱異構圖。例如，當我們將一張有  $n$  個點的樹圖的根(Root)定義為  $V_0$ ，並以類似於「摸牆走迷宮」的方式進行編號，並進行梳理：



(一) Generate 是在一個  $n$  個點的樹圖做為基礎下，在  $V_0 \sim V_{n-1}$  的每一個點個延伸出一個點，這將會產出  $n$  張圖，以上圖 10-12 為範例，經過 Generate 產出的圖形後進一步試以紅點標示延伸出的點，原圖會因為紅點經過分類揀選後，從原樹圖延伸出的 10 張圖析出以下 5 種異構圖(圈選)：



(二) Sort 是在不改變根的情況下在 Encode 之後的編碼依序比較，較大者為優。以兩張同構樹圖為例：(0,1,2,3,3,2,6,2,8)和(0,1,2,3,2,5,2,7,7)則以前者為優先。

Sort 在初始的構想當中，是以權重總和來排序。當遇到「分岔」，則比較分岔點後的子樹枝 SW 大小，SW 大者則排在上，反之亦然。


(三) Pick 以及 Sort 皆是接續在 Generate 之後的步驟，目的是為了在同構圖中挑選出一個統一的根並排序好。Pick 是在嘗試以每一個不同的點作為根的情況下編碼依序比較，較大者為優(在 S(Sort)之後即選為此樹圖的代表圖)，並刪除編碼相同之圖形(即同構圖)，但是在不同的排序下編碼是有差異的，也就是在刪除之前必須先 S(Sort)。

P(Pick)在初始的構想當中同樣是以 SW 來做為選擇代表圖的依據，選擇 SW 最大者  $SW_{max}$ ，但 SW 的大小與排序無關，只與哪一個點作為根有關聯，所以在第一階段的初始構想是先進行 P(Pick)才進行 S(Sort)；進入研究第二階段，我們發現 Pick 在不同排序下會有不同的篩選結果，必須先進行 Sort 才能加以 Pick，所以最後統合交錯進行，成為  $G(S \leftrightarrow P)E$ 。

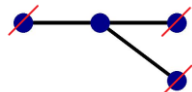
## 二、以雙中心樹分析生成樹圖

Cayley 於 1881 提出樹圖是一種可分析型態，他將圖分為單中心與雙中心，我們特別注意到中心圖可以協助我們區辨析出異構圖。

### (一) 單中心樹

Tree	Code	SW	Graph
3-1	0, 1	6	

Tree	Code	SW	Graph
------	------	----	-------

4-1	0, 1, 1	9	
-----	---------	---	--

Tree	Code	SW	Graph
------	------	----	-------

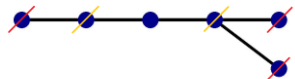
5-1	0, 1, 1, 1	12	
-----	------------	----	---

5-3	0, 1, 2, 3	15	
-----	------------	----	--

Tree	Code	SW	Graph
------	------	----	-------

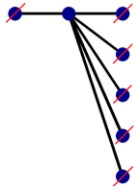
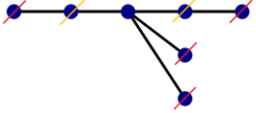
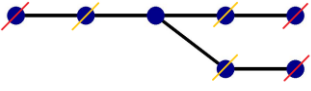
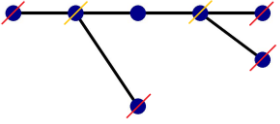
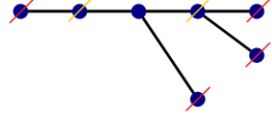


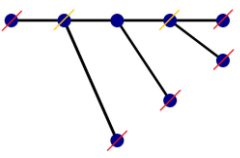
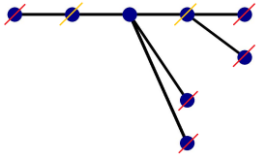
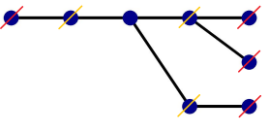
6-1	0, 1, 1, 1, 1	15	
-----	---------------	----	--

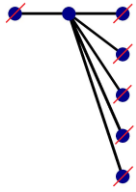
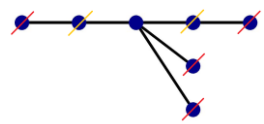
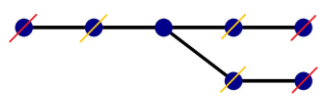
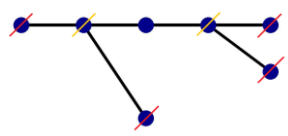
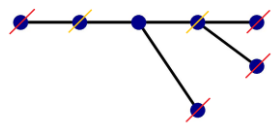
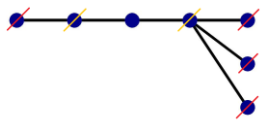

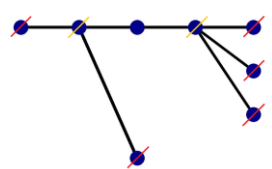
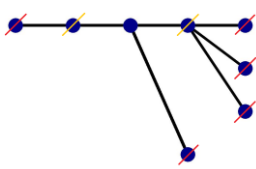
6-4	0, 1, 2, 3, 2	19	
-----	---------------	----	--

6-5	0, 1, 2, 3, 3	20	
-----	---------------	----	--

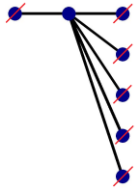
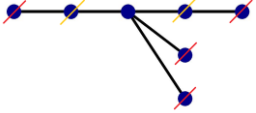
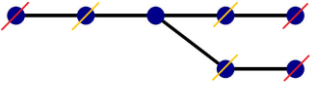
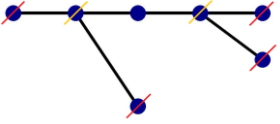
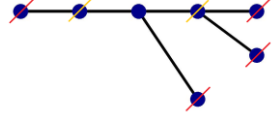


Tree	Code	SW	Graph
7-1	0, 1, 1, 1, 1, 1	18	
7-4	0, 1, 2, 3, 2, 2	23	
7-5	0, 1, 2, 3, 2, 5	24	
7-6	0, 1, 2, 3, 3, 1	23	
7-7	0, 1, 2, 3, 3, 2	24	
7-8	0, 1, 2, 3, 3, 3	25	
7-11	0, 1, 2, 3, 4, 5	28	
Tree	Code	SW	Graph
8-1	0, 1, 1, 1, 1, 1, 1	21	
8-5	0, 1, 2, 3, 2, 2, 2	27	
8-6	0, 1, 2, 3, 2, 5, 2	28	

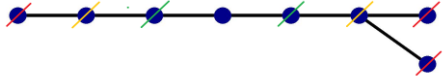


Tree	Code	SW	Graph
7-1	0, 1, 1, 1, 1, 1	18	
7-4	0, 1, 2, 3, 2, 2	23	
7-5	0, 1, 2, 3, 2, 5	24	
7-6	0, 1, 2, 3, 3, 1	23	
7-7	0, 1, 2, 3, 3, 2	24	
7-8	0, 1, 2, 3, 3, 3	25	
7-11	0, 1, 2, 3, 4, 5	28	
Tree	Code	SW	Graph
8-7	0, 1, 2, 3, 3, 2, 1	27	
8-8	0, 1, 2, 3, 3, 2, 2	28	
8-9	0, 1, 2, 3, 3, 2, 6	29	

