

屏東縣第 62 屆國中小學科學展覽會

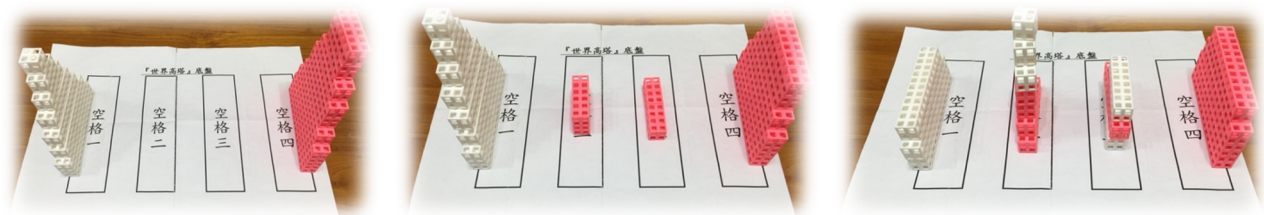
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

關 鍵 詞：世界高塔、河內塔、數列

編號：A1017



雙塔奇謀

摘要

我們從河內塔的相關研究資料和數學遊戲中，找到研究雙塔互相移動的價值，參考近年內的縣內科展作品，進行相關研究探討後，發現數學遊戲書中以及相關研究計算出來的最少移動次數，我們竟然能排出比他們少一些步驟的方式，而且要找出最少移動次數，雙塔各樓層移動次數都是偶數，只有底層是 1 次為原則，數列呈現 $1+2+4+2+4+4+\cdots$ 的型態。

壹、前言

一、研究動機

團隊中的同學曾在三年級時參加營隊接觸到了河內塔，看起來像給小小孩玩的玩具，沒想到弄了一個小時還沒解開。老師上課時也給我們先玩一下，真的我們花了一段時間才解開，接著老師又搬出積木，要我們組裝成三種不一樣的樓房，擺在兩邊，要我們像河內塔一樣移動，從 2 層樓開始，一開始還好，沒想到老師還要求要「最少移動次數」，相關的書雖然有提到數學式子算出來的最少移動次數，可是那也只到 3 層，超過 4 層後，我們更想知道最少的移動次數是多少？怎麼記錄？希望沒有參考答案的我們，能夠找出一些可以提供同好進行高塔移動時的移動步驟作為參考。

二、研究目的

- (一) 從數學遊戲書中，在四格中找出單側高塔移動至另一側的最少一棟次數與移動紀錄。
- (二) 進行雙側兩高塔互相移動，找出移動方式並記錄。
- (三) 由書中提供的數學原理，計算出三種型態高塔兩兩的最少移動次數並且記錄，探討各層的移動次數。

三、文獻回顧

表一 本研究所參考之相關文獻列表

年份	主題	研究目的	研究結果
2010	數學 101~河內塔變身!	探討原河內塔柱數及圈數累加後，最少步數之	Y 代表樓層數，T 為最少移動次數，柱的數量為 4。 當 $1 \leq Y \leq 3$ 時，最少步數為 $T=2Y-1$

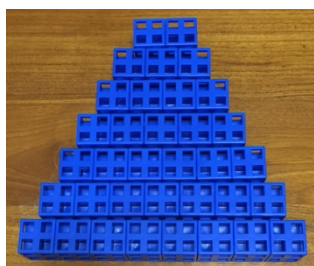
		變化 – 當柱數為 4，圈數遞增時，最少步數是多少?	當 $3 \leq Y \leq 6$ 時，最少步數為 $T=4 \times (Y-2)+1$ 當 $6 \leq Y \leq 10$ 時，最少步數為 $T=4 \times (2Y-8)+1$
2010	n 柱河內塔的策略研究與最佳化通式的尋找	尋找 n 柱河內塔的移動策略	$H_n(m)$ 表示在 n 柱河內塔的遊戲中，將 m 個環從 A_1 柱子移往 A_n 柱子上，當完成遊戲所需的最少步數。文獻上已提 $H_3(m) = 2^m - 1$ 4 柱河內塔的移動策略為先將 x_1 個較小的環移往 A_2 或 A_3 ，再運用其他 3 柱進行移動。最少移動次數的公式如下： $H_4(m) = H_4(x_1) + H_3(m - x_1) + H_4(x_1) = 2 H_4(x_1) + H_3(m - x_1)$
2011	n 柱河內塔的最捷徑建構與通式的尋找	若存在捷徑，是否可推導出 n 柱河內塔遊戲完成移動的最少步數通式?	4 柱 m 環的通式為 $H_4(m) = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 2^2 \times 3 + 2^{\alpha-1} \times \alpha + 2^\alpha \times \beta$ 其中 $m = 1 + 2 + 3 + 4 + \alpha + \beta$, $0 \leq \alpha \leq \beta$ 。
2020	世界高塔	探討四格不規則雙棟移動模式、最少移動次數及規律。	一、四格雙棟大樓交換為上層-下層-堆疊還原層移動模式。 二、最少移動次數呈現遞迴關係， $W(x) = 2T + D = X_k + X_{n-k} + X_k$ 。 三、不規則雙棟搬移採樓高分割可得最少移動次數。
2020	以降柱法破解任意柱數與盤數的河內塔	探討「M 柱 N 盤河內塔最少步數解」的速算技巧	將每一組步數差距(2的指數) × 差距重複次數，並全部累加，就能算出該 M 柱 N 盤的最小步數 Q

貳、研究設備及器材

世界高塔教具、USL 積木、高塔移動記錄表、電腦、試算表軟體



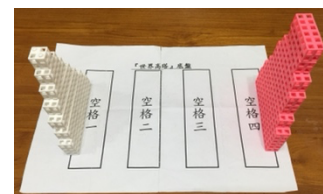
高塔 A



高塔 B



高塔 C



高塔移動教具

參、研究過程

一、遊戲書深究

本研究起源於林碧珍、蔡寶桂（2014）「數學魔術與遊戲設計」一書中，由林淑慧、易庭緯（2014）所設計的世界高塔，原理是河內塔的延伸。它的移動區域為四格，而且以左右兩側的高塔互換為目的。就像河內塔的規則，高塔一次只能移動一個樓層，每一層在移動時，比較寬的樓層不能再比較窄的樓層上方。因為遊戲中的高塔是參考實際的高樓所設計，因此會有相同樓寬的上下樓層出現，讓移動次數的預測和計算具有變化性。

