屏東縣第63屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：「奇怪天秤」之延伸與研究

關 鍵 詞：天秤、假幣、最少秤量步數

編　　號：B1002

摘要

本研究參考自科學研習雙月刊第 60 卷第 5 期中森棚教官的數學專欄「奇怪天秤」，內容是研究如何使用一個左臂和右臂長度比例不同的天秤，在一個重量較輕的假幣與不同數量的真幣中，以最少秤量步數找出假幣的方法並證明。

壹、前言

一、研究動機

去年暑假，我們上網搜尋數學報告的資料時，發現在科學研習雙月刊上這篇森棚教官的數學專欄「奇怪天秤」。在初步地研究後，我們發現這篇專欄內容十分有趣，因此在老師的指導下，開始更深入地去做探索和研究。

些小問題都有發展成國小或國中科展的潛力
有發現與探索數學的經驗，一窺數學的美妙。

奇怪天秤

文/游森棚

化學實驗室中有一個奇怪天秤，左臂長度是右臂長度的兩倍，也就是說，左盤的重量剛好為右盤的一半時，天秤會平衡。

1.如果有5個硬幣，已知4個是真幣，另1個是只輕了一點點的假幣，硬幣的外觀都一樣。利用這個天秤最少要幾次，就可以找到假幣？

2.如果有11個硬幣，已知10個是真幣，1個是只重了一點點的假幣，硬幣的外觀都一樣。利用這個天秤最少要幾次，就可以找到假幣？

3.已知假幣只比真幣輕了一點點且只有一個，可以秤四次，請問你最多可以從多少個硬幣中找出這個假幣？

【定義】：設真幣為 T，假幣為 F，且重量 T>F，k 為硬幣數($k \in N$，$k \neq 1$)。

二、目的

(一)若天秤左臂長：右臂長＝1：2，求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

(二)若天秤左臂長：右臂長＝1：3，求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

(三)若天秤左臂長：右臂長＝1：b ($b\in N$，$1<b$，$k\geq 1+b$)，求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

(四)若天秤左臂長：右臂長＝2：3，求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

(五)若天秤左臂長：右臂長＝2：5，求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

(六)若天秤左臂長：右臂長＝2：b ($b\in N$，$2<b$，$(2，b)=1$，$k\geq 2+b$)，求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

(七)若天秤左臂長：右臂長＝a：b ($a、b\in N$，$1<a<b$，$(a，b)=1$，$k\geq a+b$)，求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

三、文獻回顧

(一) 第 47 屆全國中小學科展＜圖窮幣現＞。

此作品是從討論著名的 12 硬幣問題開始，使用等臂天秤從 T 個硬幣中找出 1 個假幣並判斷輕重，進而發想出使用三臂等臂天秤的方式從 T 個硬幣中找出 2 個假幣並判斷輕重，後來還嘗試從 T 個硬幣中找出 k 個假幣並判斷輕重，但是方法不是最理想，因此結果有誤差。我們使用的是一個左臂和右臂長度比例不同的天秤，在一個重量較輕的假幣與不同數量的真幣中，以最少秤量步數找出假幣，所以該作品的天秤和假幣條件與我們不同，研究結果也不相同。

(二) 數學傳播 31 卷 4 期＜假幣問題及其解法＞。

此作品是在討論著名的 12 硬幣問題，作者利用 3 進制－1、0、1 來編號硬幣放在等臂天秤上的位置，並從 12 個硬 幣中找出 1 個假幣並判斷輕重。我們使用的是一個左臂和右臂長度比例不同的天秤，在一個重量較輕的假幣與不同數量的真幣中，以最少秤量步數找出假幣，所以該作品的天秤和假幣條件與我們不同，研究結果也不相同。

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦。

參、研究過程或方法

一、若天秤左臂長：右臂長＝1：2，求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

(一) k＝2 (此處三種情況為 T>2F、T<2F、T＝2F)

1. T>2F

(1)情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	T	F	向左	T>2F，右邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

(2)情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	F	T	向右	F<2T，左邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

2.T<2F

(1)情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	T	F	向右	T<2F，右邊為假幣

(2)情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	F	T	向右	F<2T，左邊為假幣

由於二種情況皆向右傾斜，無法辨識假幣位置，此情況無解。

3.T＝2F

(1)情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	T	F	水平	T＝2F，右邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

(2)情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	F	T	向右	F<2T，左邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝2 時無解。

(二) k＝3

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T	F	向左	2T>2F，右邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	TF	T	向右	TF<2T，從左邊任取一幣與右邊真幣交換
二(1)	TF	T	向右	TF<2T，取的為真幣，剩下的為假幣
二(2)	2T	F	向左	2T>2F，取的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝3 時最少秤量步數為 2 步。

(三) k＝4 (先從中任取 3 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T	F	向左	2T>2F，右邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	TF	T	向右	TF<2T，從左邊任取一幣與右邊真幣交換
二(1)	TF	T	向右	TF<2T，取的為真幣，剩下的為假幣
二(2)	2T	F	向左	2T>2F，取的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

3.情況三

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T	T	水平	2T＝2T，先前未取的為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝4 時最少秤量步數為 2 步。

(四) k＝5 (先從中任取 3 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T	F	向左	2T>2F，右邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	TF	T	向右	TF<2T，先前未取的 2T 放在左邊，從左邊 TF 任取一幣取代右邊真幣
二(1)	2T	T	水平	2T＝2T，剩下的為假幣
二(2)	2T	F	向左	2T>2F，右邊為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

3.情況三

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T	T	水平	2T＝2T，從先前未取的 TF 任取一幣取代右邊真幣
二(1)	2T	T	水平	2T＝2T，剩下的為假幣
二(2)	2T	F	向左	2T>2F，右邊為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝5 時最少秤量步數為 2 步。

(五)結論：

綜合(一) ~ (四)小結，我們得到以下結果：

【性質 1】：設 k 為硬幣數($k \in N$，$k \geq 3$)，f(k)為 k 個硬幣在二臂長為 1：2 的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為：$f(3)= f(4)= f(5)=2$，$f(3n)= f(3n+1)= f(3n+2)= f(2n)+1$ ($n \in N$，$n > 1$)。

