屏東縣第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：「飛到西，飛到東」之延伸與研究

關 鍵 詞：速度比、相遇的位置、相遇的單位時間

編　　號：B1001

摘要

本研究自科學研習雙月刊第 61 卷第 1 期中森棚教官的數學專欄「飛到西，飛到東」得到啟發，藉由改變三隻蜜蜂的速度比，整理出首次相遇的位置及單位時間。在計算完原始題目後，我們想再進一步地延伸原始題目，所以我們決定改變研究題目的條件和研究方法，並歸納出三隻蜜蜂以特殊數列為速度比的相遇位置及單位時間之規律並證明。

壹、前言

一、研究動機

去年暑假時，我們到郊外踏青，看見了一片花海，數隻蜜蜂穿梭其中，我們一時興起便追尋著蜜蜂的足跡，無意間就發現了蜂巢。不久，又有數隻蜜蜂依循著相同的路徑再次飛回花朵採蜜。我們發現不同蜜蜂往返的時間不一，有時甚至會同時回到蜂巢，便想繼續探索其中的奧秘，上網搜尋有關蜜蜂飛行速度的主題時發現了以下這個題目，便開啟了我們的研究之旅。

文/游森棚

三隻速度不同的蜜蜂同時從蜂巢出發，在蜂巢與一朵花之間來回等速直線飛行，蜂巢與花的距離為1單位，一旦飛到大花馬上回頭再往蜂巢飛，碰到蜂巢又回頭往大花飛，如此周而復始。只考慮理想的狀態，不考慮加速度等等因素，飛得最慢的蜜蜂從蜂巢到花飛一趟要1分鐘。

Q1. 如果三隻蜜蜂的速度比是1：2：4時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

Q2. 如果三隻蜜蜂的速度比是1：3：9時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

Q3. 如果三隻蜜蜂的速度比是1：3/2：9/4時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

【名詞定義】:

(一)速度比：

在一單位時間內，三隻蜜蜂行的單位數的比，不一定是最簡整數比。

(二)在原點相遇的單位時間：

三隻蜜蜂同時相遇在原點所需的單位時間。

(三)中途相遇的單位和中途相遇的單位時間：

三隻蜜蜂在同時回到原點之前，在非 0 單位或三隻蜜蜂速度相加的單位上相遇，稱為中途相遇的單位，而其相遇的單位時間，即稱為中途相遇的單位時間。

(四)規律：

根據整理及歸納之後，得到三隻蜜蜂在原點或中途相遇的位置及單位時間的規律。

(五)蜂巢和大花：

蜂巢＝原點，大花＝1 單位距離。

二、目的

(一)以原始題目條件解題。

(二)若三隻蜜蜂的速度比是 $1:r:r^2$ $(r\in N)$，求三隻蜜蜂首次相遇的位置及單位時間為何？

(三)若三隻蜜蜂的速度比是 $a:ar:ar^2$ $(a、r\in N)$，求三隻蜜蜂首次相遇的位置及單位時間為何？

(四)若三隻蜜蜂的速度比是 $a:(a+d):(a+2d)$ $(a、d\in N)$，求三隻蜜蜂首次相遇的位置及單位時間為何？

(五)若三隻蜜蜂的速度比是 $a:b:(a+b)$ $(a、b\in N)$，求三隻蜜蜂首次相遇的位置及單位時間為何？

(六)若三隻蜜蜂的速度比是 $a^2:(a+d)^2:(a+2d)^2$ $(a、d\in N)$，求三隻蜜蜂首次相遇的位置及單位時間為何？

三、文獻回顧

我們上網搜尋資料做文獻探討時，找到了一篇和我們研究題目有相關的報

告：

(一)臺南市 111 年度國中學生獨立研究競賽＜小蜜蜂相逢總有時＞。

該作品是尋找和討論二、三和四個質點在單位長內折返跑時相遇的坐標點及其規律，其研究的條件和方法只與我們的目的一相似。後來我們改變題目的條件和方法，並以等比數列、等差數列、費氏數列、盧卡斯數列和等差平方數列為三隻蜜蜂的速度比去做深入研究，最後歸納出三隻蜜蜂以特殊數列為速度比的首次相遇位置及單位時間之規律並證明。

貳、研究設備及器材

電腦、紙、筆。

參、研究過程或方法

【原始題目】：

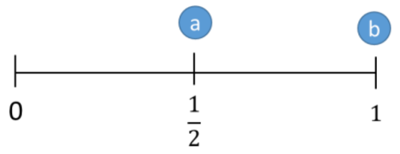
三隻速度不同的蜜蜂同時從蜂巢出發，在蜂巢與一朵花之間來回等速直線飛行，蜂巢與花的距離為 1 單位，一旦飛到大花馬上回頭再往蜂巢飛，碰到蜂巢又回頭往大花飛，如此周而復始。只考慮理想的狀態，不考慮加速度等等因素，飛得最慢的蜜蜂從蜂巢到花飛一趟要 1 分鐘**(本研究不考慮「飛得最慢的蜜蜂從蜂巢到花飛一趟要 1 分鐘」的條件)**。

一、以原始題目條件解題。

剛開始我們先以原始題目條件解題，以下是我們的解題過程：

蜂巢為原點，花為點 1。

(一)若三隻蜜蜂 a、b、c 的速度比是 1：2：4 時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？



