屏東縣第 63 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：藝數等面積分割

關 鍵 詞：尺規作圖、等分面積、幾何證明

編號：

作品名稱

藝數等面積分割

摘要

本研究主要探討先找到與課本不一樣的 n 等分線段的作法，再從線段 n 等分的作法來看多邊形 n 等分面積的分割，而其分割方法為先將任意多邊形之一固定點分割成(n-2)個三角形，在利用國中課程所學的 n 等分線段方法，將三角形做 n 等分分割，進而完成 n 等分任意多邊形。

壹、研究動機

上課時，老師為我們講解一題會考非選題，其題目是有關等分切長方形蛋糕其刀數與分數之間的相關問題，引起了我們的興趣，因為每次生日要切蛋糕時，我都會很期待，又怕分的不公平，所以該如何分才公平呢？在場的人分到的蛋糕才不會因此而吵架。另外，也聯想到，若改成任意多邊形的等面積分割，那又該如何分呢畫？而等分線段和等分面積在我們生活中也有許多相關例子例如：土地面積的劃分、房間隔間、分割磁磚、食物的平分等等。

貳、研究目的

一、找到與課本不一樣的 n 等分線段的作法

二、藉由 n 等分線段的作法慢慢延伸到多邊形 n 等分面積

參、研究設備及器材

本研究所需要的設備與器材有空白紙、直尺、圓規、彩虹筆、蠟筆、電腦及手機等。

肆、研究過程或方法

在作這研究時，我們必須先了解基本的概念與技巧，如等分、線段、面積、等面積的定義、尺規作圖等，根據這些基礎概念與技巧，我們就可以針對這主題，好好的研究、討論一番。以下就先間單說明、介紹這基礎觀念與技巧。

一、名詞釋義

(一)、等分的定義

將物體分割成需要的部分，讓每一份都相等。常用於在角度、長度，每份一定都得一模一樣。

(二)、線段的定義

數學上稱作為直線的一部分，僅具長度，不具方向。

(三)、面積與等分面積

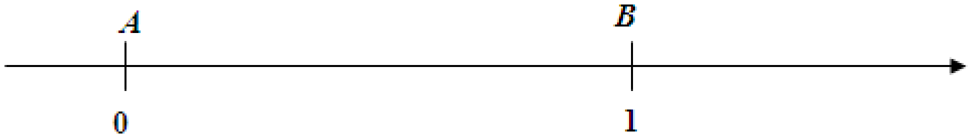
地面、物體表面或平面圖形的大小，稱為「面積」。而分割要求的數量，分割出來的面積都是一樣的稱為等分面積。

二、n 等分線段

起先，我們利用範例 1 作說明，先作出直線$\frac{1}{n}$的點，再延伸出作直線 n 等分，並用課本的方法，再進階作 n 等分的等分點。

範例 1

如圖，在數線上，$A(0)$、$B(1)$。請用尺規作圖，精準地 標出坐標是$\frac{1}{3}$的點。

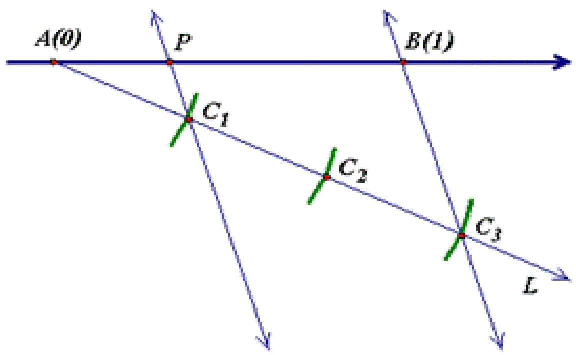


1.作法

(1)過 A 點作直線 L，並在 L 上依序取$\overline{AC_1}=\overline{C_1C_2}=\overline{C_2C_3}$

(2)連接$\overline{C_3B}$

(3)過C_1點作$\overline{C_1P}//\overline{C_3B}$，交$\overline{AB}$於 P 則 P 點即為所求



2.作法與證明

在$\triangle ABC_3$中，因為$\overline{C_1P}//\overline{C_3B}$，

所以$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC_3}}=\frac{1}{3}$(平行線截三角形兩邊成比例線段性質)

又因為$\overline{AB}=1$，所以$\overline{AP}=\frac{1}{3}$

3.延伸

今天，如果我們是要作三等分$\overline{AB}$，那我們需再過C_2點作$\overline{C_2Q}//\overline{C_3B}$，交$\overline{AB}$於 Q 則 P、Q 兩點三等分$\overline{AB}$即為所求。

接下來，就是利用網路搜尋，最後歸納整理出較特別而且也是利用尺規作圖來找$\frac{1}{5}\overline{AB}$點的 3 種方法，再用這方法延伸找到 5 等分的 4 個等分點並且加以證明、說明這方法是對的。如下範例 2、範例 3、範例 4，而範例 4 的方法是直接將 4 個等分點都找出來了。

範例 2

如圖，已知一線段 AB，利用尺規作圖精準地 標出坐標是$\frac{\overline{AB}}{5}$的點。

1.作法

(1)分別以 A、B 為圓心，以大於$\frac{\overline{AB}}{2}$長為半徑畫弧，

連接兩弧之交點，得垂直於$\overline{AB}$的直線l_1，

設l_1與$\overline{AB}$交於 P 點，如下圖 1 所示。

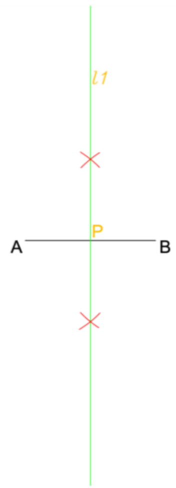


圖 1

(2)在l_1上任取一點 Q，分別以 P、Q 為圓心，

以大於$\frac{\overline{PQ}}{2}$長為半徑畫弧，連接兩弧之交點，

得垂直於l_1的直線l_2，如下圖 2 所示。(因$\overline{AB}$、l_2皆垂直於l_1，故$\overline{AB}//l_2$。)