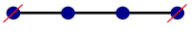
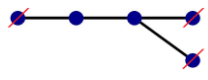
Tree	Code	SW	Graph
7-1	0, 1, 1, 1, 1, 1	18	
7-4	0, 1, 2, 3, 2, 2	23	
7-5	0, 1, 2, 3, 2, 5	24	
7-6	0, 1, 2, 3, 3, 1	23	
7-7	0, 1, 2, 3, 3, 2	24	
7-8	0, 1, 2, 3, 3, 3	25	
7-11	0, 1, 2, 3, 4, 5	28	
Tree	Code	SW	Graph
8-10	0, 1, 2, 3, 3, 3, 1	28	
8-11	0, 1, 2, 3, 3, 3, 2	29	

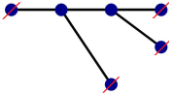
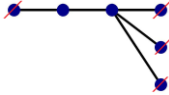

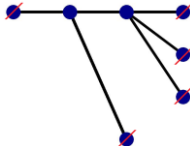
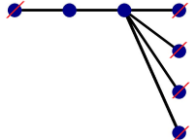
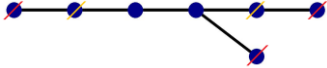
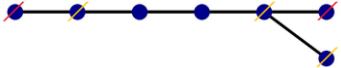
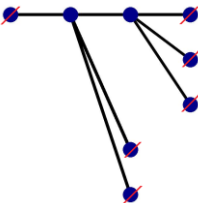
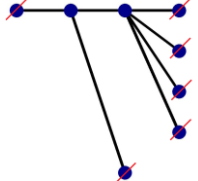
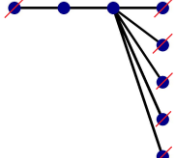
Tree	Code	SW	Graph
7-1	0, 1, 1, 1, 1, 1	18	
7-4	0, 1, 2, 3, 2, 2	23	
7-5	0, 1, 2, 3, 2, 5	24	
7-6	0, 1, 2, 3, 3, 1	23	
7-7	0, 1, 2, 3, 3, 2	24	
7-8	0, 1, 2, 3, 3, 3	25	
7-11	0, 1, 2, 3, 4, 5	28	
Tree	Code	SW	Graph
8-12	0, 1, 2, 3, 3, 3, 3	30	
8-20	0, 1, 2, 3, 4, 5, 3	33	
8-21	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4	34	

Tree	Code	SW	Graph
7-1	0, 1, 1, 1, 1, 1	18	
7-4	0, 1, 2, 3, 2, 2	23	
7-5	0, 1, 2, 3, 2, 5	24	
7-6	0, 1, 2, 3, 3, 1	23	
7-7	0, 1, 2, 3, 3, 2	24	
7-8	0, 1, 2, 3, 3, 3	25	
7-11	0, 1, 2, 3, 4, 5	28	

Tree	Code	SW	Graph
8-22	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5	35	

(二) 雙中心

Tree	Code	SW	雙中心樹 Bicentral Tree
4-2	0, 1, 2	10	
5-2	0, 1, 2, 2	14	

Tree	Code	SW	雙中心樹 Bicentral Tree
6-2	0, 1, 2, 2, 1	17	
6-3	0, 1, 2, 2, 2	18	
6-6	0, 1, 2, 3, 4	21	
7-2	<b>0, 1, 2, 2, 2, 1</b>	<b>21</b>	
7-3	0, 1, 2, 2, 2, 2	22	
7-9	0, 1, 2, 3, 4, 3	26	
7-10	0, 1, 2, 3, 4, 4	27	
8-2	<b>0, 1, 1, 2, 2, 2, 1</b>	<b>24</b>	
8-3	0, 1, 2, 2, 2, 2, 1	25	
8-4	0, 1, 2, 2, 2, 2, 2	26	

8-13	0, 1, 2, 3, 4, 3, 2	30	
8-14	0, 1, 2, 3, 4, 3, 3	31	
8-15	0, 1, 2, 3, 4, 3, 6	32	
8-16	0, 1, 2, 3, 4, 4, 1	30	
8-17	0, 1, 2, 3, 4, 4, 2	31	
8-18	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3	32	
8-19	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4	33	
8-23	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	36	

### 三、權重(summation of weighting)

針對樹圖點給予不同權值計算得之總和結果如下

#### 生成樹圖(一) $3 \leq v \leq 5$

圖編號 Tree Number	圖編碼 Code	組數 Suite	交換能力 Moves	權重 Summation
3-1	0, 1	0	$\infty$	6
4-1	0, 1, 1	1	6	9
4-2	0, 1, 2	0	$\infty$	10
5-1	0, 1, 1, 1	1	6	12

圖編號 Tree Number	圖編碼 Code	組數 Suite	交換能力 Moves	權重 Summation
5-2	0, 1, 2, 2	1	6	14
5-3	0, 1, 2, 3	0	$\infty$	15

【結果】  $f(3) = 31$ ,  $f(4) = 2$ ,  $f(5) = 3$

生成樹圖組(二)

$$6 \leq v \leq 8$$

圖編號 Tree Number	圖編碼 Code	組數 Suite	交換能力 Moves	權重 Summation
6-1	0, 1, 1, 1, 1	2	10	15
6-2	0, 1, 2, 2, 1	2	12	17
6-3	0, 1, 2, 2, 2	1	6	18
6-4	0, 1, 2, 3, 2	1	6	19
6-5	0, 1, 2, 3, 3	1	6	20
6-6	0, 1, 2, 3, 4	0	$\infty$	21
7-1	0, 1, 1, 1, 1, 1	2	10	18
7-2	0, 1, 2, 2, 2, 1	2	12	21
7-3	0, 1, 2, 2, 2, 2	2	10	22
7-4	0, 1, 2, 3, 2, 2	2	16	23
7-5	0, 1, 2, 3, 2, 5	2	18	24
7-6	0, 1, 2, 3, 3, 1	2	12	23
7-7	0, 1, 2, 3, 3, 2	2	12	24
7-8	0, 1, 2, 3, 3, 3	1	6	25
7-9	0, 1, 2, 3, 4, 3	1	6	26
7-10	0, 1, 2, 3, 4, 4	1	6	27
7-11	0, 1, 2, 3, 4, 5	0	$\infty$	28

【結果】  $f(6) = 6$ ,  $f(7) = 11$ ,  $f(8) = 23$

圖編號 Tree Number	圖編碼 Code	組數 Suite	交換能力 Moves	權重 Summation
8-1	0, 1, 1, 1, 1, 1, 1	3	14	21
8-2	0, 1, 1, 2, 2, 2, 1	2	12	24
8-3	0, 1, 2, 2, 2, 2, 1	2	10	25
8-4	0, 1, 2, 2, 2, 2, 2	2	10	26
8-5	0, 1, 2, 3, 2, 2, 2	2	10	27
8-6	0, 1, 2, 3, 2, 5, 2	2	16	28
8-7	0, 1, 2, 3, 3, 2, 1	3	18	27
8-8	0, 1, 2, 3, 3, 2, 2	2	12	28
8-9	0, 1, 2, 3, 3, 2, 6	2	12	29
8-10	0, 1, 2, 3, 3, 3, 1	2	12	28
8-11	0, 1, 2, 3, 3, 3, 2	2	12	29
8-12	0, 1, 2, 3, 3, 3, 3	2	16	30
8-13	0, 1, 2, 3, 4, 3, 2	2	12	30
8-14	0, 1, 2, 3, 4, 3, 3	2	16	31
8-15	0, 1, 2, 3, 4, 3, 6	2	18	32
8-16	0, 1, 2, 3, 4, 4, 1	2	12	30
8-17	0, 1, 2, 3, 4, 4, 2	2	12	31
8-18	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3	2	12	32
8-19	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4	1	6	33
8-20	0, 1, 2, 3, 4, 5, 3	2	26	33
8-21	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4	1	6	34
8-22	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5	1	6	35
8-23	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0	$\infty$	36