遊戲書中列舉了 1 層 vs. 2 層、2 層 vs. 2 層、1 層 vs. 3 層、3 層 vs. 2 層等方式，但僅限於對陣排好，或是以照片呈現移動的經過，缺乏移動順序的記錄，不容易看出移動的經過，或是藉此檢查多餘步驟來減少移動次數。再來，書中所列舉的 4 種高塔，其中有 2 種是有相同樓寬的上下樓，以及不同的樓層數，其中的 C 高塔，因為太多細高的部分，衡量研究的主要目的，只選擇 A、B、D 三種高塔來做研究。

表二 四種高塔的排列模組

高塔代號	A	B	C	D
最高至最低各樓層積木數量	1 2 3 4 5 6 7 7	2 3 4 5 6 7 8	1 1 2 4 4 4 5 5	3 3 4 5 5 6 7 7 7
	8 層	7 層	8 層	9 層

二、科學展覽說明書探討

經過研討過去科學展覽的相關作品，提供我們本次研究的相關取材如下表所列：

表三 本研究取材的文獻和取材面向

年份	主題	啟發本研究的研究結果論述	我們研究的取材

2010	數學 101~河內塔變身!	Y代表樓層數，T為最少移動次數，柱的數量為4。 當 $1 \leq Y \leq 3$ 時，最少步數為 $T=2Y-1$ 當 $3 \leq Y \leq 6$ 時，最少步數為 $T=4 \times (Y-2)+1$ 當 $6 \leq Y \leq 10$ 時，最少步數為 $T=4 \times (2Y-8)+1$	取用當柱的數量為4時，單一棟高塔移動到另一側的最少移動次數計算方式
2010	n柱河內塔的策略研究與最佳化通式的尋找	$H_n(m)$ 表示在n柱河內塔的遊戲中，將m個環從 A_1 柱子移往 A_n 柱子上，當完成遊戲所需的最少步數。文獻上已提 $H_3(m) = 2^m - 1$ 4柱河內塔的移動策略為先將 x_1 個較小的環移往 A_2 或 A_3 ，再運用其他3柱進行移動。最少移動次數的公式如下： $H_4(m) = H_4(x_1) + H_3(m - x_1) + H_4(x_1)$ $= 2H_4(x_1) + H_3(m - x_1)$	單一棟高塔移動到另一側的最優移動方式，了解邊界條件。
2011	n柱河內塔의 捷徑建構與通式的尋找	4柱m環的通式為 $H_4(m) = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 2^2 \times 3 + 2^{\alpha-1} \times \alpha + 2^\alpha \times \beta$ 其中 $m=1+2+3+4+\alpha+\beta$ ， $0 \leq \alpha \leq \beta$ 。	這裡的環數是1、3、6、10、15、21.....，可參考1、3、6個環
2020	世界高塔	一、四格雙棟大樓交換為上層-下層-堆疊還原層移動模式。 二、最少移動次數呈現遞迴關係， $W(x) = 2T+D=X_k + X_{n-k} + X_k$ 。 三、不規則雙棟搬移採樓高分割可得最少移動次數。	單棟、雙棟大樓移動到另一側時，移動模式的記錄表格。
2020	以降柱法破解任意柱數與盤數的河內塔	將每一組步數差距(2的指數) × 差距重複次數，並全部累加，就能算出該M柱N盤的最小步數Q。	比對2011年全國科展作品—n柱河內塔의 捷徑建構與通式的尋找，推算出4柱時Q的數值。

三、設定研究問題

本研究是雙塔互為移動到另一側的數學遊戲，就第一項所提到本研究所使用的 A、B、D 三種不同的高塔，結合成三種組合，分別為每層樓均不同樓寬（A 與 B），其中一棟有相同樓寬的樓層（A 與 D、B 與 D），因為彼此又還有樓層數的差異－A 是 8 層，B 是 7 層，D 是 9 層，就設定了以下的研究問題：

（一）相同樓層高的雙塔移動方式和最少移動次數的數列關係式是？

分別操作 2 層 vs. 2 層、3 層 vs. 3 層、4 層 vs. 4 層、5 層 vs. 5 層、6 層 vs. 6 層、7 層 vs. 7 層，記錄移動方式以驗證是否符合預期的最少移動次數。

（二）相差一層樓高的雙塔移動方式和最少移動次數的數列關係式是？

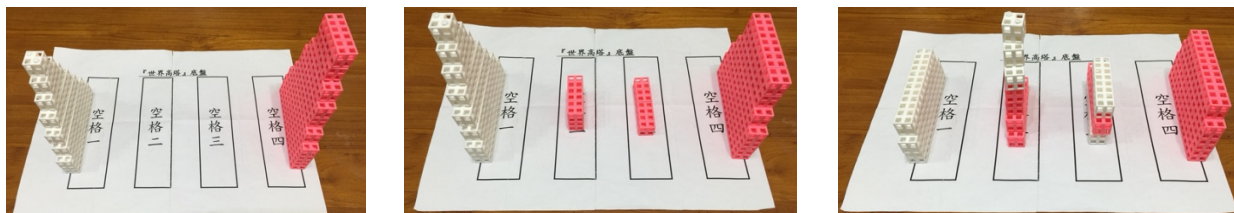
分別操作 2 層 vs. 3 層、3 層 vs. 4 層、4 層 vs. 5 層、5 層 vs. 6 層、6 層 vs. 7 層、7 層 vs. 8 層，記錄移動方式以驗證是否符合預期的最少移動次數。

（三）相差二層樓高的雙塔移動方式和最少移動次數的數列關係式是？

分別操作 2 層 vs. 4 層、3 層 vs. 5 層、4 層 vs. 6 層、5 層 vs. 7 層、6 層 vs. 8 層，記錄移動方式以驗證是否符合預期的最少移動次數。