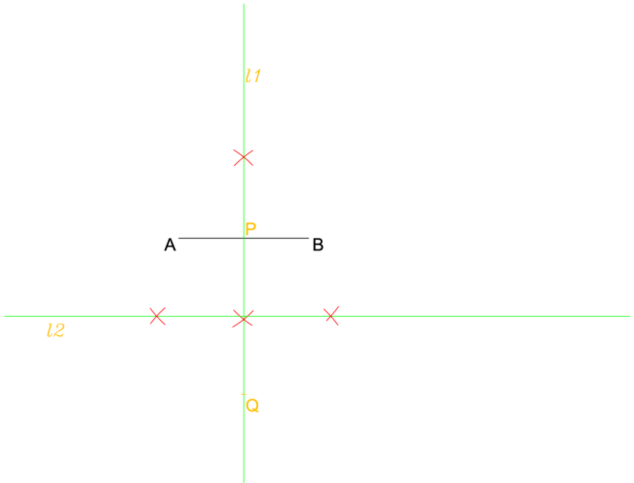


圖 2

(3)在l_2上取$\overline{A'B'}$=$\overline{B'C'}$=$\overline{C'D'}$=$\overline{D'E'}$=$\overline{E'F'}$=$\overline{A'F'}$/5，

得 A'、B'、C'、D'、E'、F'六點，如圖 3 所示。

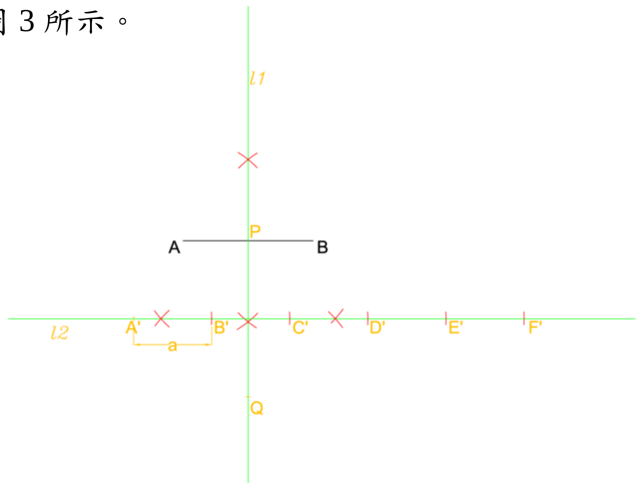


圖 3

(4)作$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BF'}$，設$\overleftrightarrow{AA'}$與$\overleftrightarrow{BF'}$相交於 M 點，如圖 4 所示。

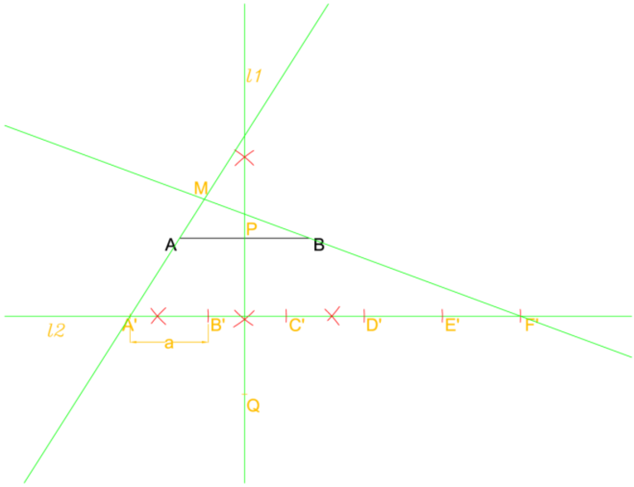


圖 4

(5)連接 M、B'兩點，設$\overline{MB'}$設$\overline{AB}$於點 N，

則$\overline{AN} = \frac{\overline{AB}}{5}$，如圖 5 所示。

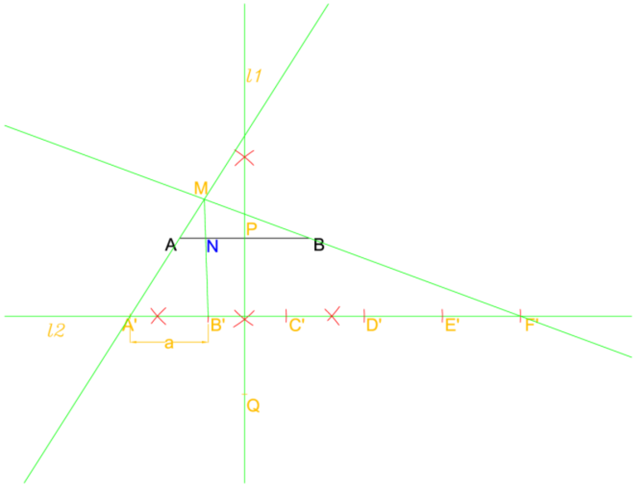


圖 5

2.說明&證明

(1)因為∠AMB = ∠A'MF'，且$\overline{AB}//\overline{A'F'}$，

故△MAB～△MA'F'，故$\overline{AB}/\overline{A'F'}=\overline{MA}/\overline{MA'}$

(2)因為∠AMN =∠A'MB'，且$\overline{AN}//\overline{A'B'}$，

故△MAN～△MA'B'，故$\overline{AN}/\overline{A'B'}=\overline{MA}/\overline{MA'}$

(3)由(1)、(2)得：$\overline{AB}/\overline{A'F'}=\overline{MA}/\overline{MA'}=\overline{AN}/\overline{A'B'}$