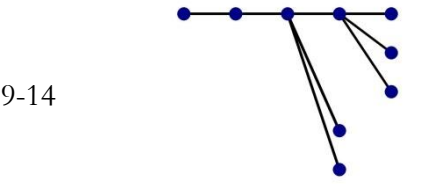
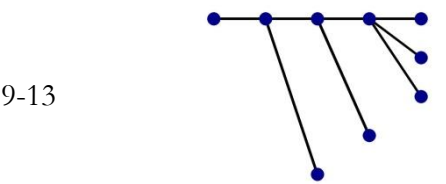
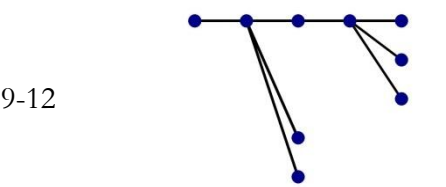
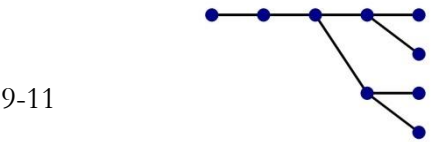
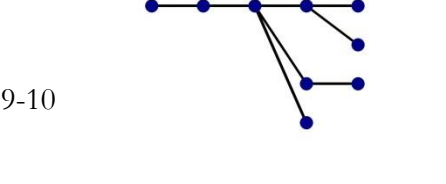
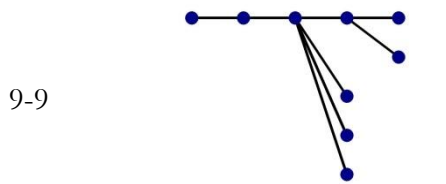
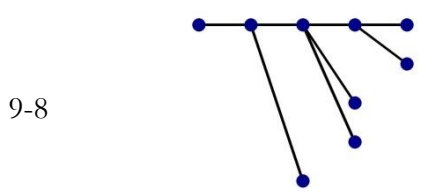
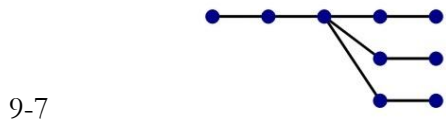
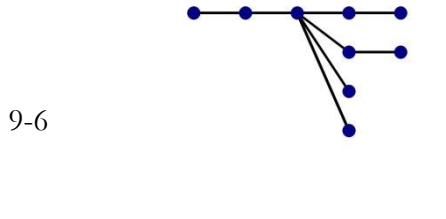
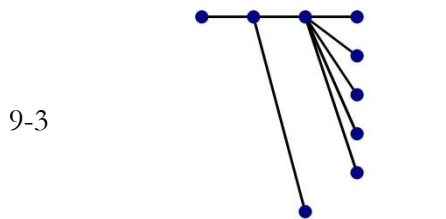
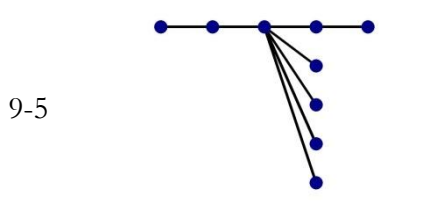
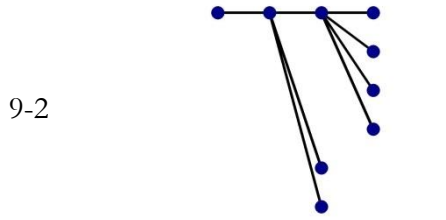
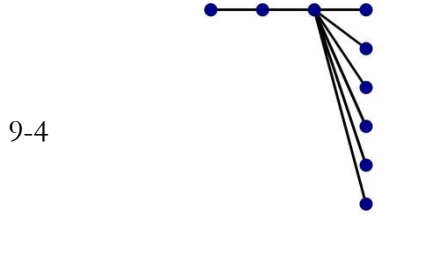
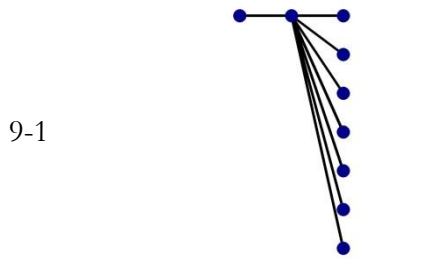
圖編號	圖編碼	組數	交換能力	權重
<b>9-1</b>	0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	3	14	24
<b>9-2</b>	0, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1	3	16	28
<b>9-3</b>	0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1	3	16	29
<b>9-4</b>	0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2	3	14	30
<b>9-5</b>	0, 1, 2, 3, 2, 2, 2, 2	3	22	31
<b>9-6</b>	0, 1, 2, 3, 2, 5, 2, 2	3	22	32
<b>9-7</b>	0, 1, 2, 3, 2, 5, 2, 7	3	28	33
<b>9-8</b>	0, 1, 2, 3, 3, 2, 2, 1	3	20	31
<b>9-9</b>	0, 1, 2, 3, 3, 2, 2, 2	3	20	32
<b>9-10</b>	0, 1, 2, 3, 3, 2, 6, 2	3	22	33
<b>9-11</b>	0, 1, 2, 3, 3, 2, 6, 6	3	22	34