（四）最高樓的雙塔移動方式和最少移動次數的數列關係式是？

分別操作 A 和 B（8 層 vs. 7 層）、A 和 D（8 層 vs. 9 層）、B 和 D（7 層 vs. 9 層），記錄移動方式以驗證是否符合預期的最少移動次數。



肆、研究結果

一、單棟高塔移動方式記錄與預期最少移動次數之對照

（一）A 棟

8		第一次											
移動次序	A	1	2	3	4	5	6	7	7				
移動次序		一	二	三	四	移動次序	一	二	三	四			
1				A1		16	A5						
2					A2	17	A4						
3			A3			18						A6	
4			A2			19			A4				
5			A1			20						A5	

6			A4		21				A4
7				A5	22			A1	
8				A4	23	A2			
9			A6		24				A3
10	A4				25				A2
11			A5		26				A1
12			A4		27				
13				A7	28				
14				A7	29				
15				A4	30				
樓層	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7		總計
小計	4	4	2	8	4	2	2		26

(二) B棟

7 第一次

B	2	3	4	5	6	7	8					
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四			
1		B2			14				B5			
2				B3	15	B6						
3			B4		16	B5						
4			B3		17				B7			
5			B2		18		B5					
6		B5			19				B6			
7				B6	20				B5			
8				B5	21	B2						
9		B7			22		B3					
10	B5				23				B4			
11		B6			24				B3			
12		B5			25				B2			
13				B8								
樓層	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8		總計			
小計	4	4	2	8	4	2	1		25			

(三) D棟

9 第一次

D	3	3	4	5	5	6	7	7				
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四			

3				A1	10				A2
4		A2			11				A1
5			A3		12	B3			
6			A1		13	B2			
7	B4								
樓層	A1	A2	A3		B2	B3	B4		總計
小計	4	2	2		2	2	1		13

3.4 層 vs. 4 層

第一次

	A	1	2	3	4	B	2	3	4	5	
移動 次序		一		二		三		四			
1				B2							
2						B3					
3						B2					
4				A1							
5						A2					
6						A1					
7				B4							
8								A3			
9				A4							
10				B3							
11		B5									
樓層	A1	A2	A3	A4							
小計	4	2	3	2							

	A	1	2	3	4	B	2	3	4	5	
移動 次序		一		二		三		四			
12		A3									
13								A4			
14								A3			
15		B4									
16				A1							
17								A2			
18								A1			
19				B2							
20		B3									
21		B2									
樓層	B2	B3	B4	B5							總計
小計	4	3	2	1							21

4.5 層 vs. 5 層

從 5 層開始，所記錄到的移動次數遠高於預期值，所以暫時不討論。

(二) A和D

1. 2 層 vs. 2 層

第一次

	A	12	D	33	
移動		一	二	三	四
1				D3	
2			A1		
3				D3	
4					A2
5		D3			

第二次

	A	12	D	33	
移動		一	二	三	四
1			A1		
2				A2	
3		D3			
4		D3			
5					A2

6				A1	6				A1
7	D3				7				
樓層	A1	A2	D3	總計	樓層	A1	A2	D3	總計
小計	2	1	4	7	小計	2	2	2	6

這裡最少移動次數是 6 次，以 D3 直接移動到對向另一側為關鍵，移動關係式為 A 棟高塔 2+2，B 棟 1+1，合計 6 次。

書中所提到最少移動次數是 $2 \times (2+1) + 1 = 7$ ，實際移動比書中算法所提還要精簡移動次數。

2.3 層 vs. 3 層

第一次

A	1 2 3	D	3 3 4	
移動	一	二	三	四
1			D3	
2			D3	
3			A1	
4		D4		
5		A2		
6	A3			
7	A2			
8				D4
9	A1			
10				D3
11				D3
樓層	A1	A2	A3	總計
小計	2	2	1	11
樓層	D3	D4		
小計	4	2		

第二次

A	1 2 3	D	3 3 4	
移動	一	二	三	四
1		D3		
2		D3		
3		A1		
4			D4	
5			A2	
6	A3			
7	A2			
8				D4
9	A1			
10				D3
11				D3
樓層	A1	A2	A3	總計
小計	2	2	1	11
樓層	D3	D4		
小計	4	2		

這裡最少移動次數是 11 次，以 D3、D4 先移出原基地到中間兩格為關鍵，移動關係式為 A 棟高塔 2+2+1，D 棟 2+2+1+1，合計 11 次。

書中所提到最少移動次數是 $3 \times (3+1) + 1 = 13$ ，如果有相同寬度樓層，需要扣掉 2 次，移動方式符合書中算法。

3.4 層 vs. 4 層

第二次

A	1 2 3 4	D	3 3 4 5	
移動	一	二	三	四
1		D3		
11				A4

2		D3			12	D4			
3			D4		13	A1			
4				A1	14			A2	
5			A2		15				A3
6		A3			16				A2
7		A2			17				A1
8		A1			18	D3			
9			A4		19	D3			
10	D5								
樓層	A1	A2	A3	A4	D3	D4	D5		總計
小計	4	4	2	2	4	2	1		19

這裡最少移動次數是 19 次，以 D3、D4 先移出原基地到中間兩格為關鍵，移動關係式為 A 棟高塔 $4+4+2+2$ ，D 棟 $2+2+2+1$ ，合計 19 次。

書中所提到最少移動次數是 $4 \times (4+1) + 1 = 21$ ，如果有相同寬度樓層，需要扣掉 2 次，移動方式符合書中算法。

4.5 層 vs. 5 層

第一次

A	1	2	3	4	5	D	3	3	4	5	5
移動次序	一	二	三	四		移動次序	一	二	三	四	
1			D3			13	D5				
2		A1				14	D4				
3			D3			15	A4				
4				A2		16				A5	
5			A3			17				A4	
6			A2			18		A1			
7				A4		19	A2				
8			A1			20				A3	
9		A5				21				A2	
10		A4				22	D3				
11		D4				23	D3				
12	D5					24				A1	
樓層	A1	A2	A3	A4		A5					總計
小計	4	4	2	4		2					24
樓層	D3	D4	D5								
小計	4	2	2								