設 a 的速度為 v_a；b 的速度為 v_b，經過 $\frac{1}{2}$ 單位時間，a 飛到點 $\frac{1}{2}$，b 飛到點 1，由於 a、b 為相向飛行，為了計算將兩者速度相加，$v_a+v_b=3$，總距離÷總速度＝相遇所需的單位時間，$\frac{1}{2}\div 3=\frac{1}{6}$，得出 a、b 再經過 $\frac{1}{6}$ 單位時間，會在點 $\frac{1}{2}$ 和點 1 之間相遇，相遇所需單位時間為：$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$。再經過 $\frac{2}{3}$ 單位時間，a 飛到點 $\frac{2}{3}$，b 也飛到點 $\frac{2}{3}$。再經過 $\frac{2}{3}$ 單位時間，a 飛到點 0，b 也飛到點 0，接下來開始循環。由此可知，a、b 每經過 $\frac{2}{3}$ 單位時間就會相遇一次，

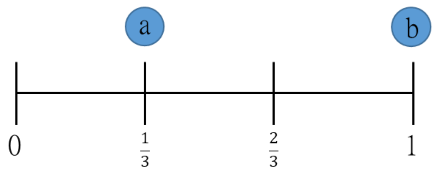
a、b 每次相遇的位置如下：$\frac{2}{3}$、$\frac{2}{3}$、0、$\frac{2}{3}$、$\frac{2}{3}$、0、……，

c 飛 $\frac{2}{3}$ 單位時間的位置如下：$\frac{2}{3}$、$\frac{2}{3}$、0、$\frac{2}{3}$、$\frac{2}{3}$、0、……，

得 a、b、c 每經過 $\frac{2}{3}$ 單位時間就會相遇一次，且相遇位置依序為：

$\frac{2}{3}$、$\frac{2}{3}$、0、$\frac{2}{3}$、$\frac{2}{3}$、0、……。

(二)若三隻蜜蜂 a、b、c 的速度比是 1：3：9 時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？



設 a 的速度為 v_a；b 的速度為 v_b，經過 $\frac{1}{3}$ 單位時間，a 飛到點 $\frac{1}{3}$，b 飛到點 1，由於 a、b 為相向飛行，為了計算將兩者速度相加，$v_a+v_b=4$，總距離÷總速度＝相遇所需的單位時間，$\frac{2}{3}\div 4=\frac{1}{6}$，得出 a、b 再經過 $\frac{1}{6}$ 單位時間，會在點 $\frac{1}{3}$ 和點 1 之間相遇，相遇所需單位時間為：$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$。再經過 $\frac{1}{2}$ 單位

時間，a 飛到點 1，b 也飛到點 1。再經過 $\frac{1}{2}$ 單位時間，a 飛到點 $\frac{1}{2}$，b 也飛到點 $\frac{1}{2}$。再經過 $\frac{1}{2}$ 單位時間，a 飛到點 0，b 也飛到點 0，接下來開始循環。由此可知，a、b 每經過 $\frac{1}{2}$ 單位時間就會相遇一次，

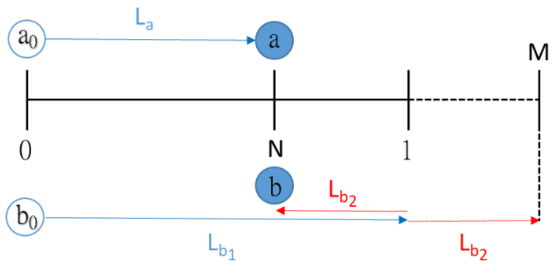
a、b 每次相遇的位置如下：$\frac{1}{2}$、1、$\frac{1}{2}$、0、$\frac{1}{2}$、1、$\frac{1}{2}$、0、……，

c 飛 $\frac{1}{2}$ 單位時間的位置如下：$\frac{1}{2}$、1、$\frac{1}{2}$、0、$\frac{1}{2}$、1、$\frac{1}{2}$、0、……，

得 a、b、c 每經過 $\frac{1}{2}$ 單位時間就會相遇一次，且相遇位置依序為：

$\frac{1}{2}$、1、$\frac{1}{2}$、0、$\frac{1}{2}$、1、$\frac{1}{2}$、0、……。

(三)若三隻蜜蜂的速度比是 $1:\frac{3}{2}:\frac{9}{4}$ 時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？



設 a、b 於 N 相遇時，a 會走 La 的距離，b 會走 $L_{b1}+L_{b2}$ 的距離，若 b 未折返，會飛行至 M，原點到 M 即為 b 飛行的總距離，則 b 飛行的總距離－1＝ L_{b2} ，則 La＋ L_{b2} ＝1。設經過 x 單位時間會第一次相遇，$v_a x+(v_b x-1)=1$ ，$x+\left(\frac{3}{2}x-1\right)=1$ ，$\frac{5}{2}x-1=1$ ，$\frac{5}{2}x=2$ ，得 $x=\frac{4}{5}$ 。繼續計算得出：

a、b 每次相遇的位置如下：$\frac{4}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{4}{5}$、0、$\frac{4}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{4}{5}$、0、……，

由此可知，a、b 每經過 $\frac{4}{5}$ 單位時間就會相遇一次，

c 走 $\frac{4}{5}$ 單位時間的位置如下：$\frac{1}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{4}{5}$、1、$\frac{4}{5}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{1}{5}$、0、……，

得 a、b、c 每經過 $\frac{8}{5}$ 單位時間就會相遇一次，且相遇位置依序為：

$\frac{2}{5}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{2}{5}$、0、$\frac{2}{5}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{2}{5}$、0、……。

(四)綜合以上過程，我們整理出以下表格：

1.當速度比為 1：2：4 時，每經過 $\frac{2}{3}$ 單位時間 a、b、c 會依序於以下位置相遇：$\frac{2}{3}$、$\frac{2}{3}$、0、$\frac{2}{3}$、$\frac{2}{3}$、0、……。