$\overline{AN}/\overline{AB} = \overline{A'B'}/\overline{A'F'}$

(4)又因$\overline{A'B'}=\overline{B'C'}=\overline{C'D'}=\overline{D'E'}=\overline{E'F'}=\overline{A'F'}/5$

所以$\overline{AN}/\overline{AB} = \overline{A'B'}/\overline{A'F'}= 1/5$

即$\overline{AN} = \frac{\overline{AB}}{5}$

3.延伸

(1)若作 5 等分$\overline{AB}$，

別連接 M、C'兩點、連接 M、D'兩點、連接 M、E'兩點，

設$\overline{MC'}$、$\overline{MD'}$、$\overline{ME'}$分別交$\overline{AB}$於 O、P、Q 三點，

則 N、O、P、Q 四點 5 等分$\overline{AB}$。

(2)若要 n 等分$\overline{\mathrm{AB}}$（n 為任意正整數）時，
則在作圖步驟(3)的時，
在l_2上取 n+1 個等間距的點，
再將這些點分別與 M 連接，
就會分別在$\overline{\mathrm{AB}}$上得到 n-1 個交點，
即將$\overline{\mathrm{AB}}$ n 等分。

三、三角形等分面積

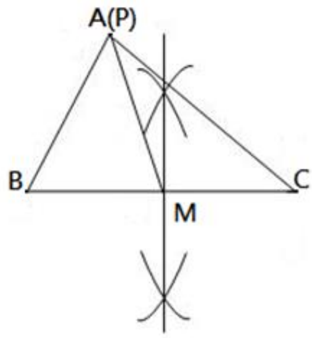
給定三角形 ABC 及一點 P，求作一直線過 P，且平分三角形 ABC 的面積。這個作圖會因為 P 點的位置而有不同作法：

(一)、P 為頂點

這情形最簡單，我們只需作此三角形的中線即可。

已知：△ABC，P 為頂點 A

求作：過 P 作一直線平分△ABC 面積



作法：

1.做 BC 線段之中垂腺交 BC 於點 M

2.連接 PM 為所求

證明：

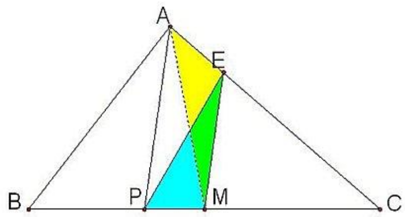
∵M 為 BC 中點，∴BM＝MC

故△ABM＝△AMC＝△ABC 的二分之一

(二)、P 在邊上

已知：△ABC，P 為 BC 上一點

求作：過 P 作一直線平分△ABC 面積



作法：

1. 取 BC 中點 M

2. 連接 AP

3. 過 M 作 AP 的平行線交 AC 於 E

4. 連接 PE 為所求

證明：

∵EM//AP，∴△AEM＝△PEM

△CPE＝△CEM+△PEM＝△CEM+△AEM＝△AMC

故為(ABC)的二分之一

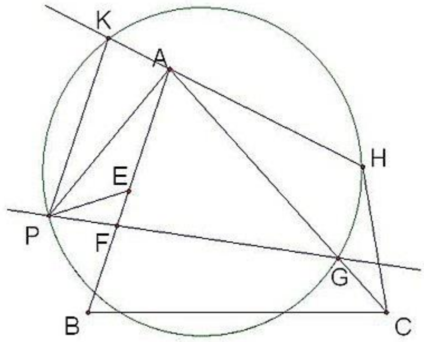
(三)、P 在外部

已知：△ABC，P 為外部一點

求作：過 P 作一直線平分△ABC 面積

作法：

1. 取 AB 中點 E，連接 PE
2. 往 AC 的外部作△ACH 使得△ACH~△APE
3. 過 P 作 AB 的平行線與 AH 的延長線交於 K
4. 作△KHP 的外接圓交 AC 於 G
5. 連接直線 PG 即為所求



證明：

1. 令 PG 交 AB 於 F，連接 HG
2. K、P、G、H 共圓，所以∠AHG＝∠KPX＝∠AFP
3. 又∠HAG＝∠FAP(作圖 2)
4. 故△AGH~△APF

   ＝＞ AH/AF＝AG/AP ＝＞ AF×AG＝AP×AH
5. 又△ACH~△APE

   ＝＞ AH/AE＝AC/AP ＝＞ AP×AH＝AE×AC
6. 故 AF×AG/AB×AC＝AE×AC/AB×AC＝1/2
7. 也就是△AFG 的面積為△ABC 面積的一半