【證明 1】：

1. $k=3n$

(1)情況一：天秤倒向左邊，只需秤量$f(n)+1$步即可找出假幣。

$2nT$　　　　　　$(n-1)T+F$

$2nT \quad > \quad 2nT-2T+2F$

(2)情況二： 天秤倒向右邊，只需秤量$f(2n)+1$步即可找出假幣。

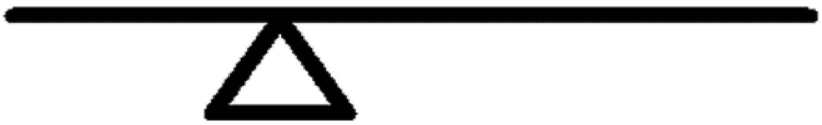
$(2n-1)T+F$　　　　　　nT

$2nT-T+F \quad < \quad 2nT$

小結：由上面的研究過程可知，$f(3n)=f(2n)+1$。

2. $k=3n+1$ (先從中取3n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一： 天秤維持水平，只需秤量 1 步即可找出假幣。



$2nT \quad = \quad 2nT$

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=3n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知，$f(3n+1)=f(2n)+1$。

3. $k=3n+2$ (先從中取3n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一： 天秤維持水平，最少秤量步數為 2 步。

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=3n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知，$f(3n+2)=f(2n)+1$。

綜合以上過程，$f(3n)=f(3n+1)=f(3n+2)=f(2n)+1$ $(n\in N，n>1)$。

並整理出以下關係表格：(可解答位於科學研習雙月刊上的原始問題)

硬幣數	最少秤量步數	首數	首數÷3	說明
3~5	2	3×1	1	
6~8	3	3×2	2	$1\times\frac{3}{2}$無條件進位得2
9~14	4	3×3	3	$2\times\frac{3}{2}$無條件進位得3
15~23	5	3×5	5	$3\times\frac{3}{2}$無條件進位得5
24~35	6	3×8	8	$5\times\frac{3}{2}$無條件進位得8
36~53	7	3×12	12	$8\times\frac{3}{2}$無條件進位得12
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

二、若天秤左臂長：右臂長＝1：3，求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

(一) k＝2 (此處三種情況為 T>3F、T<3F、T＝3F)

1.T>3F

(1)情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	T	F	向左	T>3F，右邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

(2)情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	F	T	向右	F<3T，左邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

2.T<3F

(1)情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	T	F	向右	T<3F，右邊為假幣

(2)情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	F	T	向右	F<3T，左邊為假幣

由於二種情況皆向右傾斜，無法辨識假幣位置，此情況無解。

3.T＝3F

(1)情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	T	F	水平	T＝3F，右邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

(2)情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	F	T	向右	F<3T，左邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k=2 時無解。

(二) k＝3 (此處三種情況為 2T<3F、2T>3F、2T＝3F)

1.2T>3F

(1)情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T	F	向左	2T>3F，右邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

(2)情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	TF	T	向右	TF<3T，從左邊任取一幣與右邊真幣交換
二(1)	TF	T	向右	TF<3T，取的為真幣，剩下的為假幣
二(2)	2T	F	向左	2T>3F，取的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

2.2T<3F

(1)情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T	F	向右	2T<3F，右邊為假幣

(2)情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	TF	T	向右	TF<3T，從左邊任取一幣與右邊真幣交換
二(1)	TF	T	向右	TF<3T，取的為真幣，剩下的為假幣
二(2)	2T	F	向右	2T<3F，取的為假幣

由於二種情況皆向右傾斜，無法辨識假幣位置，此情況無解。

3.2T＝3F

(1)情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T	F	水平	2T＝3F，右邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

(2)情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	TF	T	向右	TF<3T，從左邊任取一幣與右邊真幣交換
二(1)	TF	T	向右	TF<3T，取的為真幣，剩下的為假幣
二(2)	2T	F	向左	2T>3F，取的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝3 時無解。

(三) k＝4

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	F	向左	3T>3F，右邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T F	T	向右	2T F<3T，從左邊任取一幣與右邊真幣交換
二(1)	2T F	T	向右	2T F<3T，取的為真幣，再交換一次
二(2)	3T	F	向左	3T>3F，取的為假幣
三	2T F	T	向右	2T F<3T，取的為真幣，剩下的為假幣

只需秤量 3 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝4 時最少秤量步數為 3 步。

(四) k＝5 (先從中任取 4 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	F	向左	3T>3F，右邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T F	T	向右	2T F<3T，從左邊任取一幣與右邊真幣交換
二(1)	2T F	T	向右	2T F<3T，取的為真幣，再交換一次
二(2)	3T	F	向左	3T>3F，取的為假幣
三	2T F	T	向右	2T F<3T，取的為真幣，剩下的為假幣

只需秤量 3 步即可找出假幣。

3.情況三

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	T	水平	3T＝3T，先前未取的為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝5 時最少秤量步數為 3 步。

(五) k＝6 (先從中任取 4 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	F	向左	3T>3F，右邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T F	T	向右	2T F<3T，從左邊任取一幣與右邊真幣交換
二(1)	2T F	T	向右	2T F<3T，取的為真幣，再交換一次
二(2)	3T	F	向左	3T>3F，取的為假幣
三	2T F	T	向右	2T F<3T，取的為真幣，剩下的為假幣

只需秤量 3 步即可找出假幣。

3.情況三

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	T	水平	3T＝3T，先前未取的 TF 分別取代左右邊各一個真幣
二(1)	3T	F	向左	3T>3F，右邊為假幣
二(2)	2T F	T	向右	2T F<3T，左邊新放的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝6 時最少秤量步數為 3 步。

(六) k＝7 (先從中任取 4 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	F	向左	3T>3F，右邊為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T F	T	向右	2T F<3T，從左邊任取一幣與右邊真幣交換
二(1)	2T F	T	向右	2T F<3T，取的為真幣，再交換一次
二(2)	3T	F	向左	3T>3F，取的為假幣
三	2T F	T	向右	2T F<3T，取的為真幣，剩下的為假幣