2.當速度比為 **1：3：9**，每經過 $\frac{1}{2}$ 單位時間 a、b、c 會依序於以下位置相遇：$\frac{1}{2}$、1、$\frac{1}{2}$、0、$\frac{1}{2}$、1、$\frac{1}{2}$、0、……。

3.當速度比為 **1**：$\frac{3}{2}$：$\frac{9}{4}$，每經過 $\frac{8}{5}$ 單位時間 a、b、c 會依序於以下位置相遇：$\frac{2}{5}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{2}{5}$、0、$\frac{2}{5}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{2}{5}$、0、……。

並得出以下結果：

【推論 1】：若三隻蜜蜂的速度比是 1：r：r^2($r\in \mathbb{Q}$，$r>1$)，則三隻蜜蜂相遇的位置為 (1) $\frac{2}{1+r}$、…、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、…、$\frac{2}{1+r}$、0、……，其中 k 為滿足 $\frac{2k}{1+r}<1$ 的最大整數。或是 (2) $\frac{2}{1+r}$、…、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、…、$\frac{2}{1+r}$、0、……，其中 k 為滿足 $\frac{2k}{1+r}=1$ 的整數。

【證明 1】：

設 a 的速度為 v_a；b 的速度為 v_b，經過 $\frac{1}{r}$ 單位時間，a 飛到點 $\frac{1}{r}$，b 飛到點 1，由於 a、b 為相向飛行，為了計算將兩者速度相加，$v_a+v_b=1+r$，總距離÷總速度＝相遇所需的單位時間，$(1-\frac{1}{r})\div(1+r)=\frac{r-1}{r(1+r)}$，得出 a、b 再經過 $\frac{r-1}{r(1+r)}$ 單位時間，會在點 $\frac{1}{r}$ 和點 1 之間相遇，相遇所需單位時間為：$\frac{1}{r}+\frac{r-1}{r(1+r)}=\frac{2r}{r(1+r)}=\frac{2}{1+r}$，由此可知，a、b 每經過 $\frac{2}{1+r}$ 單位時間就會相遇一次，

a、b 每次相遇的位置如下：(1) $\frac{2}{1+r}$、…、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、…、$\frac{2}{1+r}$、0、……，或是 (2) $\frac{2}{1+r}$、…、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、…、$\frac{2}{1+r}$、0、……，

c 走 $\frac{2}{1+r}$ 單位時間的位置如下：(1) $\frac{2}{1+r}$、…、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、…、$\frac{2}{1+r}$、0、……，或是 (2) $\frac{2}{1+r}$、…、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、…、$\frac{2}{1+r}$、0、……，

得 a、b、c 每經過 $\frac{2}{1+r}$ 單位時間就會相遇一次，且相遇位置依序為：

(1) $\frac{2}{1+r}$、…、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、…、$\frac{2}{1+r}$、0、……，其中 k 為滿足 $\frac{2k}{1+r}<1$ 的最大整數。或是 (2) $\frac{2}{1+r}$、…、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、…、$\frac{2}{1+r}$、0、……，其中 k 為滿足 $\frac{2k}{1+r}=1$ 的整數。

接著，我們想再進一步的延伸原始題目，所以我們決定改變研究題目的條件和研究方法。

【新訂題目條件】:

當三隻蜜蜂的速度比為 a:b:c (a、b、c ∈ N)時，將出發點到花朵的距離分為 a+b+c 個單位長，三隻蜜蜂在一單位時間所飛行的距離分別為 a、b、c 個單位長，且相遇在整數單位長上。

舉例如下：

當三隻蜜蜂的速度比為 1：2：4 時，將出發點到花朵的距離分為 1+2+4＝7 個單位長，三隻蜜蜂在一單位時間所飛行的距離分別為 1、2、4 個單位長。

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
1	1	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3	2	1	0
2	2	4	6	6	4	2	0	2	4	6	6	4	2	0
4	4	6	2	2	6	4	0	4	6	2	2	6	4	0

二、若三隻蜜蜂的速度比是 1：r：r^2 (r ∈ N)，求三隻蜜蜂相遇的位置及單位

時間為何？

(一)速度比是 1：2：4

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
1	1	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3	2	1	0
2	2	4	6	6	4	2	0	2	4	6	6	4	2	0
4	4	6	2	2	6	4	0	4	6	2	2	6	4	0

(二)速度比是 1：3：9

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
1	1	2	……	11	12	13	12	11	……	2	1	0
3	3	6		7	10	13	10	7		6	3	0
9	9	8		5	4	13	4	5		8	9	0

(三)速度比是 1：4：16

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
1	1	2	…	13	14	15	…	15	14	13	…	2	1	0
4	4	8		10	14	18		18	14	10		8	4	0
16	16	10		2	14	12		12	14	2		10	16	0

(四)速度比是 1：5：25

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
1	1	2	……	29	30	31	30	29	……	2	1	0
5	5	10		21	26	31	26	21		10	5	0
25	25	12		19	6	31	6	19		12	25	0

(五)綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	1：2：4	1：3：9	1：4：16	1：5：25
首次中途相遇的單位	無	13	14	31
首次中途相遇的單位時間	無	13	14	31
首次原點相遇的單位時間	14	26	42	62

三、若三隻蜜蜂的速度比是 a：ar：ar^2 (a、r∈N)，求三隻蜜蜂相遇的位置及單位時間為何？

(一)等比數列(r＝2)

1.速度比是 1：2：4

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
1	1	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3	2	1	0
2	2	4	6	6	4	2	0	2	4	6	6	4	2	0
4	4	6	2	2	6	4	0	4	6	2	2	6	4	0