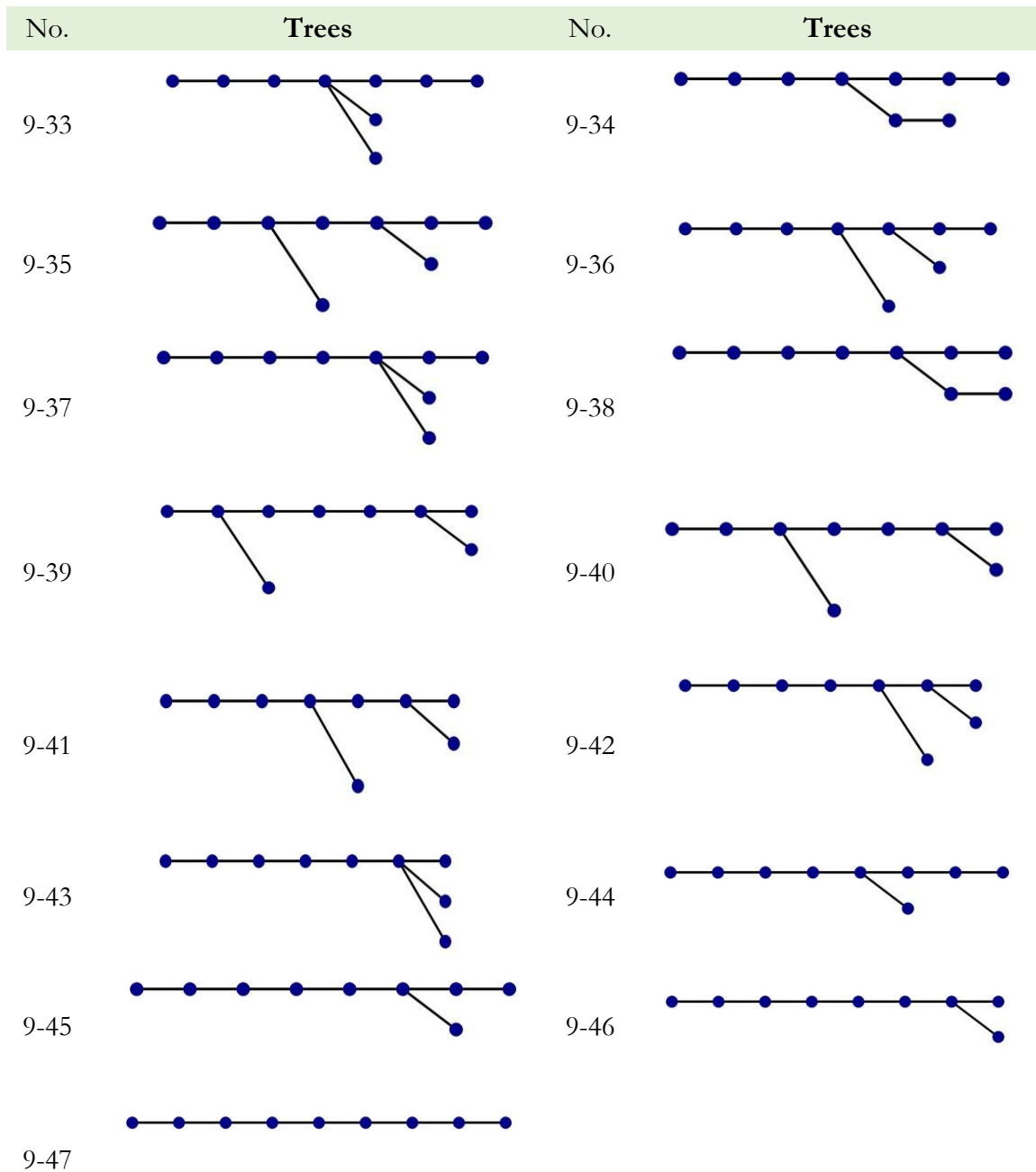
圖編號	圖編碼	組數	交換能力	權重
9-12	0, 1, 2, 3, 3, 3, 1, 1	2	12	31
9-13	0, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 1	3	20	32
9-14	0, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 2	3	22	33
9-15	0, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 7	3	24	34
9-16	0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 1	3	16	33
9-17	0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 2	3	16	34
9-18	0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3	2	10	35
9-19	0, 1, 2, 3, 4, 3, 3, 2	3	24	35
9-20	0, 1, 2, 3, 4, 3, 3, 3	2	16	36
9-21	0, 1, 2, 3, 4, 3, 6, 2	2	12	36
9-22	0, 1, 2, 3, 4, 3, 6, 3	2	16	37
9-23	0, 1, 2, 3, 4, 4, 2, 2	3	24	35
9-24	0, 1, 2, 3, 4, 4, 2, 7	2	12	36
9-25	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 1	3	18	35
9-26	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2	3	18	36
9-27	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 3	2	12	37
9-28	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 7	2	12	38
9-29	0, 1, 2, 3, 4, 1, 1, 1	2	12	36
9-30	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 2	2	12	37
9-31	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 3	2	12	38
9-32	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4	2	10	39
9-33	0, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 3	2	16	38
9-34	0, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 7	2	18	39
9-35	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 5	2	12	38
9-36	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3	2	12	39
9-37	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 4	2	16	40
9-38	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 7	2	18	41
9-39	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 1	2	12	38
9-40	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 2	2	12	39
9-41	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 3	2	12	40
9-42	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 4	2	12	41
9-43	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5	1	6	42
9-44	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 4	2	26	42
9-45	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5	1	6	43
9-46	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6	1	6	44
9-47	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0	$\infty$	45

【結果】 根據  $f(9) = 47$ ，圖示如下

No.	Trees	No.	Trees
-----	-------	-----	-------



No.	Trees	No.	Trees
9-15		9-16	
9-17		9-18	
9-19		9-20	
9-21		9-22	
9-23		9-24	
9-25		9-26	
9-27		9-28	
9-29		9-30	
9-31		9-32	



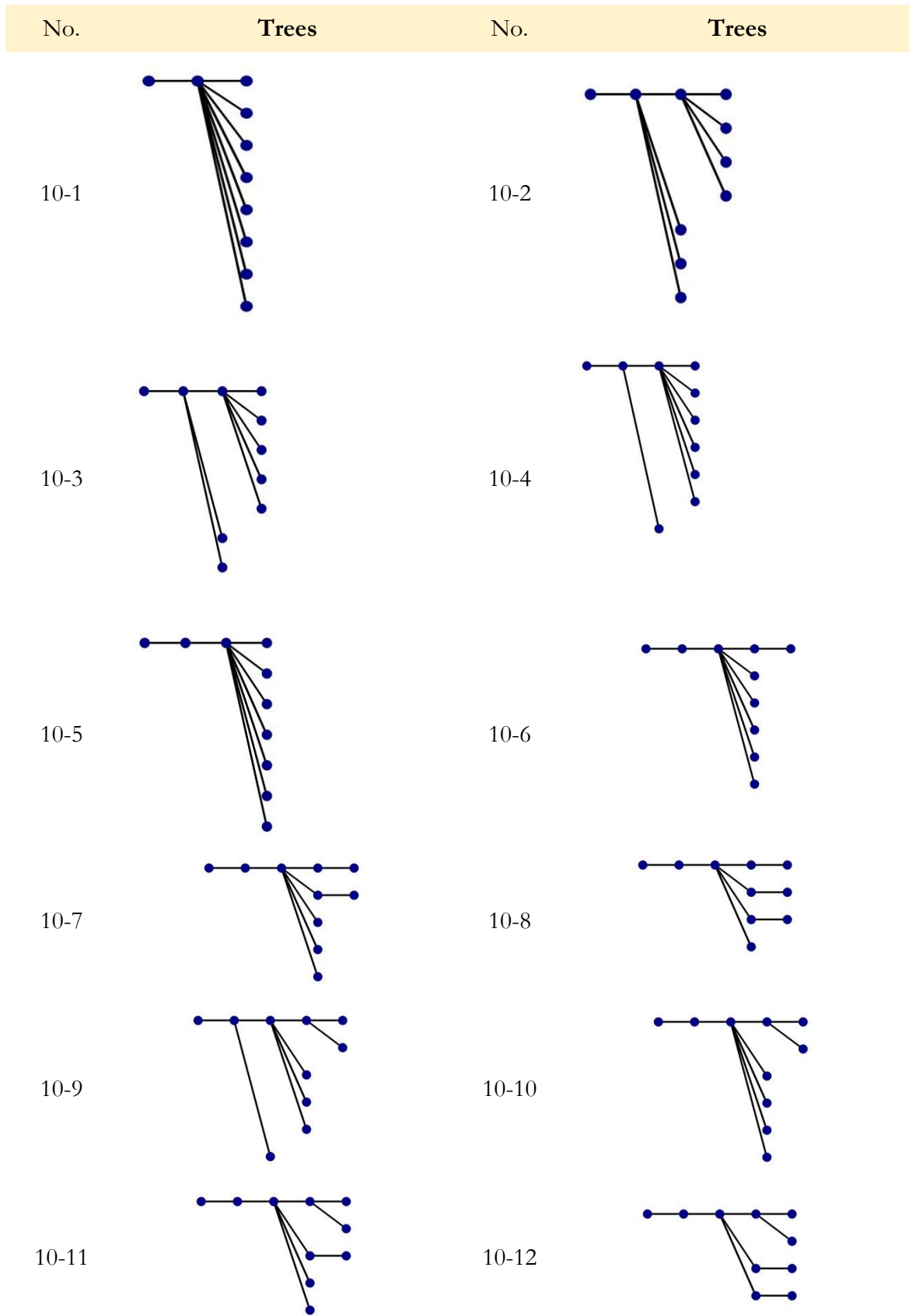
圖編號 Tree Number	圖編碼 Code	組數 Suite	交換能力 Moves	權重 Summation
<b>10-1</b>	0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	4	18	27
<b>10-2</b>	0, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1	4	20	31
<b>10-3</b>	0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1	3	16	32
<b>10-4</b>	0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1	4	20	33
<b>10-5</b>	0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	3	18	34
<b>10-6</b>	0, 1, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2	3	18	35