這裡最少移動次數是 24 次，移動關係式為 A 棟高塔 $4+4+2+4+2$ ，D 棟 $2+2+2+1+1$ ，合計 24 次。

6.7 層 vs. 7 層

7_7 第二次

A	1 2 3 4 5 6 7	D	3 3 4 5 5 6 7		A	1 2 3 4 5 6 7	D	3 3 4 5 5 6 7		B	2 3 4 5 6 7 8	D	3 3 4 5 5 6 7	
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四
1			D3		19		A3			37			A2	
2			D3		20		D3			38			A1	
3		A1			21		D3			39				A4
4				A2	22		A2			40				D4
5			A3		23		A1			41	D5			
6			A2		24			A7		42	D5			
7			A1		25			A6		43	D4			
8				A4	26			D6		44	A4			
9		A5			27	D7				45				A5
10	A4				28	D6				46				A4
11	D4				29	A6				47	A1			
12		D5			30				A7	48		A2		
13		D5			31				A6	49				A3
14		D4			32				A1	50				A2
15		A4			33	A2				51				A1
16				A6	34			D3		52	D3			
17	A1				35			D3		53	D3			
18				A2	36			A3						
樓層	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7		總計					
小計	8	8	4	6	2	4	2		53					
樓層	D3	D4	D5	D6	D7									
小計	8	4	4	2	1									

這裡最少移動次數是 53 次，移動關係式為 A 棟高塔 8+8+4+6+2+4+2(34)，
D 棟 4+4+4+2+2+2+1(19)，合計 53 次。

書中所提到最少移動次數是 $7 \times (7 + 1) + 1 = 57$ ，如果有相同寬度樓層，需要扣掉 2 次，D 棟有寬度 3 和 5 兩種是有 2 層相同樓寬的樓層，扣掉 4 次是 53 次，移動方式符合書中預期。

(三) B 和 D

1.2 層 vs. 2 層

第一次					第二次				
B	2 3	D	3 3		B	2 3	D	3 3	

移動次序	一	二	三	四	移動次序	一	二	三	四
1			D3		1			B2	
2		B2			2		B3		
3			D3		3	D3			
4				B3	4				B3
5	D3				5	D3			
6				B2	6				B2
7	D3				7				
					8				
	B2	B3	D3	總計		B2	B3	D3	總計
小計	2	1	4	7	小計	2	2	2	6

這裡最少移動次數是 6 次，移動關係式為 B 棟高塔 2+2，D 棟 1+1，合計 6 次。

2. 3 層 vs. 3 層

第一次					第二次				
B	2 3 4	D	3 3 4		B	2 3 4	D	3 3 4	
移動次序	一	二	三	四	移動次序	一	二	三	四
1		D3			1		D3		
2		D3			2		D3		
3			B2		3			D4	
4		B3			4			B2	
5		B2			5		B3		
6			D4		6				B4
7				B4	7				B3
8	D4				8				B2
9	B2				9	D4			
10				B3	10	D3			
11				B2	11	D3			
12	D3				12				
13	D3				13				
樓層	B2	B3	B4	總計		B2	B3	B4	總計
小計	4	2	1	13	小計	2	2	1	11
樓層	D3	D4				D3	D4		
小計	5	3				4	2		

這裡最少移動次數是 6 次，移動關係式為 B 棟高塔 2+2+1，D 棟 2+2+2，合計 11 次。關鍵在於讓 D3、D4 先搶佔中間第二、三格的位置，可以承載 B2、B3 後讓 B4 直接移動到另一側。

3. 4 層 vs. 4 層

第二次

B	2 3 4 5	D	3 3 4 5		B	2 3 4 5	D	3 3 4 5	
移動次序	一	二	三	四	移動次序	一	二	三	四
1		D3			11	D4			
2		D3			12	B4			
3				B2	13				B5
4		B3			14				B4
5		B2			15			B2	
6				B4	16				B3
7			B5		17				B2
8			B4		18	D3			
9			D4		19	D3			
10	D5								
樓層	B2	B3	B4	B5	D3	D4	D5		總計
小計	4	2	4	2	4	2	1		19

這裡最少移動次數是 19 次，以 D3、D4 先移出原基地到中間兩格為關鍵，移動關係式為 B 棟高塔 4+2+4+2，D 棟 2+2+2+1，合計 19 次。

書中所提到最少移動次數是 $4 \times (4 + 1) + 1 = 21$ ，如果有相同寬度樓層，需要扣掉 2 次，移動方式符合書中算法。

4.5 層 vs. 5 層

第二次

B	2 3 4 5 6	D	3 3 4 5 5		B	2 3 4 5 6	D	3 3 4 5 5	
移動次序	一	二	三	四	移動次序	一	二	三	四
1		D3			16	B4			
2		D3			17				B5
3			B2		18				B4
4		B3			19				D4
5		B2			20	D5			
6	D4				21	D5			
7			D5		22	D4			
8			D5		23			B2	
9				D4	24			B3	
10				B4	25			B2	
11			B5		26	D3			
12			B4		27	D3			
13			D4		28				
14				B6	29				

15	D4					30				
樓層	B2	B3	B4	B5		B6				總計
小計	4	2	4	2		1				27
樓層	D3	D4	D5							
小計	4	6	4							

這裡最少移動次數是 24 次，移動關係式為 B 棟高塔 $4+2+4+2+1$ ，D 棟 $2+2+6+2+2$ ，合計 27 次。

書中所提到最少移動次數是 $5 \times (5+1) + 1 = 31$ ，如果有相同寬度樓層，需要扣掉 2 次，D 棟有寬度 3 和 5 兩種是有 2 層相同樓寬的樓層，扣掉 4 次是 27 次，移動方式符合書中所提的算法。