2.速度比是 2：4：8

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
2	2	4	6	8	10	12	14	12	10	8	6	4	2	0
4	4	8	12	12	8	4	0	4	8	12	12	8	4	0
8	8	12	4	4	12	8	0	8	12	4	4	12	8	0

3.速度比是 4：8：16

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
4	4	8	12	16	20	24	28	24	20	16	12	8	4	0
8	8	16	24	24	16	8	0	8	16	24	24	16	8	0
16	16	24	8	8	24	16	0	16	24	8	8	24	16	0

4.速度比是 8：16：32

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置												相遇點
8	8	16	24	32	40	48	56	48	40	32	24	16	8	0
16	16	32	48	48	32	16	0	16	32	48	48	32	16	0
32	32	48	16	16	48	32	0	32	48	16	16	48	32	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	1：2：4	2：4：8	4：8：16	8：16：32
首次中途相遇的單位	無	無	無	無
首次原點相遇的單位時間	14	14	14	14

(二)等比數列(r＝3)

1.速度比是 1：3：9

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
1	1	2	……	11	12	13	12	11	……	2	1	0
3	3	6		7	10	13	10	7		6	3	0
9	9	8		5	4	13	4	5		8	9	0

2.速度比是 3：9：27

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
3	3	6	……	33	36	39	36	33	……	6	3	0
9	9	18		21	30	39	30	21		18	9	0
27	27	24		15	12	39	12	15		24	27	0

3.速度比是 9：27：81

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
9	9	18	……	99	108	117	108	99	……	18	9	0
27	27	54		63	90	117	90	63		54	27	0
81	81	72		45	36	117	36	45		72	81	0

4.速度比是 27：81：243

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置												相遇點
27	27	54		297	324	351	324	297		54	27	0
81	81	162	……	189	270	351	270	189	……	162	81	0
243	243	216		135	108	351	108	135		216	243	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	1：3：9	3：9：27	9：27：81	27：81：243
首次中途相遇的單位	13	39	117	351
首次中途相遇的單位時間	13	13	13	13
首次原點相遇的單位時間	26	26	26	26

(三)等比數列(r＝4)

1.速度比是 1：4：16

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置												相遇點
1	1	2		13	14	15		15	14	13		2	1	0
4	4	8	…	10	14	18	…	18	14	10	…	8	4	0
16	16	10		2	14	12		12	14	2		10	16	0

2.速度比是 4：16：64

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置														相遇點
4	4	8		52	56	60		60	56	52		8	4	0
16	16	32	…	40	56	72	…	72	56	40	…	32	16	0
64	64	40		8	56	48		48	56	8		40	64	0

3.速度比是 16：64：256

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置														相遇點
16	16	32		208	224	240		240	224	208		32	16	0
64	64	128	…	160	224	288	…	288	224	160	…	128	64	0
256	256	160		32	224	192		192	224	32		160	256	0

4.速度比是 64：256：1024

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置														相遇點
64	64	128	…	832	896	960	…	960	896	832	…	128	64	0

256	256	512		640	896	1152		1152	896	640		512	256	0
1024	1024	640		128	896	768		768	896	128		640	1024	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	1：4：16	4：16：64	16:64:256	64:256:1024
首次中途相遇的單位	14	56	224	896
首次中途相遇的單位時間	14	14	14	14
首次原點相遇的單位時間	42	42	42	42

(四)等比數列(r＝5)

1.速度比是 1：5：25

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
1	1	2	……	29	30	31	30	29	……	2	1	0
5	5	10		21	26	31	26	21		10	5	0
25	25	12		19	6	31	6	19		12	25	0

2.速度比是 5：25：125

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
5	5	10	……	145	150	155	150	145	……	10	5	0
25	25	50		105	130	155	130	105		50	25	0
125	125	60		95	30	155	30	95		60	125	0

3.速度比是 25：125：625

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
25	25	50	……	725	750	775	750	725	……	50	25	0
125	125	250		525	650	775	650	525		250	125	0
625	625	300		475	150	775	150	475		300	625	0

4.速度比是 125：625：3125

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
125	125	250	……	3625	3750	3875	3750	3625	……	250	125	0
625	625	1250		2625	3250	3875	3250	2625		1250	625	0
3125	3125	1500		2375	750	3875	750	2375		1500	3125	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	1：5：25	5：25：125	25：125：625	125：625：3125
首次中途相遇的單位	31	155	775	3875
首次中途相遇的單位時間	31	31	31	31
首次原點相遇的單位時間	62	62	62	62

(五)小結：

綜合(一) ~ (四)數據，我們整理出以下表格：

速度比	a：2a：4a	a：3a：9a	a：4a：16a	a：5a：25a
首次中途相遇的單位	無	13a	14a	31a
首次中途相遇的單位時間	無	13	14	31
首次原點相遇的單位時間	14	26	42	62

並得出以下結果：

【推論 2】：若三隻蜜蜂的速度比是 a：ar：ar^2 (a、r ∈ N)，則其首次在原點相遇的單位時間為 $2(1+r+r^2)$，若設 $a_n=2(1+r+r^2)$，且$n=r-1$，則 a_n滿足遞迴式：$\begin{cases} a_1=14 \\ a_n=a_{n-1}+4(n+1) \end{cases}(n\geq 2)$，其一般式為 $a_n=2(n^2+3n+3)$。

【證明 2】：

(1)當 n＝1，

a_1＝2(1+3+3)＝14，成立。

(2)