圖編號 Tree Number	圖編碼 Code	組數 Suite	交換能力 Moves	權重 Summation
10-7	0, 1, 2, 3, 2, 5, 2, 2, 2	3	20	36
10-8	0, 1, 2, 3, 2, 5, 2, 7, 2	3	24	37
10-9	0, 1, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 1	4	22	35
10-10	0, 1, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2	3	16	36
10-11	0, 1, 2, 3, 3, 2, 6, 2, 2	3	16	37
10-12	0, 1, 2, 3, 3, 2, 6, 2, 8	3	24	38
10-13	0, 1, 2, 3, 3, 2, 6, 6, 1	4	24	37
10-14	0, 1, 2, 3, 3, 2, 6, 6, 2	3	20	38
10-15	0, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 1, 1	3	16	35
10-16	0, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 1	3	16	36
10-17	0, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2	3	16	37
10-18	0, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 7, 2	3	16	38
10-19	0, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 7, 7	3	18	39
10-20	0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 1, 1	3	16	36
10-21	0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 1	4	22	37
10-22	0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 2	3	16	38
10-23	0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 8	3	16	39
10-24	0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 1	3	16	38
10-25	0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 2	3	16	39
10-26	0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3	3	16	40
10-27	0, 1, 2, 3, 4, 3, 3, 2, 2	3	24	39
10-28	0, 1, 2, 3, 4, 3, 3, 3, 2	3	16	40
10-29	0, 1, 2, 3, 4, 3, 3, 3, 3	3	20	41
10-30	0, 1, 2, 3, 4, 3, 6, 2, 2	3	24	40
10-31	0, 1, 2, 3, 4, 3, 6, 2, 8	4	36	41
10-32	0, 1, 2, 3, 4, 3, 6, 3, 2	3	24	41
10-33	0, 1, 2, 3, 4, 3, 6, 3, 3	3	24	42
10-34	0, 1, 2, 3, 4, 3, 6, 3, 8	3	24	43
10-35	0, 1, 2, 3, 4, 4, 2, 2, 2	3	16	39
10-36	0, 1, 2, 3, 4, 4, 2, 7, 2	3	26	40
10-37	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1	4	24	39
10-38	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 2	3	18	40
10-39	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 8	3	18	41
10-40	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 3, 1	3	18	40

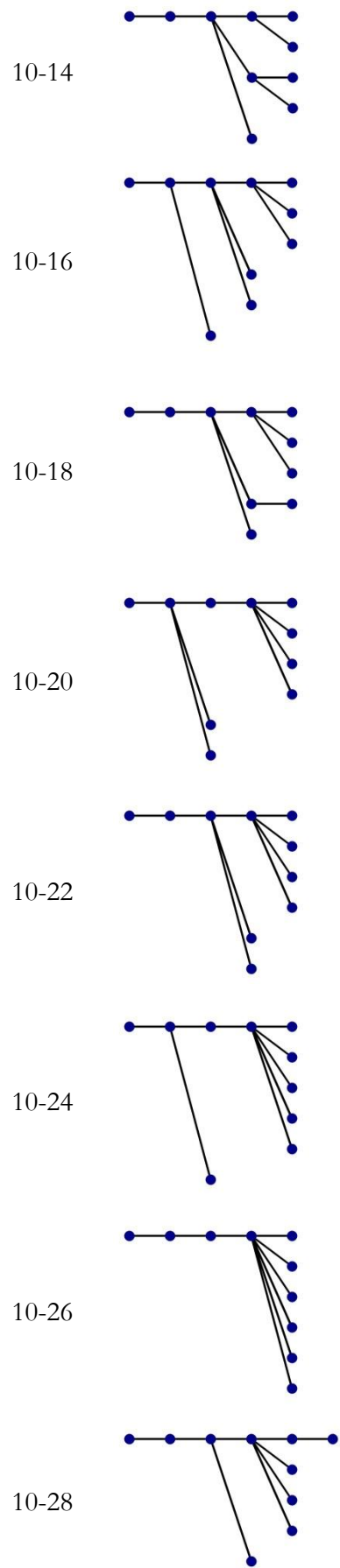
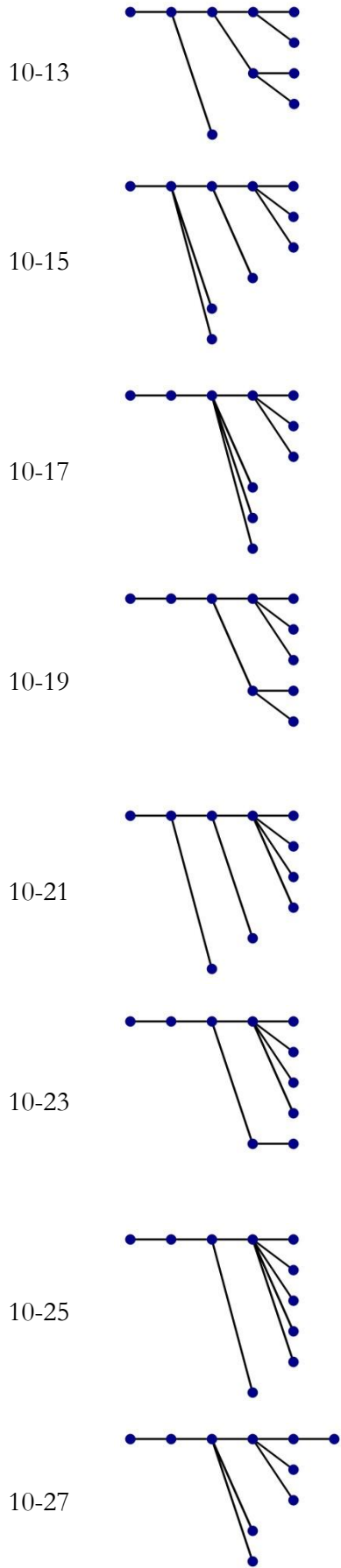
圖編號 Tree Number	圖編碼 Code	組數 Suite	交換能力 Moves	權重 Summation
10-41	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 3, 2	3	18	41
10-42	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 3, 3	3	16	42
10-43	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 7, 1	3	18	41
10-44	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 7, 2	3	18	42
10-45	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 7, 3	2	12	43
10-46	0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 7, 7	2	12	44
10-47	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 1, 1	2	12	39
10-48	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 2, 1	3	18	40
10-49	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 2, 2	3	22	41
10-50	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 2, 8	3	24	42
10-51	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 3, 1	3	18	41
10-52	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 3, 2	3	18	42
10-53	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 3, 3	2	12	43
10-54	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 3, 8	2	12	44
10-55	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 1	3	16	42
10-56	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 2	3	16	43
10-57	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 3	3	16	44
10-58	0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4	3	16	45
10-59	0, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 3, 3	3	30	43
10-60	0, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 7, 3	2	16	44
10-61	0, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 7, 7	3	30	45
10-62	0, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 7, 8	3	32	46
10-63	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2	3	34	43
10-64	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 3	3	36	44
10-65	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 8	3	18	45
10-66	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 4, 2	3	30	44
10-67	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 4, 3	3	30	45
10-68	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 4, 4	2	10	46
10-69	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 7, 2	3	24	45
10-70	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 7, 3	3	34	46
10-71	0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 7, 4	2	16	47
10-72	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 2, 2	3	22	43
10-73	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 2, 8	3	24	44
10-74	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 3, 1	3	18	43