只需秤量 3 步即可找出假幣。

3.情況三

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	T	水平	3T＝3T，從先前未取的 2T F 任取兩幣取代左右邊各一個真幣
二(1)	3T	F	向左	3T>3F，右邊為假幣
二(2)	2T F	T	向右	2T F<3T，左邊新放的為假幣

二(3)	3T	T	水平	3T＝3T，取的為真幣，剩下的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝7 時最少秤量步數為 3 步。

(七)結論：

綜合(一) ~ (六)小結，我們得到以下結果：

【性質 2】：設 k 為硬幣數($k \in \mathbf{N}$，$k \geq 4$)，f(k)為 k 個硬幣在二臂長為 1：3 的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為：

$$\mathbf{f(4)= f(5)= f(6)= f(7)=3，f(4n)= f(4n+1)= f(4n+2)=f(4n+3)}$$

$$\mathbf{= f(3n)+1\ (n \in N，n > 1)}$$。

【證明 2】:

1. $k=4n$

(1)情況一：天秤倒向左邊，只需秤量$f(n)+1$步即可找出假幣。

$3nT$ $\qquad$ $(n-1)T+F$

$3nT \quad > \quad 3nT-3T+3F$

(2)情況二： 天秤倒向右邊，只需秤量$f(3n)+1$步即可找出假幣。

$(3n-1)T+F$ $\qquad$ nT

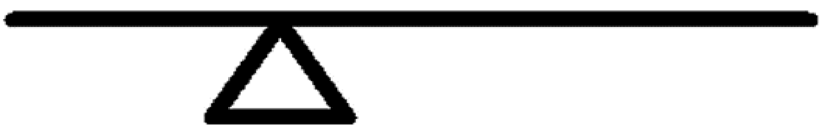
$3nT-T+F \quad < \quad 3nT$

小結：由上面的研究過程可知， $f(4n)=f(3n)+1$。

2. $k=4n+1$ (先從中取 4n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一： 天秤維持水平，只需秤量 1 步即可找出假幣。

$3nT$ $\qquad$ nT



$3nT \qquad = \qquad 3nT$

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=4n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f(4n+1)=f(3n)+1$。

3. $k=4n+2$ (先從中取 4n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一：天秤維持水平，最少秤量步數為 2 步。

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=4n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f(4n+2)=f(3n)+1$。

4. $k=4n+3$ (先從中取 4n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一：天秤維持水平，最少秤量步數為 2 步。

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=4n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f(4n+3)=f(3n)+1$。

綜合以上過程，$f(4n)=f(4n+1)=f(4n+2)=f(4n+3)=f(3n)+1$

$(n \in N，n>1)$。

並整理出以下關係表格：

硬幣數	最少秤量步數	首數	首數÷4	說明
4~7	3	4×1	1	
8~11	4	4×2	2	$1\times\frac{4}{3}$無條件進位得2
12~15	5	4×3	3	$2\times\frac{4}{3}$無條件進位得3
16~23	6	4×4	4	$3\times\frac{4}{3}$無條件進位得4
24~31	7	4×6	6	$4\times\frac{4}{3}$無條件進位得6
32~43	8	4×8	8	$6\times\frac{4}{3}$無條件進位得8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

三、若天秤左臂長：右臂長＝1：b ($b \in N$，$1<b$，$k \geq 1+b$)，求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

(一)首先，我們可以綜合目的一和二的研究過程和結果，推導出下列性質：

【性質 3】：設 k 為硬幣數($k \in N$，$k \geq 1+b$)，$f(k)$為 k 個硬幣在二臂長為 1：b ($b \in N$，$1<b$)的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為：$f(b+1)=f(b+2)=\ldots\ldots=f(2b+1)=b$，$f[(b+1)n]=f[(b+1)n+1]=\ldots\ldots=f[(b+1)n+b]=f(bn)+1$ ($n \in N$，$n>1$)。
【證明 3】：證明過程同證明 1 和 2。

(二) 接著，我們作一數列$\langle r_n\rangle=r_1$、r_2、……、r_n，其中 $r_1=1$，且$r_n=\lceil r_{n-1} \times \frac{b+1}{b} \rceil$，再將$\langle r_n\rangle$中的每一項同乘以$(b+1)$，得另一數列$\langle v_n\rangle=v_1$、$v_2$、……、$v_n$，並整理出以下關係表格：

硬幣數	最少秤量步數	首數	首數÷ (b+1)	說明
$[v_1, v_2-1]$	b	v_1	r_1	
$[v_2, v_3-1]$	$b+1$	v_2	r_2	$\lceil r_1 \times \frac{b+1}{b} \rceil = r_2$
$[v_3, v_4-1]$	$b+2$	v_3	r_3	$\lceil r_2 \times \frac{b+1}{b} \rceil = r_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$[v_{n-1}, v_n-1]$	$b+n-2$	v_{n-1}	r_{n-1}	$\lceil r_{n-2} \times \frac{b+1}{b} \rceil = r_{n-1}$
$[v_n, v_{n+1}-1]$	$b+n-1$	v_n	r_n	$\lceil r_{n-1} \times \frac{b+1}{b} \rceil = r_n$

四、若天秤左臂長：右臂長＝2：3，求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

(一) k＝2、3、4

小結：由於會有情況傾斜皆相同，無法辨識假幣位置，此三種情況無解。

(二) k＝5

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	TF	向左	6T>3T3F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換
二(1)	3T	TF	向左	6T>3T3F，取的為真幣，剩下的為假幣
二(2)	2T F	2T	向右	4T2F<6T，取的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T F	2T	向右	4T2F<6T，從左邊任取一幣與右邊真幣交換
二(1)	2T F	2T	向右	4T2F<6T，取的為真幣，再交換一次
二(2)	3T	TF	向左	6T>3T3F，取的為假幣
三	2T F	T	向右	4T2F<6T，取的為真幣，剩下的為假幣

只需秤量 3 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝5 時最少秤量步數為 3 步。

(三) k＝6 (先從中任取 5 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	2T	水平	6T＝6T，先前未取的為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	TF	向左	6T>3T3F，同 k＝5 情況一