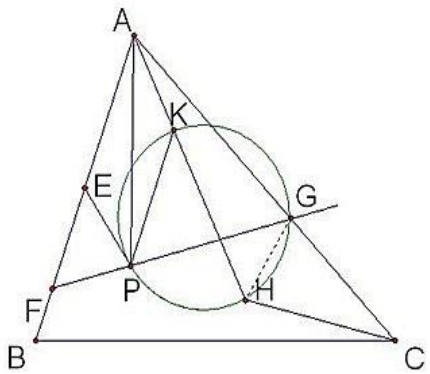
(四)、P 在內部

已知：△ABC，P 為內部一點

求作：過 P 作一直線平分△ABC 面積

作法：

1. 取 AB 中點 E，連接 PE
2. 往 AC 的內部作△ACH 使得△ACH~△APE
3. 過 P 作 AB 的平行線與 AH 的延長線交於 K
4. 作△KHP 的外接圓交 AC 於 G
5. 連接直線 PG 即為所求



證明：

1. 令 PG 交 AB 於 F，連接 HG
2. K、P、G、H 共圓，所以∠AHG＝∠KPG＝∠AFP
3. 又∠HAG＝∠FAP(作圖 2)
4. 故△AGH~△APF

   ＝＞ AH/AF＝AG/AP

   ＝＞ AF×AG＝AP×AH
5. 又△ACH~△APE

   ＝＞ AH/AE＝AC/AP

   ＝＞ AP×AH＝AE×AC
6. 故 AF×AG/AB×AC＝AE×AC/AB×AC＝1/2
7. 也就是△AFG 的面積為△ABC 面積的一半

四、三角形 n 等分面積

作法 1：(如圖 1)

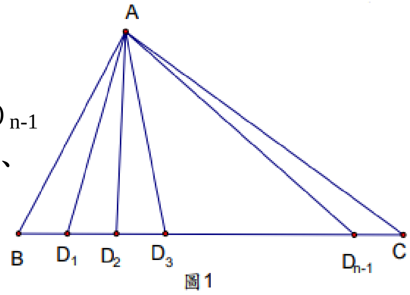


圖1

1. 將△ABC 的邊 BC n 等分，設其等分點依次為 $D_1, D_2, \cdots, D_{n-2}, D_{n-1}$
2. 作 AD_1、AD_2、……、AD_{n-1} ，則$\triangle ABD_1$、$\triangle AD_1D_2$、$\triangle AD_2D_3$、……、$\triangle AD_{n-1}C$ 即為所求。

證明：

$\because \triangle ABD_1, \triangle AD_1D_2, \triangle AD_2D_3, \cdots, \triangle AD_{n-1}C$ 其底相同且高亦相同

$\therefore \triangle ABD_1 = \triangle AD_1D_2 = \triangle AD_2D_3 = \cdots = \triangle AD_{n-1}C$

△ADn-1C 即為所求。

作法 2：(如圖 2)

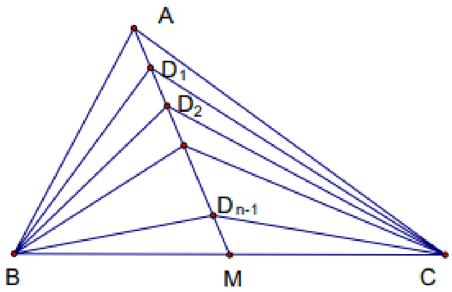


圖2

1. 作△ABC 之中線 AM
2. 將 AM n 等分，設其等分點依次為 $D_1, D_2 \cdots, D_{n-1}$
3. 作 $BD_1, CD_1, BD_2, CD_2, \cdots, BD_{n-1}, CD_{n-1}$，則四邊形 ABD_1C、四邊形 D_1BD_2C、……、四邊形 $D_{n-2}BD_{n-1}C$、$\triangle D_{n-1}BC$ 即為所求。

註：AM 不是中線也可以。

證明：

$\because \triangle BAD_1, \triangle BD_1D_2, \triangle BD_2D_3, \cdots\cdots, \triangle BD_{n-1}M$其底相同且高亦相同

$\therefore \triangle BAD_1 = \triangle BD_1D_2 = \triangle BD_2D_3 = \cdots\cdots = \triangle BD_{n-1}M$

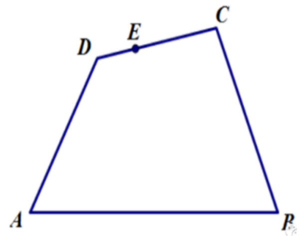
又$\because \triangle CAD_1, \triangle CD_1D_2, \triangle BD_2D_3, \cdots\cdots, \triangle BD_{n-1}M$其底相同且高亦相同

$\therefore \triangle BAD_1 = \triangle BD_1D_2 = \triangle CD_2D_3 = \cdots\cdots = \triangle CD_{n-1}M$

$\therefore$四邊形 ABD_1C＝四邊形 D_1BD_2C＝……＝四邊形 $D_{n-2}BD_{n-1}C = \triangle D_{n-1}BC$

五、四邊形等分面積

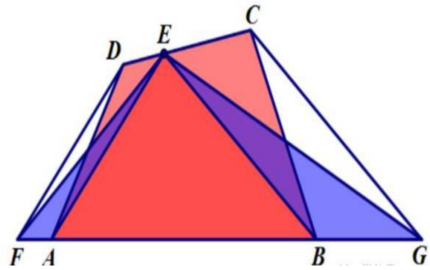
如右圖所示，ABCD 為四邊形，E 為 C,D 間的點，要求畫一條過點 E 的直線，使這條直線把這個四邊形分割成面積相等的兩部分。