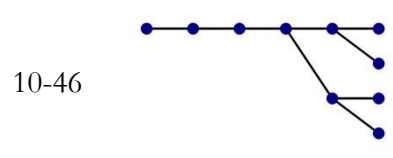
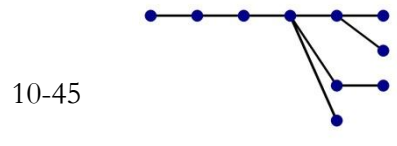
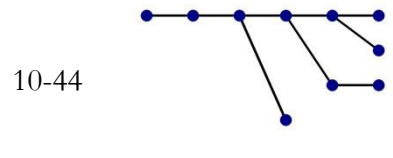
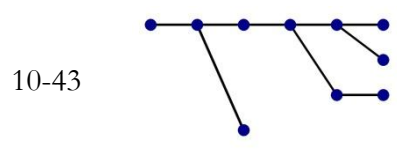
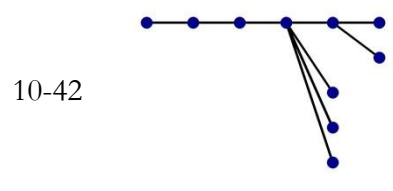
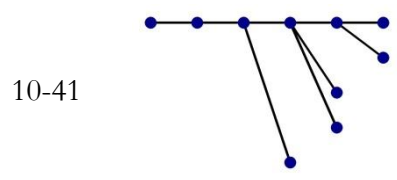
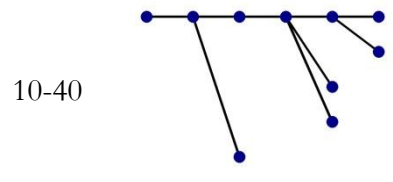
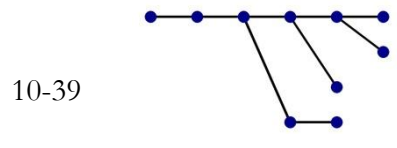
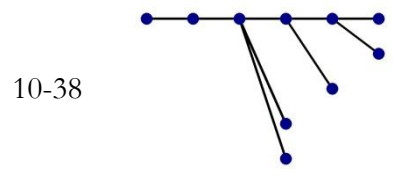
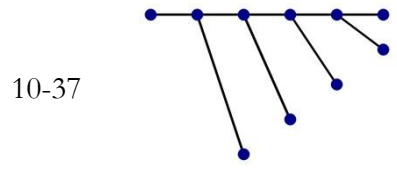
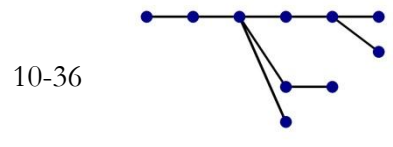
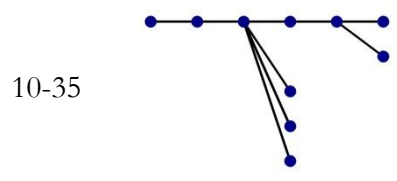
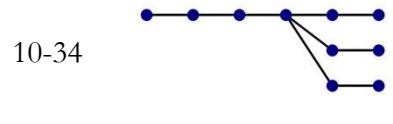
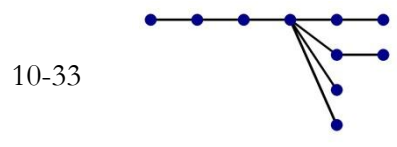
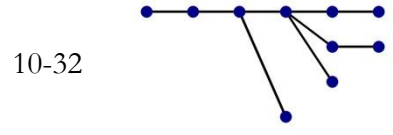
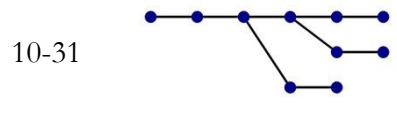
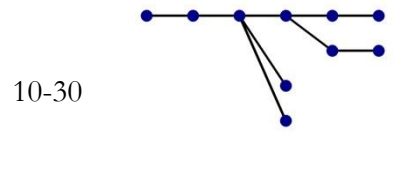
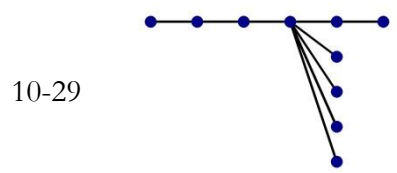
圖編號 Tree Number	圖編碼 Code	組數 Suite	交換能力 Moves	權重 Summation
10-75	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 3, 2	3	18	44
10-76	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 3, 3	3	22	45
10-77	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 3, 8	3	24	46
10-78	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 1	3	18	44
10-79	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 2	3	18	45
10-80	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3	3	18	46
10-81	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 4	2	12	47
10-82	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 8	2	12	48
10-83	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 1	2	12	45
10-84	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 2	2	12	46
10-85	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 3	3	34	47
10-86	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 4	2	12	48
10-87	0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5	2	10	49
10-88	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 3	3	36	47
10-89	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 4	2	16	48
10-90	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 8	2	18	49
10-91	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 2	2	12	47
10-92	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 3	3	36	48
10-93	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4	2	12	49
10-94	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 5	2	16	50
10-95	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 8	2	18	51
10-96	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 1	2	12	47
10-97	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 2	2	12	48
10-98	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 3	3	36	49
10-99	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 4	2	12	50
10-100	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 5	2	12	51
10-101	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6	2	26	52
10-102	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 4	2	26	51
10-103	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 5	2	26	52
10-104	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6	1	6	53
10-105	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7	1	6	54
10-106	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	0	$\infty$	55