①設 n＝k 成立，

$a_k=2(k^2+3k+3)$。

②當 n＝k+1，

$a_{k+1}=a_k+4[(k+1)+1]$

$=2(k^2+3k+3)+4(k+2)$

$=2[(k^2+2k+1)+3(k+1)+3]$

$=2[(k+1)^2+3(k+1)+3]$，成立。

由數學歸納法可知，$\forall n\in N$，$a_n=2(n^2+3n+3)$。

四、若三隻蜜蜂的速度比是 a：(a+d)：(a+2d) (a、d ∈ N)，求三隻蜜蜂首次相遇的位置及單位時間為何？

(一)等差數列(d＝1)

1.速度比為 1：2：3

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
1	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	0
2	2	4	6	4	2	0	2	4	6	4	2	0
3	3	6	3	0	3	6	3	0	3	6	3	0

2.速度比為 2：3：4

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置									相遇點
2	2	4	6	8	……	8	6	4	2	0
3	3	6	9	6		6	9	6	3	0
4	4	8	6	2		2	6	8	4	0

3.速度比為 3：4：5

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置									相遇點
3	3	6	9	12	……	12	9	6	3	0
4	4	8	12	8		8	12	8	4	0
5	5	10	9	4		4	9	10	5	0

4.速度比為 4：5：6

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置									相遇點
4	4	8	12	14	……	14	12	8	4	0
5	5	10	15	10		10	15	10	5	0
6	6	12	12	6		6	12	12	6	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	1：2：3	2：3：4	3：4：5	4：5：6
首次中途相遇的單位	無	無	無	無

首次原點相遇的單位時間	12	18	24	30

(二)等差數列(d＝2)

1.速度比為 1：3：5

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
1	1	2		7	8	9	8	7		2	1	0
3	3	6	……	3	6	9	6	3	……	6	3	0
5	5	8		1	4	9	4	1		8	5	0

2.速度比為 3：5：7

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
3	3	6		9	12	15	12	9		6	3	0
5	5	10	……	5	10	15	10	5	……	10	5	0
7	7	14		1	8	15	8	1		14	7	0

3.速度比為 5：7：9

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
5	5	10		11	16	21	16	11		10	5	0
7	7	14	……	7	14	21	14	7	……	14	7	0
9	9	18		3	12	21	12	3		18	9	0

4.速度比為 7：9：11

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
7	7	14		13	20	27	20	13		14	7	0
9	9	18	……	9	18	27	18	9	……	18	9	0
11	11	22		5	16	27	16	5		22	11	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	1：3：5	3：5：7	5：7：9	7：9：11
首次中途相遇的單位	9	15	21	27
首次中途相遇的單位時間	9	15	21	27
首次原點相遇的單位時間	18	30	42	54

(三)等差數列(d＝3)

1.速度比為 1：4：7

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
1	1	2		7	8	9		9	8	7		2	1	0
4	4	8	…	4	8	12	…	12	8	4	…	8	4	0
7	7	10		1	8	9		9	8	1		10	7	0

2.速度比為 4：7：10

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
4	4	8		10	14	18		18	14	10		8	4	0
7	7	14	…	7	14	21	…	21	14	7	…	14	7	0
10	10	20		4	14	18		18	14	4		20	10	0

3.速度比為 7：10：13

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
7	7	14		13	20	27		27	20	13		14	7	0
10	10	20	…	10	20	30	…	30	20	10	…	20	10	0
13	13	26		7	20	27		27	20	7		26	13	0

4.速度比為 10：13：16

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
10	10	20		16	26	36		36	26	16		20	10	0
13	13	26	…	13	26	39	…	39	26	13	…	26	13	0
16	16	32		10	26	36		36	26	10		32	16	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	1：4：7	4：7：10	7：10：13	10：13：16
首次中途相遇的單位	8	14	20	26
首次中途相遇的單位時間	8	14	20	26
首次原點相遇的單位時間	24	42	60	78

(四)等差數列(d＝4)

1.速度比為 1：5：9

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置	相遇點

1	1	2	……	13	14	15	14	13	……	2	1	0
5	5	10		5	10	15	10	5		10	5	0
9	9	12		3	6	15	6	3		12	9	0

2.速度比為 5：9：13

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
5	5	10	……	17	22	27	22	17	……	10	5	0
9	9	18		9	18	27	18	9		18	9	0
13	13	26		1	14	27	14	1		26	13	0

3.速度比為 9：13：17

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
9	9	18	……	21	30	39	30	21	……	18	9	0
13	13	26		13	26	39	26	13		26	13	0
17	17	34		5	22	39	22	5		34	17	0

4.速度比為 13：17：21

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
13	13	26	……	25	38	51	38	25	……	26	13	0
17	17	34		17	34	51	34	17		34	17	0
21	21	42		9	30	51	30	9		42	21	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	1：5：9	5：9：13	9：13：17	13：17：21
首次中途相遇的單位	15	27	39	51
首次中途相遇的單位時間	15	27	39	51
首次原點相遇的單位時間	30	54	78	102

(五)小結：

綜合(一)～(四)數據，我們整理出以下表格：

速度比	a：(a+1)：(a+2)	a：(a+2)：(a+4)	a：(a+3)：(a+6)	a：(a+4)：(a+8)
首次中途相遇的單位	無	3(a+2)	2(a+3)	3(a+4)
首次中途相遇的單位時間	無	3(a+2)	2(a+3)	3(a+4)

首次原點相遇的單位時間	6(a+1)	6(a+2)	6(a+3)	6(a+4)