作法：

1.將點 E 和點 A 連接起來,點 E 和點 B 也連接起來，變成一個三角形 AEB。

2.點 D 和點 A 畫一條直線平行於 AE，點 C 和點 B 畫一條直線平行於 EB，兩條直線分別與 AB 的延長線交於點 F 和點 G。



3.將點 E 和點 F 連接，點 E 點 G 連接,所以,四邊形 ABCD 中的三角形 AED 的面積跟三角形 AEF 的面積是一樣的；四邊形 ABCD 中的三角形 BEC 的面積跟三角形 BEG 的面積是一樣的。三角形 EFG 的面積跟四邊形 ABCD 的面積也是一樣的。我們成功的把四邊形轉換成面積相同的三角形。

4.在三角形 EFG 畫一條使面積相等的中線 EH，使三角形 EFH 的面積等於三角形 EGH 的面積，從使四邊形 ADEH 的面積要等於四邊形 BCEH 的面積。即使過點 E 的線段 EH 把四邊形 ABCD 分割成面積相等的兩部分。

5.上圖是切割線正好從給定點 E 所在邊的對邊穿過，即使切到了 AB 邊上的點。有时四邊形的形狀會使得切割線切不到對邊。切割線段的另一端點 F 就不會落在 AB 邊上，而是落在了 BC 邊上。所以，上述的方法絕不可適用。

六、四邊形 n 等分面積

(一)、平行四邊形(設 n＝6)

作法 1：(如圖 3)

1. 在 BC 上取 E、F，使得 BE＝EF＝FC
2. 在 AB 上取 G、H，使得 AG＝GH＝HB
3. 作 DG, DH, DB, DE, DF，
   則△DAG、△DGH、△DHB、△DBE、△DEF、△DFC 即為所求。

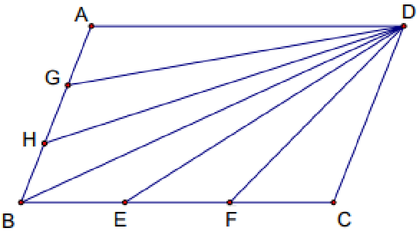


圖3

證明：

∵△DAG＝△DGH＝△DHB(同底等高)

又∵△DBE＝△DEF＝△DFC(同底等高)

而又△DAB＝△DBC

∴△DAG＝△DGH＝△DHB＝……＝△DFC

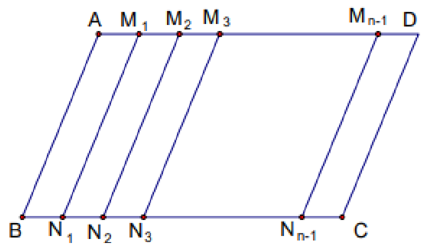


圖4

作法 2：(如圖 4)

1. 將 AD n 等分，設其等分點依次為 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_{n-1}$
2. 將 BC n 等分，設其等分點依次為 $N_1, N_2, \cdots\cdots, N_{n-1}$
3. 作 M_1N_1 ， $M_2N_2, \cdots\cdots, M_{n-1}N_{n-1}$，
   則$\square ABN_1M_1, \square M_1N_1M_2N_2, \cdots\cdots \square M_{n-1}N_{n-1}CD$ 即為所求。

證明：

$\because \square ABN_1M_1 \cong \square M_1N_1M_2N_2 \cong \cdots\cdots \cong \square M_{n-1}N_{n-1}CD$

$\therefore \square ABN_1M_1 = \square M_1N_1M_2N_2 = \cdots\cdots = \square M_{n-1}N_{n-1}CD$

作法 3：(如圖 5，先將 n 分解或兩正整數之乘積： $n = k \times p = \cdots\cdots$)

1. 將 AD k 等分，設其等 k 分點依次為 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_{k-1}$
2. 將 AB p 等分，設其等 p 分點依次為 $N_1N_2, \cdots\cdots, N_{p-1}$
3. 分別過 AD 與 AB 邊上之等分點作 AB、AD 之平行線
   交出 kxp 個小平行四邊形即為所求。

證明：

∵kxp(＝n) 個小平行四邊形皆全等

∴kxp 個小平行四邊形之面積皆相等

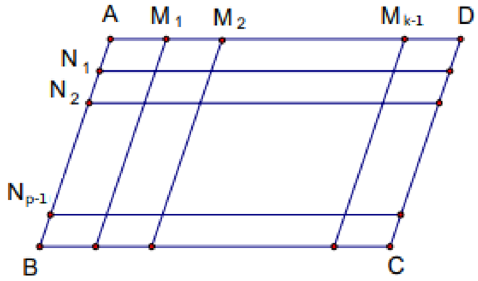


圖5

(二)任意四邊形 n 等分

作法：(如圖 6)

1. 作四邊形 ABCD 之對角線 AC
2. 將 AC n 等分，設其等分點依次為 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$
3. 作 $BM_1, DM_1, BM_2, DM_2, \cdots, BM_{n-1}, DM_{n-1}$，則四邊形 ABM_1D, 四邊形 $M_1BM_2D, \cdots$, 四邊形 $M_{n-1}BCD$ 即為所求。

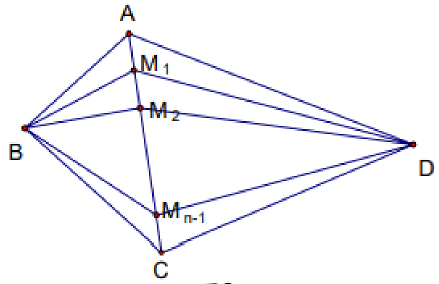


圖6

證明：

$\because \triangle ABM_1 = \triangle M_1BM_2 = \cdots = \triangle M_{n-1}BC$(等底同高)