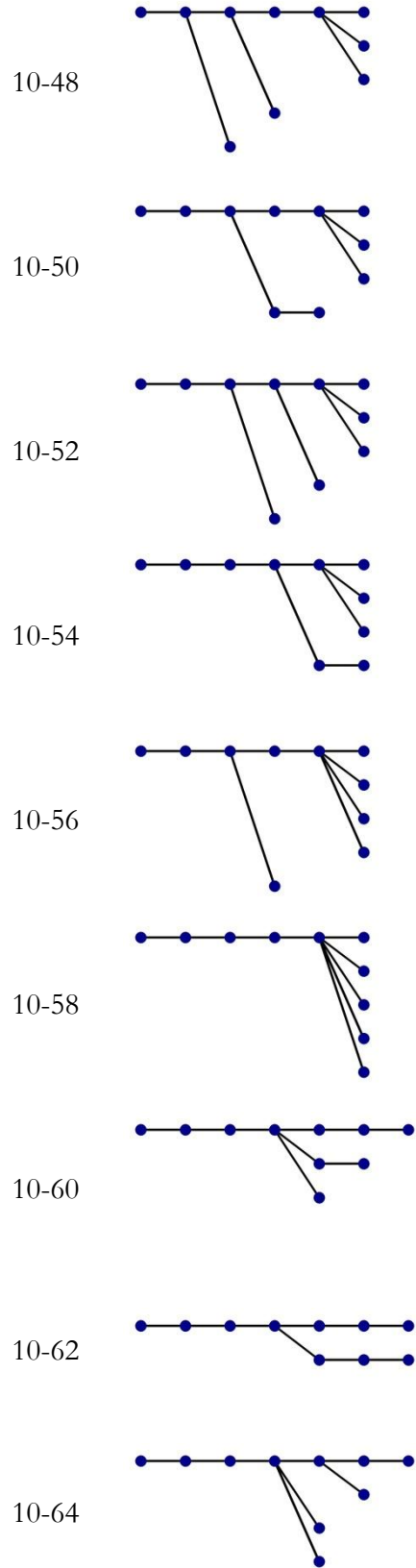
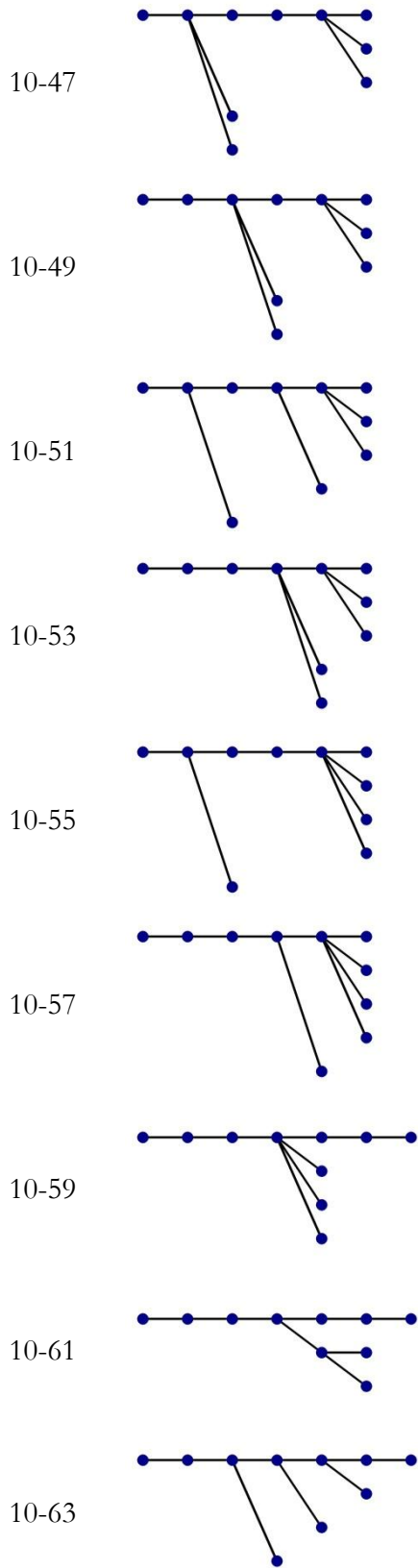
【結果 1】 權重有最大值 $SW_{max}$ 和最小值 $SW_{min}$ 。

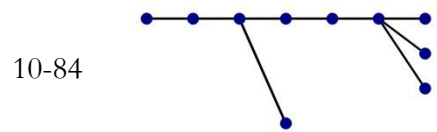
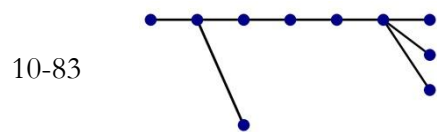
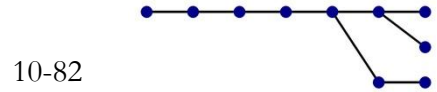
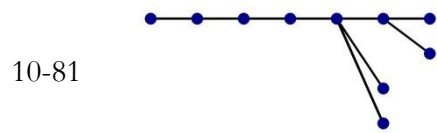
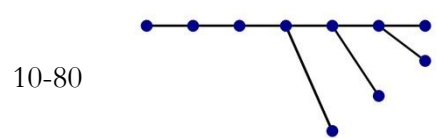
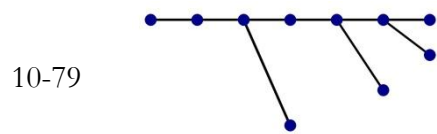
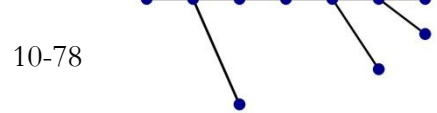
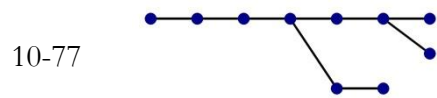
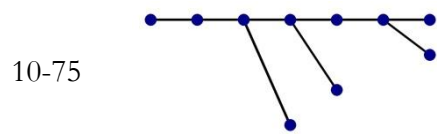
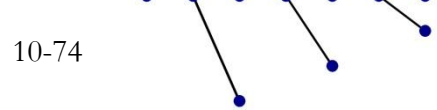
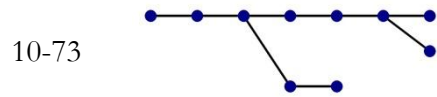
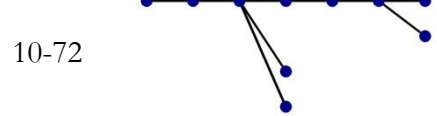
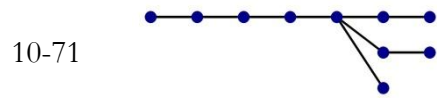
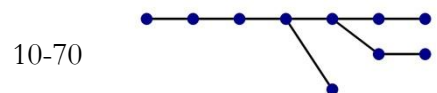
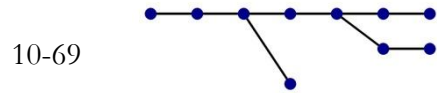
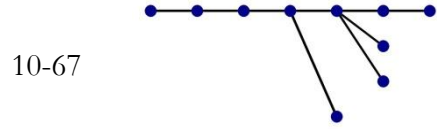
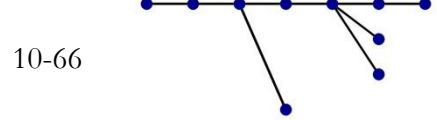
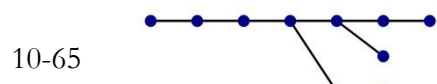