並得出以下結果：

【推論 3】：若三隻蜜蜂的速度比是 a：(a+d)：(a+2d)　(a、d∈ N)，則其首次在原點相遇的單位時間為 $2(a+a+d+a+2d)=6(a+d)$，若設 $a_n=6(a+d)$，且 n=d，則 a_n 滿足遞迴式：$\begin{cases} a_1=6a+6 \\ a_n=a_{n-1}+6 \end{cases}(n\geq 2)$，其一般式為 $a_n=6(a+n)$。

【證明 3】：

(1)當 n=1，

$a_1=6(a+1)=6a+6$，成立。

(2)

①設 n=k 成立，

$a_k=6(a+k)$。

②當 n=k+1，

$a_{k+1}=a_k+6$

$=6(a+k)+6$

$=6[a+(k+1)]$，成立。

由數學歸納法可知，$\forall n\in N$，$a_n=6(a+n)$。

五、若三隻蜜蜂的速度比是 a：b：(a+b) (a、b ∈ N)，求三隻蜜蜂相遇的位置及單位時間為何？

(一)費氏數列

1.速度比是 1：1：2

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置							相遇點
1	1	2	3	4	3	2	1	0
1	1	2	3	4	3	2	1	0
2	2	4	2	0	2	4	2	0

2.速度比是 1：2：3

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
1	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	0
2	2	4	6	4	2	0	2	4	6	4	2	0
3	3	6	3	0	3	6	3	0	3	6	3	0

3.速度比是 2：3：5

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置									相遇點
2	2	4	6	8	……	8	6	4	2	0
3	3	6	9	8		8	9	6	3	0
5	5	10	5	0		0	5	10	5	0

4.速度比是 3：5：8

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置									相遇點
3	3	6	9	12	……	12	9	6	3	0
5	5	10	15	12		12	15	10	5	0
8	8	16	8	0		0	8	16	8	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	1：1：2	1：2：3	2：3：5	3：5：8
首次中途相遇的單位	無	無	無	無
首次原點相遇的單位時間	8	12	20	32

(二)盧卡斯數列

1.速度比是 1：3：4

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置									相遇點
1	1	2	3	4	……	4	3	2	1	0
3	3	6	7	4		4	7	6	3	0
4	4	8	4	0		0	4	8	4	0

2.速度比是 3：4：7

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置									相遇點
3	3	6	9	12	……	12	9	6	3	0
4	4	8	12	12		12	12	8	4	0
7	7	14	7	0		0	7	14	7	0

3.速度比是 4：7：11

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置									相遇點
4	4	8	12	16	……	16	12	8	4	0
7	7	14	21	16		16	21	14	7	0
11	11	22	11	0		0	11	22	11	0

4.速度比是 7：11：18

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置									相遇點
7	7	14	21	28	……	28	21	14	7	0
11	11	22	33	28		28	33	22	11	0
18	18	36	18	0		0	18	36	18	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	1：3：4	3：4：7	4：7：11	7：11：18
首次中途相遇的單位	無	無	無	無
首次原點相遇的單位時間	16	28	44	72

(三)小結：

綜合(一)、(二)數據，我們整理出以下表格：

速度比	a：b：(a+b)	b：(a+b)：(a+2b)	(a+b)：(a+2b)：(2a+3b)	(a+2b)：(2a+3b)：(3a+5b)
首次中途相遇的單位	無	無	無	無
首次原點相遇的單位時間	4(a+b)	4(a+2b)	4(2a+3b)	4(3a+5b)

並得出以下結果：

【推論 4】：若三隻蜜蜂的速度比是 a：b：(a+b) (a、b∈ N)，則其首次在原點相遇的單位時間為 $2(a+b+a+b)=4(a+b)$，則 a_n 滿足遞迴式：

$$\begin{cases} a_1=4a+4b，a_2=4a+8b \\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2} \end{cases} (n\geq 3)$$

，其一般式為

$$a_n=\frac{4}{\sqrt{5}}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]a+\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]b\right\}。$$

【證明 4】：

三隻蜜蜂首次在原點相遇的單位時間數列為 4(a+b)、4(a+2b)、4(2a+3b)、4(3a+5b)、……，其中 a、a、2a、3a、……和 b、2b、3b、5b、……皆為費氏數列，根據費氏數列的一般式 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]$，即可得證。

六、若三隻蜜蜂的速度比是 $a^2:(a+d)^2:(a+2d)^2$ （a、d ∈ N），求三隻蜜蜂首次相遇的位置及單位時間為何？

(一)等差平方數列(d＝1)

1.速度比是 $1^2:2^2:3^2$

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置										相遇點
1^2	1	2	……	12	13	14	13	12	……	2	1	0
2^2	4	8		8	4	0	4	8		8	4	0
3^2	9	10		4	5	14	5	4		10	9	0

2.速度比是 $2^2:3^2:4^2$

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
2^2	4	8	……	8	4	0	4	8	……	8	4	0
3^2	9	18		11	20	29	20	11		18	9	0
4^2	16	26		26	16	0	26	16		26	16	0

3.速度比是 $3^2:4^2:5^2$

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
3^2	9	18	……	32	41	50	41	32	……	18	9	0
4^2	16	32		32	16	0	16	32		32	16	0
5^2	25	50		0	25	50	25	0		50	25	0

4.速度比是 $4^2:5^2:6^2$

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
4^2	16	32	……	32	16	0	16	32	……	32	16	0
5^2	25	50		27	52	77	52	27		50	25	0
6^2	36	72		72	36	0	36	72		72	36	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	$1^2:2^2:3^2$	$2^2:3^2:4^2$	$3^2:4^2:5^2$	$4^2:5^2:6^2$