只需秤量 2 步即可找出假幣。

3.情況三

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T F	2T	向右	4T2F<6T，同 k＝5 情況二

只需秤量 3 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝6 時最少秤量步數為 3 步。

(四) k＝7 (先從中任取 5 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	2T	水平	6T＝6T，從先前未取的 TF 任取一幣與左邊真幣交換
二(1)	3T	2T	水平	6T＝6T，取的為真幣，剩下的為假幣
二(2)	2T F	2T	向右	4T2F<6T，取的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	TF	向左	6T>3T3F，同 k＝5 情況一

只需秤量 2 步即可找出假幣。

3.情況三

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T F	2T	向右	4T2F<6T，同 k＝5 情況二

只需秤量 3 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝7 時最少秤量步數為 3 步。

(五) k＝8 (先從中任取 5 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	2T	水平	6T＝6T，從先前未取的 2T F 任取兩幣取代左右邊各一個真幣
二(1)	3T	TF	向左	6T>3T3F，右邊新放的為假幣
二(2)	2T F	2T	向右	4T2F<6T，左邊新放的為假幣
二(3)	3T	2T	水平	6T＝6T，取的為真幣，剩下的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	TF	向左	6T>3T3F，同 k＝5 情況一

只需秤量 2 步即可找出假幣。

3.情況三

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T F	2T	向右	4T2F<6T，同 k＝5 情況二

只需秤量 3 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝8 時最少秤量步數為 3 步。

(六) k＝9 (先從中任取 5 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	2T	水平	6T＝6T，從先前未取的 3T F 任取三幣取代左邊兩個和右邊一個真幣
二(1)	3T	TF	向左	6T>3T3F，右邊新放的為假幣
二(2)	2T F	2T	向右	4T2F<6T， 從左邊新放的 TF 再任取一幣與右邊真幣交換
二(3)	3T	2T	水平	6T＝6T，取的為真幣，剩下的為假幣
三(1)	2T F	2T	向右	4T2F<6T，取的為真幣，剩下的為假幣
三(2)	3T	TF	向左	6T>3T3F，取的為假幣

只需秤量 3 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	3T	TF	向左	6T>3T3F，同 k＝5 情況一

只需秤量 2 步即可找出假幣。

3.情況三

步驟	左	右	傾斜	說明
一	2T F	2T	向右	4T2F<6T，同 k＝5 情況二

只需秤量 3 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝9 時最少秤量步數為 3 步。

(七)結論：

綜合(一) ~ (六)小結，我們得到以下結果：

【性質 4】：設 k 為硬幣數$(k \in N，k \geq 5)$，$f(k)$為 k 個硬幣在二臂長為 2：3 的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為：

$f(5) = f(6) = f(7) = f(8) = f(9) = 3$，$f(5n) = f(5n+1) = f(5n+2) = f(5n+3) = f(5n+4) = f(3n)+1$ $(n \in N，n > 1)$。

【證明 4】：

1. $k = 5n$

(1)情況一：天秤倒向左邊，只需秤量$f(2n)+1$步即可找出假幣。

$3nT$ $(2n-1)T+F$

$6nT$ > $6nT-3T+3F$

(2)情況二： 天秤倒向右邊，只需秤量$f(3n)+1$步即可找出假幣。

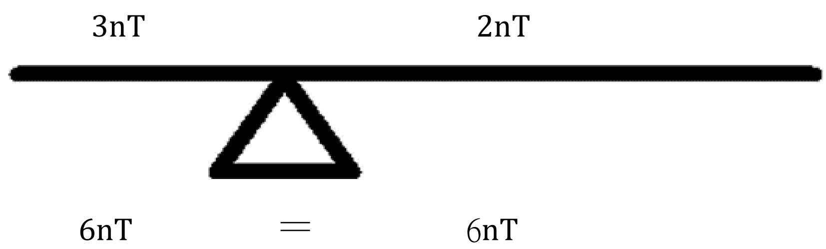
$(3n-1)T+F$ $2nT$

$6nT-2T+2F$ < $6nT$

小結：由上面的研究過程可知，$f(5n)=f(3n)+1$。

2. $k=5n+1$ (先從中取 5n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一： 天秤維持水平，只需秤量 1 步即可找出假幣。



(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=5n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f(5n+1)=f(3n)+1$。

3. $k=5n+2$ (先從中取 5n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一：天秤維持水平，只需秤量 2 步即可找出假幣。

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=5n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f(5n+2)=f(3n)+1$。

4. $k=5n+3$ (先從中取 5n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一：天秤維持水平，只需秤量 2 步即可找出假幣。

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=5n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f(5n+3)=f(3n)+1$。

5. $k=5n+4$ (先從中取 5n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一：天秤維持水平，只需秤量 3 步即可找出假幣。

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=5n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f(5n+4)=f(3n)+1$。

綜合以上過程，$f(5n)=f(5n+1)=f(5n+2)=f(5n+3)=f(5n+4)$

$=f(3n)+1 \quad (n\in N，n>1)$。

並整理出以下關係表格：

硬幣數	最少秤量步數	首數	首數÷5	說明
5~9	3	**5 × 1**	1	
10~19	4	**5 × 2**	2	**$1\times\frac{5}{3}$無條件進位得2**

20~34	5	5×4	4	$2\times\frac{5}{3}$無條件進位得4
35~59	6	5×7	7	$4\times\frac{5}{3}$無條件進位得7
60~99	7	5×12	12	$7\times\frac{5}{3}$無條件進位得12
100~169	8	5×20	20	$12\times\frac{5}{3}$無條件進位得20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

五、若天秤左臂長：右臂長＝2：5，求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

(一) k＝2、3、4、5、6

小結：由於會有情況傾斜皆相同，無法辨識假幣位置，此五種情況無解。

(二) k＝7

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換
二(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，取的為真幣，剩下的為假幣
二(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	4T F	2T	向右	8T2F<10T，從左邊任取兩幣與右邊真幣交換
二(1)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為真幣，從先前未取的 2T F 任取兩幣再交換一次
二(2)	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換，下一步就可以找出假幣
三(1)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為真幣，剩下的為假幣
三(2)	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換
四(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，取的為真幣，剩下的為假幣
四(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為假幣