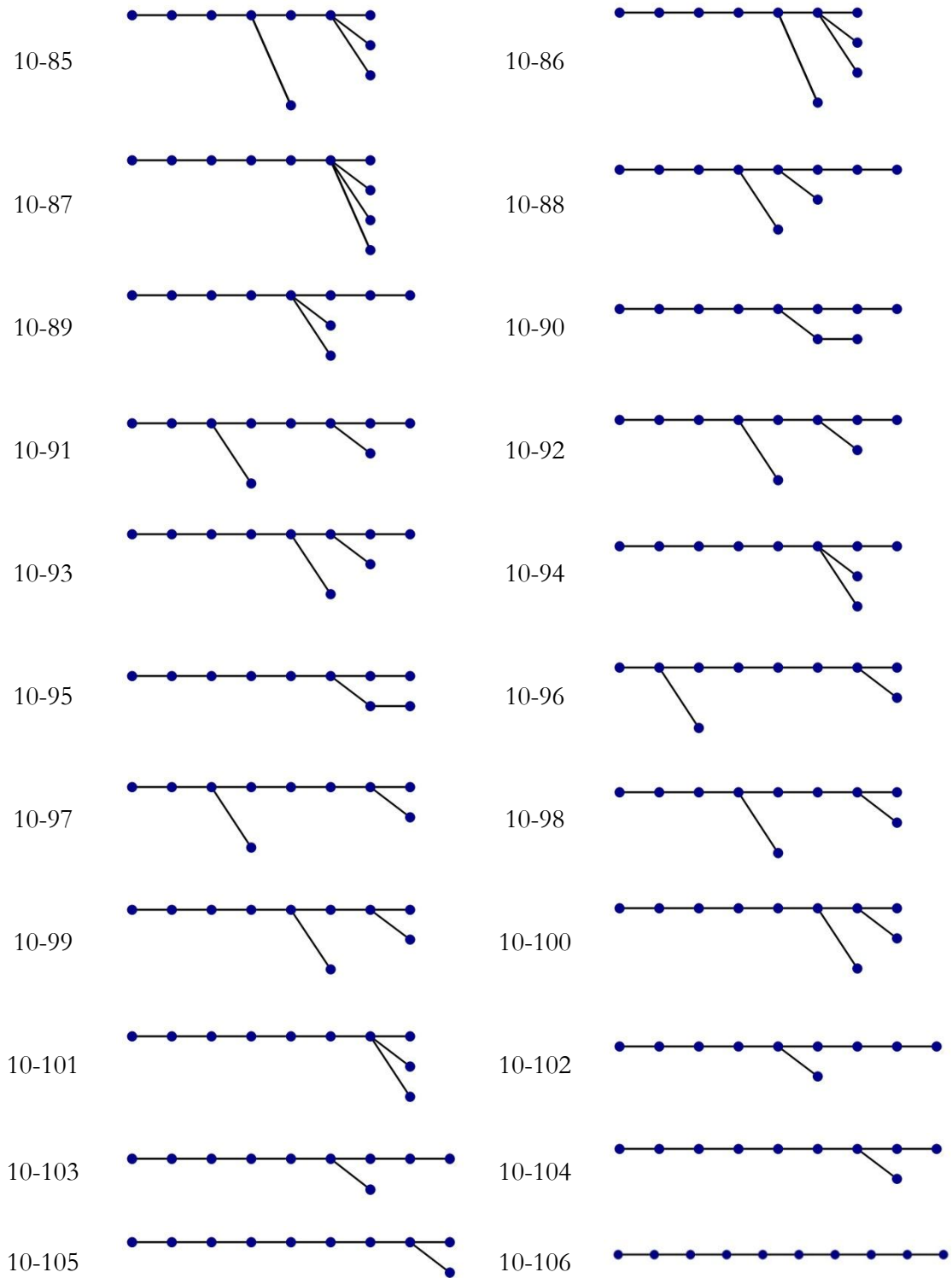












【結果 2】  $f(10) = 106$ ，皆為異構圖。

【說明】以 10 點樹圖為例，當中有一個 10-106，是唯一路徑圖，權重就是 10 點圖中最大的，有分岔僅會增加長輩(ancestor)的權重；換言之，若每次都增加最尾

端的，無分叉的情形，則每增加一個點，權重依序加 1，所以會產生最大值，其最大值可用一般式表示：

$$\begin{aligned}
 SW_{max} &= n + (n - 1) + \dots + 3 + 2 + 1 (\text{原始點權重和}) \\
 &= \frac{n(1 + n)}{2} \\
 &= \frac{n^2 + n}{2}
 \end{aligned}$$

四、可放置最多群數 group 並完成位置交換的可能性

Tree		對數、交換步數和權重的關係			
v=3	SW=6		SW=15		v=6
	pairs	steps	pairs	steps	
	0	$\infty$	2	10	
v=4	SW=9		SW=17		
	pairs	steps	pairs	steps	
	1	6	2	12	
v=5	SW=10		SW=18		
	pairs	steps	pairs	steps	
	0	$\infty$	1	6	
v=5	SW=12		SW=19		
	pairs	steps	pairs	steps	
	1	6	1	6	
v=5	SW=14		SW=20		
	pairs	steps	pairs	steps	
	1	6	1	6	
v=5	SW=15		SW=21		
	pairs	steps	pairs	steps	
	0	$\infty$	0	$\infty$	

Tree		對數、交換步數和權重的關係			
v=7	SW=18		SW=25		
	pairs	steps	pairs	steps	
	2	10	1	6	
	SW=21		SW=26		

Tree

對數、交換步數和權重的關係

pairs	steps	pairs	steps
2	12	1	6
SW=22		SW=27	
pairs	steps	pairs	steps
2	10	1	6
SW=23		SW=28	
pairs	steps	pairs	steps
2	12	0	$\infty$
SW=24			
pairs	steps		
2	12		

Tree

對數、交換步數和權重的關係

v=8

SW=21			
pairs	steps	SW=30	
3	14	pairs	steps
SW=24		2	12
pairs	steps	SW=31	
2	12	pairs	steps
SW=25		2	12
pairs	steps	SW=32	
2	10	pairs	steps
SW=26		2	12
pairs	steps	SW=33	
2	10	pairs	steps
SW=27		1	6
pairs	steps	2	26
2	10	pairs	steps
3	18	1	6
SW=28		SW=35	
pairs	steps	pairs	steps
2	12	1	6
SW=29		SW=36	
pairs	steps	pairs	steps

2	12	0	$\infty$
---	----	---	----------

## 陸、 研究結論

- 一、 $\mathbb{G}(\mathbb{S} \leftrightarrow \mathbb{P})\mathbb{E}$ 是一個協助進行產生樹圖的流程，使所有同構圖都已同一個型態出現，再予以刪除即可。
- 二、群交換在最大組數以及最少步數於直線圖無法完成交換。
- 三、承上，由單點延伸發散出所有的點，則最大組數是 $\lfloor \frac{n}{2} - 1 \rfloor, n \geq 4$ ，交換次數是 $4 \lfloor \frac{n}{2} - 1 \rfloor + 2, n \geq 4$ ，並且該類樹圖交換之次數必為相同點數樹圖中最有效率的解法。
- 四、單中心與雙中心用於區辨分類樹圖之種類和性質。以此得到本研究各點數存在之異構圖及樹圖量。

## 參考文獻

- [ 1 ] 張鎮華(2020)。演算法觀點的圖論。臺北市：台大出版中心出版。
- [ 2 ] 黃楷宸、林子濠等(2020)。Crazy Knights. 中華民國第 60 屆全國科學展覽會數學科作品說明書。
- [ 3 ] A. Cayley. On the Analytical Forms Called Trees. American Journal of Mathematics, 1881, Vol. 4, No. 1 (1881) pp. 266-268. The Johns Hopkins University Press.
- [ 4 ] N. J. A. Sloane and Simon Plouffe, The Encyclopedia of Integer Sequences, Academic Press, 1995 (includes this sequence).
- [ 5 ] P. Leroux et B. Miloudi, (1992). Généralisations de la formule d'Otter (scan) [https://oeis.org/A000081/a000081\\_2.pdf](https://oeis.org/A000081/a000081_2.pdf)