首次中途相遇的單位	無	無	無	無
首次原點相遇的單位時間	28	58	100	154

(二)等差平方數列(d＝2)

1.速度比是 1^2：3^2：5^2

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置										相遇點
1^2	1	2	……	33	34	35	34	33	……	2	1	0
3^2	9	18		17	26	35	26	17		18	9	0
5^2	25	20		15	10	35	10	15		20	25	0

2.速度比是 3^2：5^2：7^2

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
3^2	9	18	……	65	74	83	74	65	……	18	9	0
5^2	25	50		33	58	83	58	33		50	25	0
7^2	49	68		15	34	83	34	15		68	49	0

3.速度比是 5^2：7^2：9^2

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
5^2	25	50	……	105	130	155	130	105	……	50	25	0
7^2	49	98		57	106	155	106	57		98	49	0
9^2	81	148		7	74	155	74	7		148	81	0

4.速度比是 7^2：9^2：11^2

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
7^2	49	98	……	153	202	251	202	153	……	98	49	0
9^2	81	162		89	170	251	170	89		162	81	0
11^2	121	242		9	130	251	130	9		242	121	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	$1^2:3^2:5^2$	$3^2:5^2:7^2$	$5^2:7^2:9^2$	$7^2:9^2:11^2$
首次中途相遇的單位	35	83	155	251
首次中途相遇的單位時間	35	83	155	251
首次原點相遇的單位時間	70	166	310	502

(三)等差平方數列(d＝3)

1.速度比是 1^2：4^2：7^2

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
1^2	1	2	…	43	44	45	…	45	44	43	…	2	1	0
4^2	16	32	…	28	44	60	…	60	44	28	…	32	16	0
7^2	49	34	…	5	44	39	…	39	44	5	…	34	49	0

2.速度比是 4^2：7^2：10^2

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
4^2	16	32	…	94	110	126	…	126	110	94	…	32	16	0
7^2	49	98	…	61	110	159	…	159	110	61	…	98	49	0
10^2	100	130	…	10	110	120	…	120	110	10	…	130	100	0

3.速度比是 7^2：10^2：13^2

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
7^2	49	98	…	163	212	261	…	261	212	163	…	98	49	0
10^2	100	200	…	112	212	312	…	312	212	112	…	200	100	0
13^2	169	298	…	43	212	255	…	255	212	43	…	298	169	0

4.速度比是 10^2：13^2：16^2

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置													相遇點
10^2	100	200	…	250	350	450	…	450	350	250	…	200	100	0
13^2	169	318	…	181	350	519	…	519	350	181	…	318	169	0
16^2	256	512	…	94	350	444	…	444	350	94	…	512	256	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	$1^2:4^2:7^2$	$4^2:7^2:10^2$	$7^2:10^2:13^2$	$10^2:13^2:16^2$
首次中途相遇的單位	44	110	212	350
首次中途相遇的單位時間	44	110	212	350
首次原點相遇的單位時間	132	330	636	1050

(四)等差平方數列(d＝4)

1.速度比是 1^2：5^2：9^2

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
1^2	1	2	……	105	106	107	106	105	……	2	1	0
5^2	25	50		57	82	107	82	57		50	25	0
9^2	81	162		55	26	107	26	55		162	81	0

2.速度比是 $5^2：9^2：13^2$

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
5^2	25	50	……	225	250	275	250	225	……	50	25	0
9^2	81	162		113	194	275	194	113		162	81	0
13^2	169	212		63	106	275	106	63		212	169	0

3.速度比是 $9^2：13^2：17^2$

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
9^2	81	162	……	377	458	539	458	377	……	162	81	0
13^2	169	338		201	370	539	370	201		338	169	0
17^2	289	500		39	250	539	250	39		500	289	0

4.速度比是 $13^2：17^2：21^2$

速度比	每飛行一單位時間所到達的位置											相遇點
13^2	169	338	……	561	730	899	730	561	……	338	169	0
17^2	289	578		321	610	899	610	321		578	289	0
21^2	441	882		17	458	899	458	17		882	441	0

5.綜合以上數據，我們整理出以下表格：

速度比	$1^2：5^2：9^2$	$5^2：9^2：13^2$	$9^2:13^2:17^2$	$13^2:17^2:21^2$
首次中途相遇的單位	107	275	539	899
首次中途相遇的單位時間	107	275	539	899
首次原點相遇的單位時間	214	550	1078	1798

(五)小結：

綜合(一)～(四)數據，我們整理出以下表格：

速度比	$a^2：(a+1)^2：(a+2)^2$	$a^2：(a+2)^2：(a+4)^2$	$a^2：(a+3)^2：(a+6)^2$	$a^2：(a+4)^2：(a+8)^2$

首次中途相遇的單位	無	$3a^2+12a+20$	$2a^2+12a+30$	$3a^2+24a+80$
首次中途相遇的單位時間	無	$3a^2+12a+20$	$2a^2+12a+30$	$3a^2+24a+80$
首次原點相遇的單位時間	$2(3a^2+6a+5)$	$2(3a^2+12a+20)$	$2(3a^2+18a+45)$	$2(3a^2+24a+80)$

並得出以下結果：

【推論 5】：若三隻蜜蜂的速度比是 $a^2:(a+d)^2:(a+2d)^2$ (a、d∈ N)，則其首次在原點相遇的單位時間為 $2[a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2]=2(3a^2+6ad+5d^2)$，若設 $a_n=2(3a^2+6ad+5d^2)$，且 $n=d$，則 a_n 滿足遞迴式：

$$\begin{cases} a_1=2(3a^2+6a+5) \\ a_n=a_{n-1}+12a+10(2n-1) \end{cases} (n\geq 2)$$