只需秤量 4 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝7 時最少秤量步數為 4 步。

(三) k＝8(先從中任取 7 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	5T	2T	水平	10T＝10T，先前未取的為假幣

只需秤量 1 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換
二(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，取的為真幣，剩下的為假幣
二(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

3.情況三

步驟	左	右	傾斜	說明
一	4T F	2T	向右	8T2F<10T，從左邊任取兩幣與右邊真幣交換
二(1)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為真幣，從先前未取的 2T F 任取兩幣再交換一次
二(2)	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換，下一步就可以找出假幣
三(1)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為真幣，剩下的為假幣
三(2)	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換
四(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，取的為真幣，剩下的為假幣
四(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為假幣

只需秤量 4 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝8 時最少秤量步數為 4 步。

(四) k＝9(先從中任取 7 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	5T	2T	水平	10T＝10T，從先前未取的 TF 任取一幣與左邊真幣交換
二(1)	5T	2T	水平	10T＝10T，取的為真幣，剩下的為假幣
二(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換
二(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，取的為真幣，剩下的為假幣
二(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

3.情況三

步驟	左	右	傾斜	說明
一	4T F	2T	向右	8T2F<10T，從左邊任取兩幣與右邊真幣交換
二(1)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為真幣，從先前未取的 2T F 任取兩幣再交換一次
二(2)	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換，下一步就可以找出假幣
三(1)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為真幣，剩下的為假幣
三(2)	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換
四(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，取的為真幣，剩下的為假幣
四(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為假幣

只需秤量 4 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝9 時最少秤量步數為 4 步。

(五) k＝10(先從中任取 7 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	5T	2T	水平	10T＝10T，從先前未取的 2T F 任取兩幣取代左右邊各一個真幣
二(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，右邊新放的為假幣
二(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，左邊新放的為假幣
二(3)	5T	2T	水平	10T＝10T，取的為真幣，剩下的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換
二(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，取的為真幣，剩下的為假幣
二(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

3.情況三

步驟	左	右	傾斜	說明
一	4T F	2T	向右	8T2F<10T，從左邊任取兩幣與右邊真幣交換
二(1)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為真幣，從先前未取的 2T F 任取兩幣再交換一次

二(2)	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換，下一步就可以找出假幣
三(1)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為真幣，剩下的為假幣
三(2)	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換
四(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，取的為真幣，剩下的為假幣
四(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為假幣

只需秤量 4 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝10 時最少秤量步數為 4 步。

(六) k＝11(先從中任取 7 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	5T	2T	水平	10T＝10T，從先前未取的 3T F 任取三幣取代左邊兩個和右邊一個真幣
二(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，右邊新放的為假幣
二(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T， 從左邊新放的 TF 再任取一幣與右邊真幣交換
二(3)	5T	2T	水平	10T＝10T，取的為真幣，剩下的為假幣
三(1)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為真幣，剩下的為假幣
三(2)	5T	TF	向左	10T>5T5F，取的為假幣

只需秤量 3 步即可找出假幣。

2.情況二

步驟	左	右	傾斜	說明
一	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換
二(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，取的為真幣，剩下的為假幣
二(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為假幣

只需秤量 2 步即可找出假幣。

3.情況三

步驟	左	右	傾斜	說明
一	4T F	2T	向右	8T2F<10T，從左邊任取兩幣與右邊真幣交換
二(1)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為真幣，從先前未取的 2T F 任取兩幣再交換一次
二(2)	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換，下一步就可以找出假幣
三(1)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為真幣，剩下的為假幣
三(2)	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換
四(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，取的為真幣，剩下的為假幣

四(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為假幣

只需秤量 4 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝11 時最少秤量步數為 4 步。

(七) k＝12(先從中任取 7 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	5T	2T	水平	10T＝10T，從先前未取的 4T F 任取四幣取代左右邊各兩個真幣
二(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換，下一步就可以找出假幣
二(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T， 從左邊新放的 TF 再任取一幣與右邊真幣交換
二(3)	5T	2T	水平	10T＝10T，取的為真幣，剩下的為假幣
三(1)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為真幣，剩下的為假幣
三(2)	5T	TF	向左	10T>5T5F，取的為假幣

只需秤量 3 步即可找出假幣。

2.情況二，同 k＝7 情況一，只需秤量 2 步即可找出假幣。

3.情況三，同 k＝7 情況二，只需秤量 4 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝12 時最少秤量步數為 4 步。

(八) k＝13(先從中任取 7 個硬幣)

1.情況一

步驟	左	右	傾斜	說明
一	5T	2T	水平	10T＝10T，從先前未取的 5T F 任取五幣取代左邊三個和右邊兩個真幣
二(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換，下一步就可以找出假幣
二(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T， 從左邊新放的 2T F 再任取兩幣與右邊真幣交換
二(3)	5T	2T	水平	10T＝10T，取的為真幣，剩下的為假幣
三(1)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為真幣，剩下的為假幣
三(2)	5T	TF	向左	10T>5T5F，從右邊任取一幣與左邊真幣交換
四(1)	5T	TF	向左	10T>5T5F，取的為真幣，剩下的為假幣
四(2)	4T F	2T	向右	8T2F<10T，取的為假幣

只需秤量 4 步即可找出假幣。

2.情況二，同 k＝7 情況一，只需秤量 2 步即可找出假幣。

3.情況三，同 k＝7 情況二，只需秤量 4 步即可找出假幣。

小結：由上面的研究過程可知，k＝13 時最少秤量步數為 4 步。

(九)結論：

綜合(一) ~ (八)小結，我們得到以下結果：

【性質 5】：設 k 為硬幣數($k \in \mathbf{N}$，$k \geq 7$)，f(k)為 k 個硬幣在二臂長為 2：5 的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為：