5.6 層 vs. 6 層

6_6 第二次

B	2 3 4 5 6 7	D	3 3 4 5 5 6		B	2 3 4 5 6 7	D	3 3 4 5 5 6		B	2 3 4 5 6 7	D	3 3 4 5 5 6	
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四
1		D3			16		D6			31				B2
2		D3			17				B5	32	D3			
3			B2		18		B6			33	D3			
4		B3			19		B5			34		D4		
5		B2			20				B7	35		D3		
6	D4				21	B5				36		D3		
7			D5		22				B6	37	D5			
8			D5		23				B5	38	D5			
9			D4		24	D6				39		D3		
10			B4		25	B2				40		D3		
11	B2				26		D3			41	D4			
12			B3		27		D3			42	D3			
13			D3		28		B3			43	D3			
14			D3		29				B4	44				
15			B2		30				B3	45				
樓層	B2	B3	B4	B5	B6	B7			總計					
小計	6	4	2	4	2	1			43					
樓層	D3	D4	D5	D6										
小計	14	4	4	2										

這裡最少移動次數是 41 次，移動關係式為 B 棟高塔 $6+4+2+4+2+1(19)$ ，D 棟 $7+7+4+2+2+2(24)$ ，合計 43 次。

書中所提到最少移動次數是 $6 \times (6 + 1) + 1 = 43$ ，如果有相同寬度樓層，需要扣掉 2 次，D 棟有寬度 3 和 5 兩種是有 2 層相同樓寬的樓層，扣掉 4 次是 39 次，移動方式比書中算法還要多了 4 步。懷疑是 D3 走了太多贅步。

6.7 層 vs. 7 層

7_7 第二次

	2 3 4 B 5 6 7 8	D 5 5 6 7	3 3 4 5 5 6 7			2 3 4 B 5 6 7 8	D 5 5 6 7	3 3 4 5 5 6 7			2 3 4 B 5 6 7 8	D 5 5 6 7	3 3 4 5 5 6 7		
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四	
1		D3			18			B2		35		D3			
2		D3			19				B6	36		D3			
3			B2		20		B7			37		B3			
4		B3			21	B6				38		B2			
5		B2			22	D6				39				B4	
6				B4	23		D7			40				D4	
7			B5		24		D6			41	D5				
8	B4				25		B6			42	D5				
9	D4				26				B8	43	D4				
10			D5		27				B6	44	B4				
11			D5		28				D6	45				B5	
12			D4		29	D7				46				B4	
13			B4		30	D6				47			B2		
14				B2	31	B6				48				B3	
15			B3		32				B7	49	D3				
16			D3		33				B6	50	D3				
17			D3		34	B2				51				B2	
樓層	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8		總計						
小計	8	4	6	2	6	2	1		51						
樓層	D3	D4	D5	D6	D7										
小計	8	4	4	4	2										

這裡最少移動次數是 51 次，移動關係式為 B 棟高塔 $8 + 4 + 6 + 2 + 6 + 2 + 1$ (29)，D 棟 $4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 4 + 1$ (22)，合計 51 次。

書中所提到最少移動次數是 $7 \times (7 + 1) + 1 = 57$ ，如果有相同寬度樓層，需要扣掉 2 次，D 棟有寬度 3 和 5 兩種是有 2 層相同樓寬的樓層，扣掉 4 次是 53 次，移動方式比書中預期的還要精簡。

三、雙棟相差一層樓高的高塔移動方式記錄與預期最少移動次數之對照

(一) A和B

所記錄到的移動次數遠高於預期值，所以暫時不討論。

(二) A和D

1. 2層 vs. 3層

2_3 第一次					2_3 第一次				
A	1 2	D	3 3 4		A	1 2	D	3 3 4	
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四
1			D3		1		A1		
2			D3		2			D3	
3		A1			3			D3	
4			A2		4			A2	
5	D4				5	D4			
6				A2	6				A2
7	D3				7				A1
8				A1	8	D3			
9	D3				9	D3			
10					10				
樓層	A1	A2		總計	樓層	A1	D3		總計
小計	2	4		11	小計	2	4		11
樓層	D3	D4			樓層	D3	D4		
小計	4	1			小計	4	1		

2. 3層 vs. 4層

3_4 第一次					3_4 第一次				
A	1 2 3	D	3 3 4 5		A	1 2 3	D	3 3 4 5	
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四
1			D3		11		A1		
2			D3		12	A2			
3		A1			13				A3
4				A2	14				A2
5			A3		15				A1
6			A2		16	D3			
7			A1		17	D3			
8		D4			18				
9	D5				19				
10	D4				20				

樓層	A1	A2	A3	D3	D4	D5			總計
小計	4	4	2	4	2	1			17

3. 4層 vs. 5層

4_5 第二次

A	1 2 3 4	D	3 3 4 5 5		A	1 2 3 4	D	3 3 4 5 5	
移動次序	一	二	三	四	移動次序	一	二	三	四
1			D3		11	D5			
2			D3		12	D4			
3		A1			13				A4
4				A2	14		A1		
5			A3		15	A2			
6			A2		16				A3
7			A1		17				A2
8		A4			18	D3			
9		D4			19	D3			
10	D5				20				A1
樓層	A1	A2	A3	A4	D3	D4	D5		總計
小計	4	4	2	2	4	2	2		20

4. 5層 vs. 6層

5_6 第一次

A	1 2 3 4 5 6	D	3 3 4 5		A	1 2 3 4 5 6	D	3 3 4 5	
移動次序	一	二	三	四	移動次序	一	二	三	四
1			D3		17				A4
2			D3		18				D4
3		A1			19	D5			
4				A2	20	D5			
5			A3		21	D4			
6			A2		22	A4			
7			A1		23				A5
8				A4	24				A4
9		A5			25	A1			
10	A4				26		A2		
11	D4				27				A3
12		D5			28				A2
13		D5			29				A1

14		D4			30	D3			
15		A4			31	D3			
16	D6				32				
樓層	A1	A2	A3	A4	A5	A6			總計
小計	4	4	2	6	2				31
樓層	D3	D4	D5	D6					
小計	4	4	4	1					