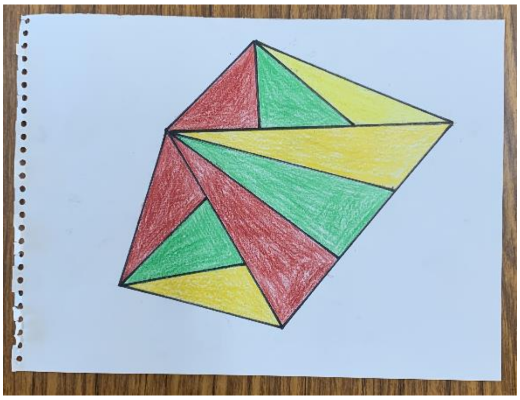
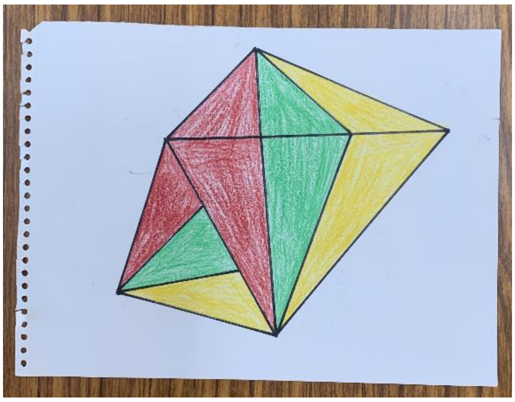
又$\because \triangle ADM_1 = \triangle M_1DM_2 = \cdots = \triangle M_{n-1}DC$(等底同高)

$\therefore$四邊形 ABM_1D＝四邊形 $M_1BM_2D = \cdots =$ 四邊形 $M_{n-1}BCD$

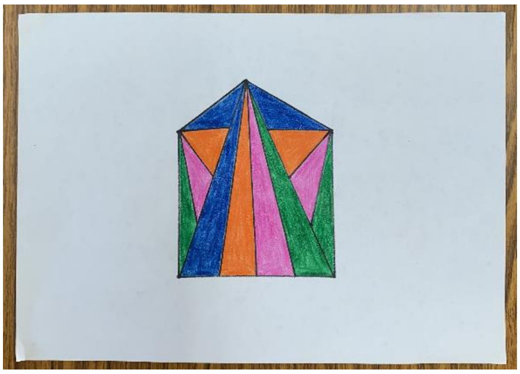
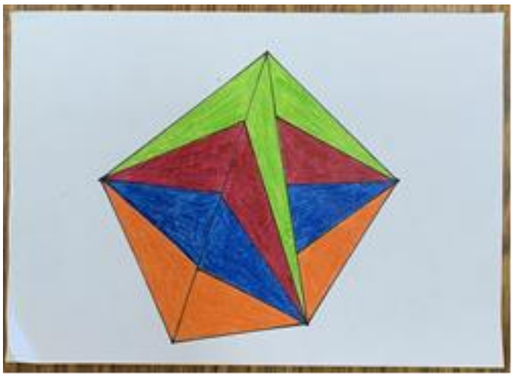
七、n 邊形 n 等分面積