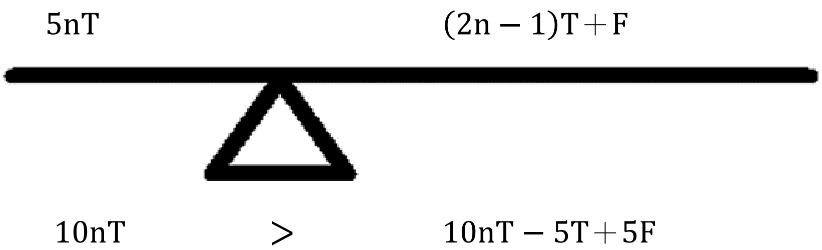
$$\mathbf{f(7)= f(8)= f(9)= f(10)= f(11)= f(12)= f(13)=4，f(7n)= f(7n+1) = f(7n+2)=f(7n+3)=f(7n+4)=f(7n+5)=f(7n+6)= f(5n)+1}$$

($n \in \mathbf{N}$，$n > 1$)。

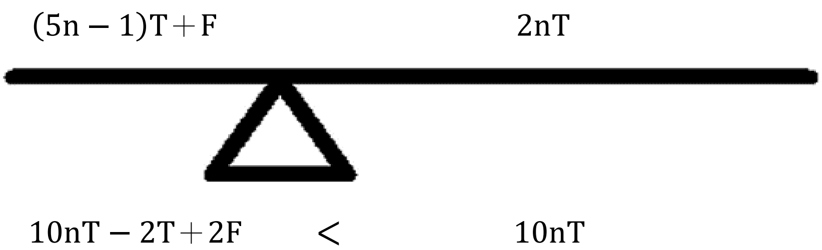
【證明 5】：

1. $k=7n$

(1)情況一：天秤倒向左邊，只需秤量$f(2n)+1$步即可找出假幣。



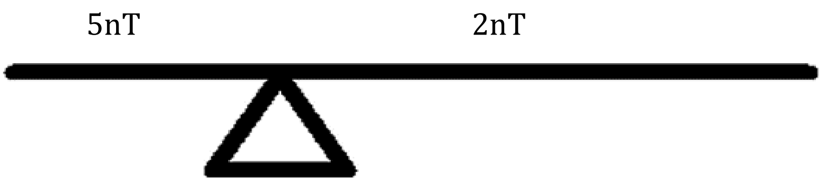
(2)情況二： 天秤倒向右邊，只需秤量$f(5n)+1$步即可找出假幣。



小結：由上面的研究過程可知，$f(7n)=f(5n)+1$。

2. $k=7n+1$ (先從中取$7n$個硬幣放在天秤上)

(1)情況一： 天秤維持水平，只需秤量 1 步即可找出假幣。



10nT = 10nT

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=7n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f(7n+1)=f(5n)+1$。

3. $k=7n+2$ (先從中取7n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一：天秤維持水平，只需秤量 2 步即可找出假幣。

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=7n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f(7n+2)=f(5n)+1$。

4. $k=7n+3$ (先從中取7n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一：天秤維持水平，只需秤量 2 步即可找出假幣。

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=7n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f(7n+3)=f(5n)+1$。

5. $k=7n+4$ (先從中取7n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一：天秤維持水平，只需秤量 3 步即可找出假幣。

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=7n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f(7n+4)=f(5n)+1$。

6. $k=7n+5$ (先從中取7n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一：天秤維持水平，只需秤量 3 步即可找出假幣。

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=7n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f(7n+5)=f(5n)+1$。

7. $k=7n+6$ (先從中取7n個硬幣放在天秤上)

(1)情況一：天秤維持水平，只需秤量 4 步即可找出假幣。

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=7n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f(7n+6)=f(5n)+1$。

綜合以上過程，$f(7n)=f(7n+1)=f(7n+2)=f(7n+3)=f(7n+4)$
$=f(7n+5)=f(7n+6)=f(5n)+1$ ($n\in N$，$n>1$)。

並整理出以下關係表格：

硬幣數	最少秤量步數	首數	首數÷7	說明

7~13	4	7×1	1	
14~20	5	7×2	2	$1\times\frac{7}{5}$無條件進位得2
21~34	6	7×3	3	$2\times\frac{7}{5}$無條件進位得3
35~48	7	7×5	5	$3\times\frac{7}{5}$無條件進位得5
49~69	8	7×7	7	$5\times\frac{7}{5}$無條件進位得7
70~97	9	7×10	10	$7\times\frac{7}{5}$無條件進位得10
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

六、若天秤左臂長：右臂長＝2：b ($b\in N$，$2<b$，$(2，b)=1$，$k\geq2+b$)，

求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

(一)首先，我們可以綜合目的四和五的研究過程和結果，推導出下列性質：

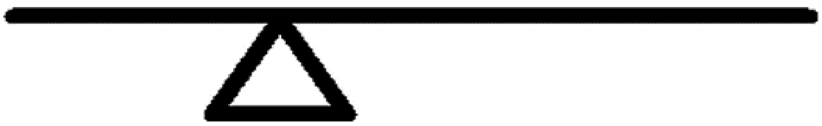
【性質 6】：設 k 為硬幣數($k\in N$，$k\geq2+b$)，$f(k)$為 k 個硬幣在二臂長為 2：b ($b\in N$，$2<b$，$(2，b)=1$)的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為：$f(b+2)=f(b+3)=\ldots\ldots=f(2b+3)=\frac{b+3}{2}$，$f[(b+2)n]=f[(b+2)n+1]=\ldots\ldots=f[(b+2)n+b+1]=f(bn)+1$ ($n\in N$，$n>1$)。

【證明 6】：

1. $k=b+2$

(1)情況一：天秤倒向左邊，只需秤量 2 步即可找出假幣。

bT TF



2bT > bT＋bF

(2)情況二： 天秤倒向右邊，將左臂上的硬幣兩兩分組，依序和右臂上的 2T 交換，由於$(2，b)=1$，b 為奇數，只需秤量$1+\frac{b-1}{2}+1=\frac{b+3}{2}$步即可找出假幣。

$(b-1)T+F$ 2T

$2bT-2T+2F \quad < \quad 2bT$

小結：由上面的研究過程可知，$f(b+2)=\frac{b+3}{2}$。

2.後面證明過程同證明 4 和 5。

(二) 接著，我們作一數列$\langle r_n\rangle = r_1$、r_2、……、r_n，其中 $r_1=1$，且$r_n=\lceil r_{n-1}\times\frac{b+2}{b}\rceil$，再將$\langle r_n\rangle$中的每一項同乘以$(b+2)$，得另一數列$\langle v_n\rangle=v_1$、$v_2$、……、$v_n$，並整理出以下關係表格：