(三) B 和 D

1. 2 層 vs. 3 層

2_3 第一次					2_3 第一次				
B	2 3	D	3 3 4		B	2 3	D	3 3 4	
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四
1		D3			1			D3	
2			D3		2			D3	
3		B2			3		B2		
4			B3		4			B3	
5				D4	5				D4
6	B3				6	B3			
7	B2				7	B2			
8				D3	8				D3
9				D3	9				D3
10					10				
樓層	B2	B3		總計	樓層	B2	B3		總計
小計	2	2		9	小計	2	2		9
樓層	D3	D4			樓層	D3	D4		
小計	4	1			小計	4	1		

2. 3 層 vs. 4 層

3_4 第一次				
B	2 3 4	D	3 3 4 5	
移動 次序	一	二	三	四
1		D3		
2		D3		
3			B2	
4		B3		
9	D4			
10				B4
11			B2	
12				B3

5		B2			13	D3			
6			B4		14	D3			
7			D4		15				B2
8	D5								
樓層	B2	B3	B4	D3	D4	D5			總計
小計	4	2	2	4	2	1			15

3. 4層 vs. 5層

4_5 第二次

	B	2 3 4 5	D	3 3 4 5 5		B	2 3 4 5	D	3 3 4 5 5	
移動 次序		一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四
1			D3			11	D5			
2			D3			12	D4			
3					B2	13	B4			
4			B3			14				B5
5			B2			15				B4
6					B4	16	B2			
7				B5		17				B3
8				B4		18				B2
9				D4		19	D3			
10	D5					20	D3			
						21				
樓層	B2	B3	B4	B5		D3	D4	D5		總計
小計	4	2	4	2		4	2	2		20

四、雙棟相差二層樓高的高塔移動方式記錄與預期最少移動次數之對照

(一) A和B

所記錄到的移動次數遠高於預期值，所以暫時不討論。

(二) A和D

1. 1層 vs. 3層

1_3 第一次					1_3 第一次				
A	1	D	3 3 4		A	1	D	3 3 4	
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四

1			D3		1			D3	
2		A1			2			D3	
3			D3		3		D4		
4			A1		4				A1
5	D4				5	D4			
6				A1	6	D3			
7	D3				7	D3			
8	D3				8				
9					9				
10					10				
樓層	A1	D3	D4	總計	樓層	A1	D3	D4	總計
小計	3	4	1	8	小計	1	4	2	7

2. 2層 vs. 4層

2_4 第一次					2_4 第二次				
A	1 2	D	3 3 4 5		A	1 2	D	3 3 4 5	
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四
1		D3			1			D3	
2		D3			2			D3	
3			D4		3		D4		
4		A1			4		A1		
5			A2		5			A2	
6	D5				6	D5			
7				A2	7				A2
8				A1	8				A1
9	D4				9	D4			
10	D3				10	D3			
11	D3				11	D3			
樓層	A1	A2		總計	樓層	A1	A2		總計
小計	2	2		11	小計	2	2		11
樓層	D3	D4	D5		樓層	D3	D4	D5	
小計	4	2	1		小計	4	2	1	

3. 4層 vs. 6層

4_6 第二次				
A	1 2 3 4	D	3 3 4 5 5 6	
移動 次序	一	二	三	四
1				
2				
3				
4				
5				
6				
樓層				
小計				

1			D3		16	D5			
2			D3		17	D5			
3		A1			18	D4			
4				A2	19		A1		
5			A3		20	A2			
6			A2		21				A3
7			A1		22				A2
8	D4				23				A1
9		D5			24	D3			
10		D5			25	D3			
11		D4			26				
12		A4			27				
13	D6				28				
14				A4	29				
15				D4	30				
樓層	A1	A2	A3	A4	D3	D4	D5	D6	總計
小計	4	4	2	2	4	4	4	1	25

4. 5層 vs. 7層

5_7 第一次

A	1 2 3 4 5	D	3 3 4 5 5 6 7		A	1 2 3 4 5 6	D	3 3 4 5 5 6		A	1 2 3 4 5 6	D	3 3 4 5 5 6	
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四
1			D3		17		D3			33		A1		
2			D3		18		A2			34				A2
3		A1			19		A1			35				A1
4				A2	20			D6		36	D3			
5			A3		21			A5		37	D3			
6			A2		22	D7				38			D4	
7			A1		23				A5	39			D3	
8	D4				24	D6				40			D3	
9		D5			25				A1	41	D5			
10		D5			26	A2				42	D5			
11		D4			27			D3		43		D3		
12		A4			28			D3		44		D3		
13	A1				29			A3		45	D4			
14				A2	30	A1				46	D3			

15		A3			31				A4	47	D3			
16		D3			32				A3					
樓層	A1	A2	A3	A4	A5				總計					
小計	8	6	4	2	2				47					
樓層	D3	D4	D5	D6	D7									
小計	14	4	4	2	1									

(三) B 和 D

1. 1 層 vs. 3 層

1_3 第一次					1_3 第二次				
B	2	D	3 3 4		B	2	D	3 3 4	
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四
1		D3			1		D3		
2		D3			2			B2	
3			B2		3		D3		
4	D4				4	D4			
5				B2	5				B2
6	D3				6	D3			
7	D3				7	D3			
樓層	B2	D3	D4	總計	樓層	B2	D3	D4	總計
小計	2	4	1	7	小計	2	4	1	7

2. 2 層 vs. 4 層

2_4 第一次					2_4 第二次				
B	2 3	D	3 3 4 5		B	2 3	D	3 3 4 5	
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四
1			D3		1		B2		
2			D3		2			B3	
3			B2		3			D3	
4		D4			4			D3	
5		B3			5			B2	
6	D5				6		D4		
7				B3	7	D5			
8	D4				8	D4			
9				B2	9		B2		
10	D3				10	D3			
11	D3				11	D3			
12					12			B3	

13					13			B2	
樓層	B2	B3		總計	樓層	B2	B3		總計
小計	2	2		11	小計	4	2		13
樓層	D3	D4	D5		樓層	D3	D4	D5	
小計	4	2	1		小計	4	2	1	