以下為用等分線段方法，對五邊形、六邊形、七邊形、八邊行、九邊行、十邊形作 3 等分、4 等分面積分割。

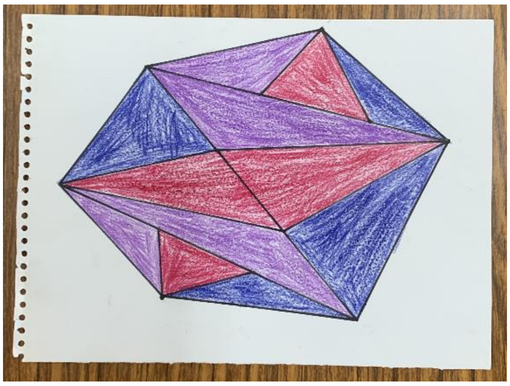
五邊形三等分

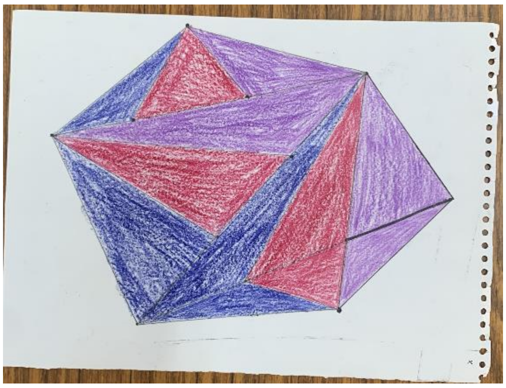



五邊形四等分

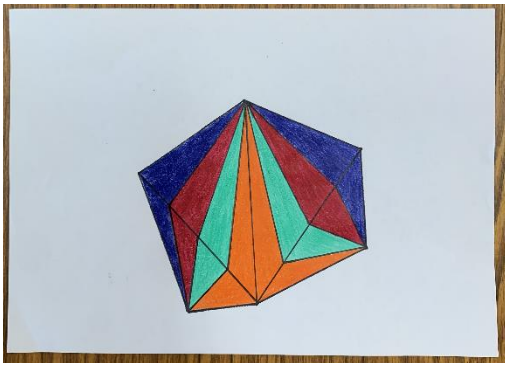



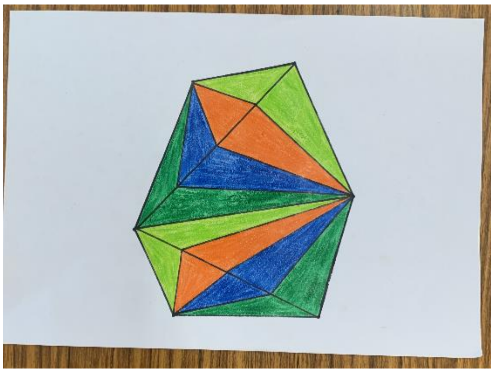
六邊形三等分



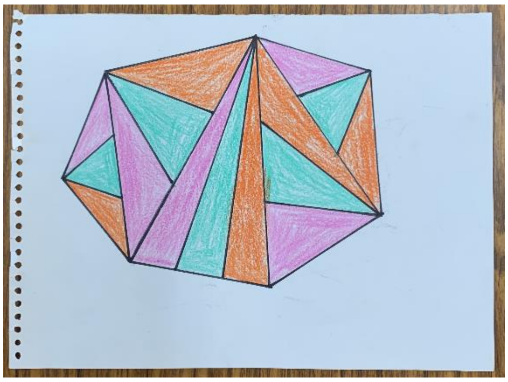


六邊形四等分

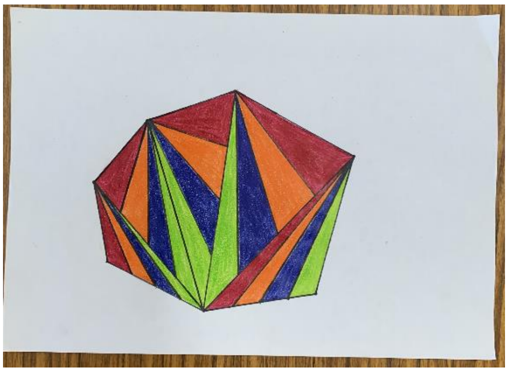




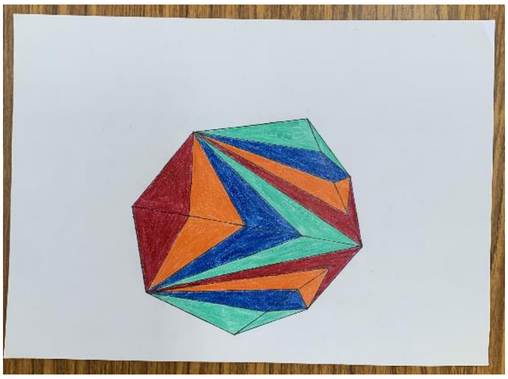
七邊形三等分

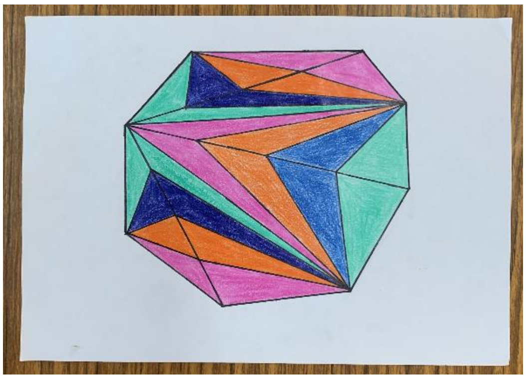


七邊形四等分

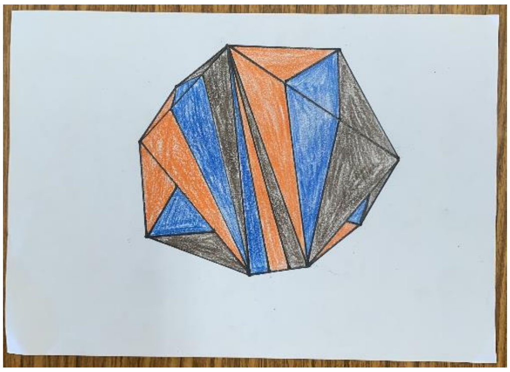


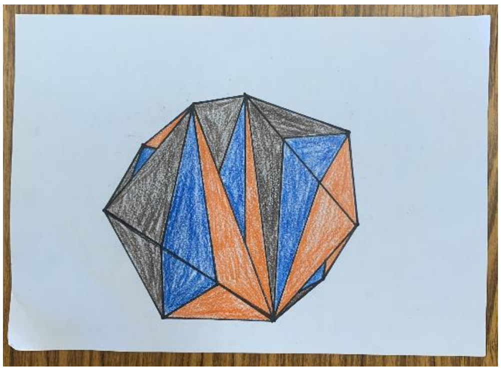
八邊形四等分



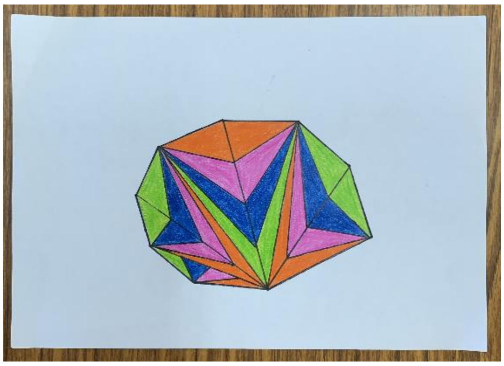


九邊形三等分

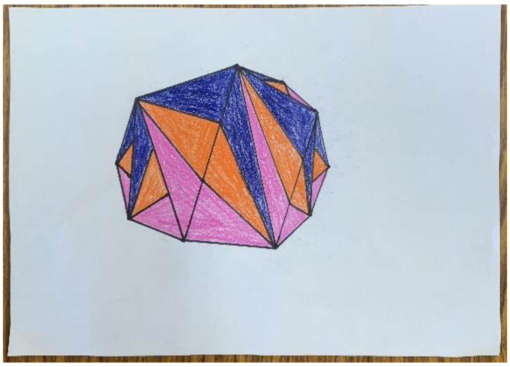


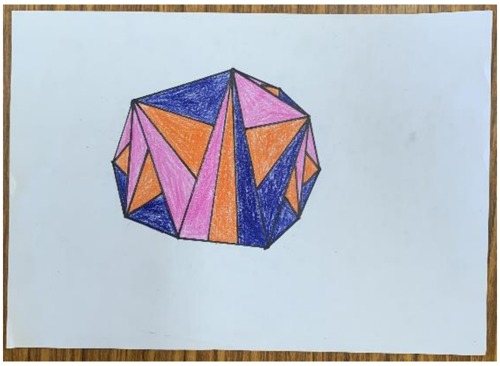


九邊形四等分

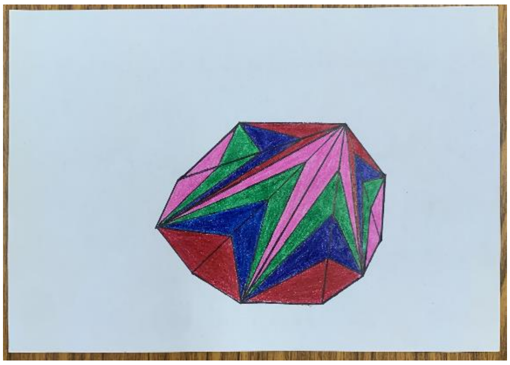


十邊形三等分





十邊形四等分



八、圓形 n 等分分割(設 n ＝ 8 為例)

作法 1：（如圖 9）

1. 先找到圓的圓心設為 O
2. 過 O 作兩直徑 AB、CD，且 $AB \perp CD$
3. 作∠COB 與∠COM 之角平分線，設交圓 O 於 M、P
   且包含其角平分線的直線另交圓 O 於 N、Q，
   則扇形 AON, 扇形 NOD,……, 扇形 POA 即為所求。