硬幣數	最少秤量步數	首數	首數÷ (b+2)	說明
$[v_1, v_2-1]$	$\frac{b+3}{2}$	v_1	r_1	
$[v_2, v_3-1]$	$\frac{b+3}{2}+1$	v_2	r_2	$\lceil r_1\times\frac{b+2}{b}\rceil=r_2$
$[v_3, v_4-1]$	$\frac{b+3}{2}+2$	v_3	r_3	$\lceil r_2\times\frac{b+2}{b}\rceil=r_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$[v_{n-1}, v_n-1]$	$\frac{b+3}{2}+n-2$	v_{n-1}	r_{n-1}	$\lceil r_{n-2}\times\frac{b+2}{b}\rceil=r_{n-1}$
$[v_n, v_{n+1}-1]$	$\frac{b+3}{2}+n-1$	v_n	r_n	$\lceil r_{n-1}\times\frac{b+2}{b}\rceil=r_n$

七、若天秤左臂長：右臂長＝a：b (a、$b\in N$，$1<a<b$，$(a，b)=1$，$k\geq a+b$)，求各種情況下找出假幣的最少秤量步數為何？

(一)首先，我們可以綜合目的一到六的研究過程和結果，推導出下列性質：

【性質 7】：設 k 為硬幣數($k\in N$，$k\geq a+b$)，$f(k)$為 k 個硬幣在二臂長為 a：b (a、$b\in N$，$1<a<b$，$(a，b)=1$)的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為： (1)若 b 為奇數，$f(a+b)=f(a+b+1)=\ldots\ldots=f(2a+2b-1)=\frac{b+3}{2}$；(2)若 b 為偶數，$f(a+b)=f(a+b+1)=\ldots\ldots=f(2a+2b-$

$1)=\frac{b+4}{2}$，$f[(a+b)n]=f[(a+b)n+1]=\ldots\ldots=f[(a+b)n+a+b-1]$

$=f(bn)+1$ ($n\in N$，$n>1$)。

【證明 7】：

1. $k=a+b$

(1) 若 b 為奇數，證明過程同證明 6。

(2)若 b 為偶數，由於兩兩分組，依序和右臂上的 2T 交換，只需秤量 $1+\frac{b}{2}+1=\frac{b+4}{2}$步即可找出假幣。

2. $k=(a+b)n$

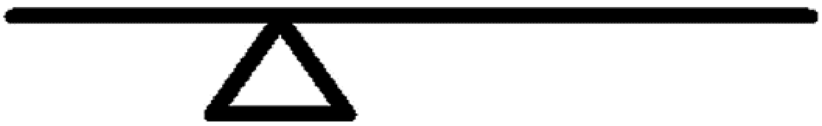
(1)情況一：天秤倒向左邊，只需秤量$f(an)+1$步即可找出假幣。

bnT　　　　$(an-1)T+F$

$abnT \quad > \quad abnT-bT+bF$

(2)情況二： 天秤倒向右邊，只需秤量$f(bn)+1$步即可找出假幣。

$(bn-1)T+F$　　　　anT



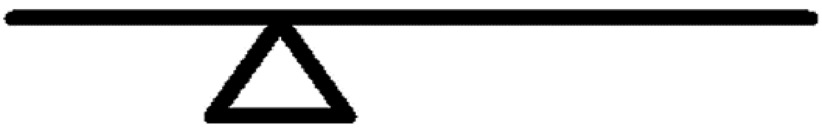
$abnT-aT+aF \quad < \quad abnT$

小結：由上面的研究過程可知，$f[(a+b)n]=f(bn)+1$。

3. $k=(a+b)n+1$(先從中取$an+bn$個硬幣放在天秤上)

(1)情況一：天秤維持水平，只需秤量 1 步即可找出假幣。

anT　　　　bnT



$abnT \quad = \quad abnT$

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=(a+b)n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f[(a+b)n+1]=f(bn)+1$。

4. $k=(a+b)n+2$(先從中取$an+bn$個硬幣放在天秤上)

(1)情況一：天秤維持水平，只需秤量 2 步即可找出假幣。

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=(a+b)n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f[(a+b)n+2]=f(bn)+1$。

5. $k=(a+b)n+(a+b-1)$(先從中取$an+bn$個硬幣放在天秤上)

(1)情況一：天秤維持水平

i. 若$a+b-1\equiv 0 \pmod 4$，將剩下的硬幣每次抽取 4 個兩兩分組與左臂上的硬幣交換，所需的步數為 $\frac{a+b-1}{4}+1=\frac{a+b+3}{4}$，但是$f(a+b)=\frac{2b+8}{4}>\frac{a+b+3}{4}$或 $f(a+b)=\frac{2b+6}{4}>\frac{a+b+3}{4}$。

ii. 若$a+b-1\equiv 1 \pmod 4$，所需的步數為 $\frac{a+b-2}{4}+1=\frac{a+b+2}{4}$，但是$f(a+b)=\frac{2b+8}{4}>\frac{a+b+2}{4}$或 $f(a+b)=\frac{2b+6}{4}>\frac{a+b+2}{4}$。

iii. 若$a+b-1\equiv 2 \pmod 4$，所需的步數為 $\frac{a+b-3}{4}+1=\frac{a+b+1}{4}$，但是$f(a+b)=\frac{2b+8}{4}>\frac{a+b+1}{4}$或 $f(a+b)=\frac{2b+6}{4}>\frac{a+b+1}{4}$。

iv. 若$a+b-1\equiv 3 \pmod 4$，所需的步數為 $\frac{a+b-4}{4}+1=\frac{a+b}{4}$，但是$f(a+b)=\frac{2b+8}{4}>\frac{a+b}{4}$或 $f(a+b)=\frac{2b+6}{4}>\frac{a+b}{4}$。