3. 4層 vs. 6層

4_6 第一次

B	2 3 4 5	D	3 3 4 5 5 6		B	2 3 4 5	D	3 3 4 5 5 6	
移動次序	一	二	三	四	移動次序	一	二	三	四
1		D3			16	B4			
2		D3			17				B5
3			B2		18				B4
4		B3			19				D4
5		B2			20	D5			
6	D4				21	D5			
7			D5		22	D4			
8			D5		23			B2	
9				D4	24				B3
10				B4	25	D3			
11			B5		26	D3			
12			B4		27				B2
13			D4		28				
14	D6				29				
15	D4				30				
樓層	B2	B3	B4	B5	B6	B7			總計
小計	4	2	4	2	0	0			27
樓層	D3	D4	D5	D6					
小計	4	6	4	1					

4. 5層 vs. 7層

5_7 第一次

B	2 3 4 5 6	D	3 3 4 5 5 6 7		B	2 3 4 5 6	D	3 3 4 5 5 6 7		B	2 3 4 5 6	D	3 3 4 5 5 6 7	
移動次序	一	二	三	四	移動次序	一	二	三	四	移動次序	一	二	三	四

1			B2		16			D3		31				B5
2		B3			17			B3		32				B4
3		D3			18			B2		33				D4
4		D3			19		B6			34	D5			
5		B2			20		D6			35	D5			
6	D4				21	D7				36	D4			
7			D5		22	D6				37			B2	
8			D5		23			B6		38	D3			
9				D4	24	B2				39	D3			
10				B4	25		B3			40				B3
11			B5		26		D3			41				B2
12			B4		27		D3			42				
13			D4		28		B2			43				
14	B2				29	D4				44				
15			D3		30	B4				45				
樓層	B2	B3	B4	B5	B6	D3	D4	D5	D6	D7				總計
小計	8	4	4	2	2	8	6	4	2	1				41

5. 6層 vs. 8層

6_8 第二次

移動 次序	B		D		移動 次序	B		D		移動 次序	B		D	
	234 567		334 556 77			234 567		334 556 77			234 567		334 556 77	
	一	二	三	四		一	二	三	四		一	二	三	四
1			D3		19	B6				37				D5
2			D3		20			B7		38				D4
3		B2			21			B6		39				B4
4			B3		22			D6		40	B5			
5			B2		23				D7	41	B4			
6	B4				24				D7	42		B2		
7		B5			25				D6	43	B3			
8				B4	26				B6	44				D3
9				D4	27	B7				45				D3
10		D5			28	B6				46	B2			
11		D5			29				B2	47				
12		D4			30			D3		48				
13		B4			31			D3		49				
14				B2	32			B2		50				
15		B3			33			B2		51				

16		D3			34	B4				52				
17		D3			35	D4				53				
18		B2			36				D5	54				
樓層	B2	B3	B4	B5	B6	B7	D3	D4	D5	D6	D7			總計
小計	9	3	6	2	4	2	8	4	4	2	2			46

五、雙棟最高樓的高塔移動方式記錄與預期最少移動次數之對照

(一) A和B (8層 vs. 7層)

8_7 第一次

A	1	2	3	4	5	6	7	7	B	2	3	4	5	6	7	8		移動	一	二	三	四
移動	一	二	三	四	移動	一	二	三	四	移動	一	二	三	四								
1			B2		26		B5			51	A5											
2		B3			27		A5			52	B5											
3				A1	28	A6				53				A7								
4			A2		29	B6				54				A7								
5		A3			30	A5				55		B5										
6		A2			31	B5				56		A5										
7		B2			32		B7			57				A6								
8		A1			33				B5	58				A5								
9			B4		34				A5	59	B5											
10			A4		35		B6			60				A1								
11	A1				36		A6			61	B2											
12				B2	37		A5			62	A2											
13				A2	38		B5			63		B3										
14			A3		39	B8				64		A3										
15			B3		40	B5				65		A1										
16			A2		41	A5				66				A4								
17			B2		42				A6	67			A1									
18			A1		43				B6	68				A3								
19		B5			44				A5	69				A2								
20		A5			45				B5	70				A1								
21				A6	46	B7				71		B2										
22				A5	47		B5			72	B4											
23				B5	48		A5			73			B2									
24		A7			49	B6				74	B3											
25		A7			50	A6				75	B2											
樓層	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A總	總計													
小計	8	6	4	2	12	6	4	42	75													

樓層	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B總					
小計	8	4	2	12	4	2	1	33					

本次移動，發現相同樓層寬的 A3 和 B3、A4 和 B4、A5 和 B5 移動次數相同，而 2 棟高塔的總次數相差 9 步。

(二) A和D (8層 vs. 9層)

8_9 第一次

A					D									
移動次序	一	二	三	四	移動次序	一	二	三	四	移動次序	一	二	三	四
1		D3			21			A2		41		A1		
2		D3			22			A1		42			D4	
3			A1		23				D6	43			A4	
4	A2				24		D7			44	A5			
5		A3			25		D7			45	A4			
6		A2			26		D7			46	D4			
7		A1			27		D6			47				D5
8				D4	28		A6			48				D5
9			D5		29	A7				49				D4
10			D5		30	A6				50				A1
11	D4				31	D6				51			A2	
12	A4				32				D7	52			A1	
13			A5		33				D7	53				D3
14			A4		34				D7	54				D3
15			D4		35				A1	55	A3			
16	A1				36	A2				56		A1		
17				A2	37		A3			57	A2			
18			A3		38		D3			58	A1			
19			D3		39		D3			59				
20			D3		40		A2			60				
樓層	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A總	總計					
小計	10	8	4	4	2	2	1	31	58					
樓層	D3	D4	D5	D6	D7			B總						
小計	8	6	4	3	6			27						

本次移動，2 棟高塔的總次數相差 4 步。樓層數多的 D2 棟移動次數比少 1 層的 A 棟少移動了 4 步。

(三) B和D (7層 vs. 9層)