，其一般式為 $a_n=2(3a^2+6na+5n^2)$。

【證明 5】：

(1)當 n＝1，

$a_1=2(3a^2+6a+5)$，成立。

(2)

①設 n＝k 成立，

$a_k=2(3a^2+6ka+5k^2)$。

②當 n＝k+1，

$a_{k+1}=a_k+12a+10[2(k+1)-1]$

$=2(3a^2+6ka+5k^2)+12a+10(2k+1)$

$=2(3a^2+6ka+5k^2+6a+10k+5)$

$=2[3a^2+6(k+1)a+5(k+1)^2]$，成立。

由數學歸納法可知，$\forall n\in N$，$a_n=2(3a^2+6na+5n^2)$。

肆、研究結果

(一)以原始題目條件解題。

【推論 1】：若三隻蜜蜂的速度比是 1：r：r^2($r \in Q$，$r>1$)，則三隻蜜蜂相遇的位置為 (1) $\frac{2}{1+r}$、…、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、…、$\frac{2}{1+r}$、0、……，其中 k 為滿足 $\frac{2k}{1+r}<1$ 的最大整數。或是 (2) $\frac{2}{1+r}$、…、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、$\frac{2k}{1+r}$、$\frac{2(k-1)}{1+r}$、…、$\frac{2}{1+r}$、0、……，其中 k 為滿足 $\frac{2k}{1+r}=1$ 的整數。

(二)若三隻蜜蜂的速度比是 1：r：r^2 ($r \in N$)，求三隻蜜蜂首次相遇的位置及單位時間為何？

推論同下。

(三)若三隻蜜蜂的速度比是 a：ar：ar^2 (a、$r \in N$)，求三隻蜜蜂首次相遇的位置及單位時間為何？

【推論 2】：若三隻蜜蜂的速度比是 a：ar：ar^2 (a、$r \in N$)，則其首次在原點相遇的單位時間為 $2(1+r+r^2)$，若設 $a_n=2(1+r+r^2)$，且$n=r-1$，

則a_n滿足遞迴式：$\begin{cases} a_1=14 \\ a_n=a_{n-1}+4(n+1) \end{cases}$ $(n \geq 2)$，其一般式為 $a_n=2(n^2+3n+3)$。

(四)若三隻蜜蜂的速度比是 a：(a+d)：(a+2d) (a、$d \in N$)，求三隻蜜蜂首次相遇的位置及單位時間為何？

【推論 3】：若三隻蜜蜂的速度比是 a：(a+d)：(a+2d) (a、$d \in N$)，則其首次在原點相遇的單位時間為 $2(a+a+d+a+2d)=6(a+d)$，若設 $a_n=6(a+d)$，且 n=d，則 a_n滿足遞迴式：$\begin{cases} a_1=6a+6 \\ a_n=a_{n-1}+6 \end{cases}$ $(n \geq 2)$，

其一般式為 $a_n=6(a+n)$。

(五)若三隻蜜蜂的速度比是 a：b：(a+b) (a、$b \in N$)，求三隻蜜蜂首次相遇的位置及單位時間為何？

【推論 4】：若三隻蜜蜂的速度比是 a：b：(a+b) (a、$b \in N$)，則其首次在原點相遇的單位時間為 $2(a+b+a+b)=4(a+b)$，則 a_n 滿足遞迴式：$\begin{cases} a_1=4a+4b，a_2=4a+8b \\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2} \end{cases}$ $(n \geq 3)$，其一般式為

$$a_n=\frac{4}{\sqrt{5}}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]a+\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]b\right\}。$$

(六)若三隻蜜蜂的速度比是 a^2：$(a+d)^2$：$(a+2d)^2$ (a、d ∈ N)，求三隻蜜蜂首次相遇的位置及單位時間為何？

【推論 5】：若三隻蜜蜂的速度比是 a2：(a+d)2：(a+2d)2 (a、d∈ N)，則其首次在原點相遇的單位時間為 $2[a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2]=2(3a^2+6ad+5d^2)$，若設 $a_n=2(3a^2+6ad+5d^2)$，且$n=d$，則 a_n滿足遞迴式：

$$\begin{cases} a_1=2(3a^2+6a+5) \\ a_n=a_{n-1}+12a+10(2n-1) \end{cases}(n\geq 2)$$

，其一般式為 $a_n=2(3a^2+6na+5n^2)$。

伍、討論

我們目前研究的內容都是以正整數數列為三隻蜜蜂的速度比去做探討，將來會繼續以分數或無理數數列為速度比去研究首次相遇在原點或中途的位置及單位時間，期望能在這方面有更深入的研究進展和突破。

陸、結論

對於「飛到西，飛到東」這個題目，我們一開始就先以原始題目條件去解題，藉由改變三隻蜜蜂的速度比，整理出首次相遇的位置及單位時間。在計算完原始題目後，我們想再進一步地延伸原始題目，所以我們決定改變研究題目的條件和研究方法。接著，我們嘗試以等比數列、等差數列、費氏數列、盧卡斯數列和等差平方數列為三隻蜜蜂的速度比去研究，過程中遇到了很多瓶頸，經過不斷地上網搜尋資料並和老師討論之後，終於皇天不負苦心人，最後我們歸納出三隻蜜蜂首次相遇的位置及單位時間之規律並證明。

柒、參考文獻資料

一、游森棚(2022)・森棚教官的數學題-飛到西，飛到東・科學研習雙月刊，61(1)。

二、台南市德光高中(2022)・小蜜蜂相逢總有時・臺南市 111 年度國中學生獨立研究競賽。