由上可知，無論任何情況，所需的步數不會大於 $f(bn)+1$。

(2)情況二：假幣在天秤上，同 $k=(a+b)n$ 的情況。

小結：由上面的研究過程可知， $f[(a+b)n+(a+b-1)]=f(bn)+1$。

綜合以上過程，$f[(a+b)n]=f[(a+b)n+1]=\ldots\ldots=f[(a+b)n+a+b-1]=f(bn)+1\ (n\in N，n>1)$。

(二) 接著，我們作一數列$\langle r_n\rangle=r_1$、r_2、……、r_n，其中 $r_1=1$，且$r_n=\lceil r_{n-1}\times\frac{a+b}{b}\rceil$，再將$\langle r_n\rangle$中的每一項同乘以$(a+b)$，得另一數列$\langle v_n\rangle=v_1$、$v_2$、……、$v_n$，並整理出以下關係表格：

硬幣數	最少秤量步數		首數	首數	說明
	b 為奇數	b 為偶數		$\div(a+b)$	

$[v_1, v_2-1]$	$\frac{b+3}{2}$	$\frac{b+4}{2}$	v_1	r_1	
$[v_2, v_3-1]$	$\frac{b+3}{2}+1$	$\frac{b+4}{2}+1$	v_2	r_2	$\lceil r_1 \times \frac{a+b}{b} \rceil = r_2$
$[v_3, v_4-1]$	$\frac{b+3}{2}+2$	$\frac{b+4}{2}+2$	v_3	r_3	$\lceil r_2 \times \frac{a+b}{b} \rceil = r_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[v_{n-1}, v_n-1]$	$\frac{b+3}{2}+n-2$	$\frac{b+4}{2}+n-2$	v_{n-1}	r_{n-1}	$\lceil r_{n-2} \times \frac{a+b}{b} \rceil = r_{n-1}$
$[v_n, v_{n+1}-1]$	$\frac{b+3}{2}+n-1$	$\frac{b+4}{2}+n-1$	v_n	r_n	$\lceil r_{n-1} \times \frac{a+b}{b} \rceil = r_n$

肆、研究結果

【性質 1】：設 k 為硬幣數($k \in N$，$k \geq 3$)，f(k)為 k 個硬幣在二臂長為 1：2 的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為：$f(3)=f(4)=f(5)=2$，$f(3n)=f(3n+1)=f(3n+2)=f(2n)+1$ ($n \in N$，$n>1$)。

【性質 2】：設 k 為硬幣數($k \in N$，$k \geq 4$)，f(k)為 k 個硬幣在二臂長為 1：3 的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為：$f(4)=f(5)=f(6)=f(7)=3$，$f(4n)=f(4n+1)=f(4n+2)=f(4n+3)=f(3n)+1$ ($n \in N$，$n>1$)。

【性質 3】：設 k 為硬幣數($k \in N$，$k \geq 1+b$)，f(k)為 k 個硬幣在二臂長為 1：b ($b \in N$，$1<b$)的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為：

$f(b+1)=f(b+2)=\ldots\ldots=f(2b+1)=b$，$f[(b+1)n]=f[(b+1)n+1]=\ldots\ldots=f[(b+1)n+b]=f(bn)+1$ ($n \in N$，$n>1$)。

【性質 4】：設 k 為硬幣數($k \in N$，$k \geq 5$)，f(k)為 k 個硬幣在二臂長為 2：3 的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為：

$f(5)=f(6)=f(7)=f(8)=f(9)=3$，$f(5n)=f(5n+1)=f(5n+2)=f(5n+3)=f(5n+4)=f(3n)+1$ ($n \in N$，$n>1$)。

【性質 5】：設 k 為硬幣數($k \in N$，$k \geq 7$)，f(k)為 k 個硬幣在二臂長為 2：5 的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為：$f(7)=f(8)=f(9)=f(10)=f(11)=f(12)=f(13)=4$，$f(7n)=f(7n+1)=f(7n+2)=f(7n+3)=f(7n+4)=f(7n+5)=f(7n+6)=f(5n)+1$ ($n \in N$，$n>1$)。

【性質 6】：設 k 為硬幣數$(k \in N，k \geq 2+b)$，f(k)為 k 個硬幣在二臂長為 2：b $(b \in N，2<b，(2，b)=1)$的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為：$f(b+2)= f(b+3)=\ldots\ldots=f(2b+3)=\frac{b+3}{2}$，$f[(b+2)n]= f[(b+2)n+1]=\ldots\ldots=f[(b+2)n+b+1]=f(bn)+1\ (n \in N，n > 1)$。

【性質 7】：設 k 為硬幣數$(k \in N，k \geq a+bb)$，f(k)為 k 個硬幣在二臂長為 a：b $(aa、b \in N，1<a<b，(a，b)=11)$的天秤中找出假幣之最少秤量步數，其公式為： (1)若 b 為奇數，$f(a+b)= f(a+b+1)=\ldots\ldots=f(2a+2b-1=b+32$；(2)若 b 為偶數，$fa+b= fa+b+1=\ldots\ldots=f2a+2b-1=b+42$，$fa+bn= fa+bn+1=\ldots\ldots=fa+bn+a+b-1$

$=f(bn)+1\ (n \in N，n > 1)$。

伍、討論

我們已經成功推導出使用一個左臂和右臂長度比例不同的天秤，在一個重量較輕的假幣與不同數量的真幣中，以最少秤量步數找出假幣的方法並證明。將來還可以繼續增加假幣個數，進行更深入地研究與探討。

陸、結論

我們剛開始研究「奇怪天秤」的原始題目時，左右臂長比例為 1：2。接著，我們就延伸並改變左右臂長比例為 1：3，並推導出 1：b 的公式解。再來，我們又延伸並改變左右臂長比例為 2：3 和 2：5，並推導出 2：b 的公式解。研究過程中，不僅僅是靠單純數學計算，還要利用我們發現的「神奇交換法」進行左右真假幣的交換，用以找出最少秤量步數。最後，我們終於推導出 a：b 的公式解，並順利地完成這份科展報告。

柒、參考資料及其他

一、游森棚(2022)．森棚教官的數學題-奇怪天秤．科學研習雙月刊，60(5)。

二、文耀光(2007)．假幣問題及其解法．數學傳播，31(4)。

三、國立彰化高級中學(2022)．圖窮幣現．第 47 屆全國中小學科展。