7_9 第一次

B 2 3 4 5 6 7 8					D 3 3 4 5 5 6 7 7 7									
移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四	移動 次序	一	二	三	四
1		D3			21	B6				41		B3		
2		D3			22	D6				42		B2		
3			B2		23		D7			43	D4			
4		B3			24		D7			44	B4			
5		B2			25		D7			45				B5
6	D4				26		D6			46				B4
7			D5		27		B6			47				D4
8			D5		28				B8	48	D5			
9				D4	29				B6	49	D5			
10				B4	30				D6	50	D4			
11			B5		31	D7				51			B2	
12			B4		32	D7				52				B3
13			D4		33	D7				53	D3			
14				B2	34	D6				54	D3			
15			B3		35	B6				55				B2
16			D3		36				B7	56				
17			D3		37				B6	57				
18			B2		38				B2	58				
19				B6	39		D3			59				
20		B7			40		D3			60				
樓層	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B總	總計					
小計	8	4	4	2	6	2	1	27	55					
樓層	D3	D4	D5	D6	D7			D總						
小計	8	6	4	4	6			28						

本次移動，2棟高塔的總次數相差1步。樓層數多的D2棟移動次數比少2層的B棟多移動了1步。

伍、討論

一、數學魔術書中的數列

其敘述如下：

樓層條件 (n 層)	最少移動次數計算
1.當兩棟樓每層樓的寬度都不一樣	$n \times (n+1) + 1$ 次

2.其中一棟有部分樓層寬度相同	$[n \times (n+1) - m \times 2]$ 次， m 為相同樓層寬的數目
-----------------	--

其中第一點，就會聯想到是 $(1+2+3+4+\dots+n) \times 2 + 1$ ，並且可以猜想成每一層移動的次數如下（由上而下）：

層數序	一	二	三	四	五	六	……	n
移動次數	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$	$n-5$	……	1

其中最底下的第 n 層，其中一棟必須先移動到中間 2 格其中之一，所以必定會成 2 次。然而實際移動後卻呈現如研究結果各點中的數據呈現，舉例如下：

表四 A 和 B 棟移動方式記錄表比較

A	1 2	B	2 3	
	A1	A2	B2	B3
小計	2	2	2	1

A	1 2 3	B	2 3 4	
樓層	A1	A2	A3	
小計	4	2	2	
樓層	B2	B3	B4	總計
小計	2	2	1	13

除了最下層的樓層移動數字可能為 1 是奇數外，其餘看到的都是偶數。所以和原來的聯想假設並不符合。其他最常見到的數列是 $4+4+2+4+2+1$ 。

二、數學魔術書以及前期科展作品與本研究相關數據比較

表四 參考數學魔術書以及前期科展作品中的移動次數的比較

作品	魔術書	世界高塔科展作品	本研究 A 和 B	本研究 B 和 D	本研究 A 和 D
2 層	7	7	7	6	6
3 層	13	13	13	11	11
4 層	21	21	21	19	19
5 層	31	31	無資料	27	24
6 層	43	47	無資料	43	41
7 層	57	63	無資料	51	53

本研究的各項數據，因為 D 棟樓是有 3 種相同樓層寬的高塔，因此部分移動次數的數據一定會比魔術書、前期科展研究作品少，但比較需要減去的數量後，5、6、7 這三層樓的最少移動次數仍是比較少的，在此先大膽推測實際動手做移動的方式，可能找出比經由數學計算後更少的移動次數。

三、由研究結果資料整理出的數列資料

經過資料的檢視，移動次數的數列有以下類型：

(一) 當兩棟樓每層樓的寬度都不一樣

這時會有 $1+2+4+2+4+2$ 的數列出現，並符合 $n \times (n+1) + 1$ 次的方式。

(二) 其中一棟有部分樓層寬度相同

這時也會有 $1+2+4+\dots$ 的數列出現，但是僅出現在樓層寬度都不一樣的 A、B 兩棟。

(三) 不一樣樓層數的移動次數

移動次數	2 vs.2	2 vs.3	2 vs.4		4 vs.4	4 vs.5	4 vs.6
A vs.D	6	11	11		19	20	25
B vs. D	6	9	11		19	20	27

由以上表格中數字可知道，雖然相差 1、2 層樓，但是移動的次數並不會增加太多，就是因為有相同寬度的樓層所影響。

陸、結論

一、雙塔移動時，想要最少移動次數，僅有其中一個高塔的最底部是移動一次

如同研究資料所顯示，要達到最少移動次數，雙塔移動時各塔各樓層的移動次數都是偶數，僅有其中一個高塔的底部樓層是移動一次的，如果有 n 個相同樓寬的底樓，常會出現那個樓層的移動總次數是 $n \times 2$ 。

二、本研究中的移動次數可找出比遊戲書中數學公式運算出來更少的次數

經由資料的比對，我們大膽推測實際動手做移動的方式，可能找出比經由數學計算後更少的移動次數。

三、最少的雙塔移動次數呈現各樓層移動次數的規律數字

經過資料的檢視，移動次數的數列有以下類型：

(一) 當兩棟樓每層樓的寬度都不一樣

這時會有 $1+2+4+2+4+2$ 的數列出現，並符合 $n \times (n+1) + 1$ 次的方式。

(二) 其中一棟有部分樓層寬度相同

這時也會有 $1+2+4+\dots$ 的數列出現，但是僅出現在樓層寬度都不一樣的 A、B 兩棟。

柒、參考資料

- 一、陶佳妤、盧建方、李羚毓、歐陽至宸、王鈺能（2010），數學 101~河內塔變身!。中華民國第 50 屆中小學科學展覽會作品。
- 二、黃祈昌、王文忻、田慈安、陳福誌（2011）， n 柱河內塔的策略研究與最佳化通式的尋找。中華民國第 50 屆中小學科學展覽會作品。
- 三、黃祈昌、趙志嘉、鄭百凱（2011）， n 柱河內塔的捷徑建構與通式的尋找。中華民國第 51 屆中小學科學展覽會作品。
- 四、林淑慧、易庭緯（2014），世界高塔。選自林碧珍、蔡寶桂（2014）數學魔術與遊戲設計，頁 211–227。臺北，五南圖書。
- 五、陳彥程、林威愷、陳麒丰、郭玟言、黃鈺真（2020），以降柱法破解任意柱數與盤數的河內塔。中華民國第 60 屆中小學科學展覽會作品。
- 六、未列作者姓名（2020），世界高塔。屏東縣第 60 屆中小學科學展覽會作品。