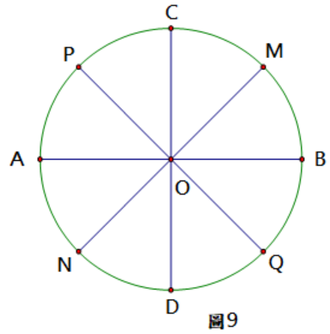


圖9

證明：

∵扇形 AON, 扇形 NOD,……, 扇形 POA，它們的邊都相等且等於半徑，
夾角皆相等為 45°

∴扇形 AON＝扇形 NOD＝……＝扇形 POA

圖 10 與圖 11 就是將圓七等分的另外兩種方法。在圖 10 中這些同心圓的半徑分別為$\sqrt{1/7}$, $\sqrt{2/7}$, …, $\sqrt{6/7}$。而這些值都是可以用尺規作出來的。注意兩股別為 1 和$\sqrt{a}$的直角三角形，斜邊為$\sqrt{a+1}$。從 a=1 開始出發不斷疊代，我們可以依次作出$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{4}$等值，再利用相似三角形即可完成除法操作。而在圖 11 中，我們首先作出直徑上的七等分點，然後依次作出 12 個半圓弧。做一些簡單的計算就可以證明，這些半圓弧形成的七個區域的面積是相等的。另外，這切分方法還有另一個的性質：它的每一部分的周長都是相等的。

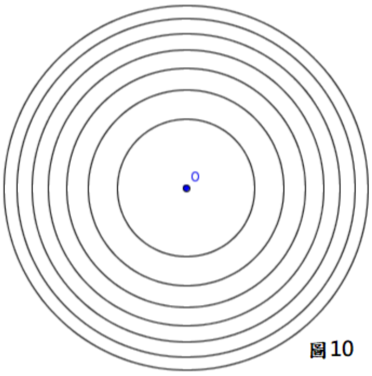


圖10

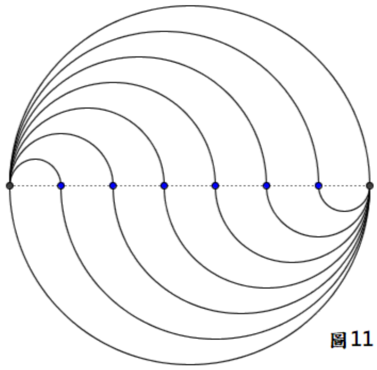


圖11

伍、研究結果

在剛開始時，覺得要找到跟課本不一樣的 n 等分線段方法，應該是不容易的，因為我們平常都太依賴課本了，總覺得課本的方法是唯一的，但在老師的鼓勵下，我們上網尋找而發現了許幾種方法，甚至覺得有比課本還容易的方法，所以就將它紀錄下來，在課本中還需做平行線來找出等分點，而我們找到的方法卻只要輕鬆的連一連，就把等分點找出來了。如在例題 1 與例題 3 的方法中，若是要推廣至找$\frac{1}{n}\overline{AB}$，那當然容易，可是若要作 n 等分$\overline{AB}$，那真的會是較蠻麻煩的。

接著開始做等分面積，先做三角形與四邊形的等分面積分割的研究，因為分割點的位置不同，我們也找到了不同的方法，最後發現**當分割點在頂點時是最容易的**，後來，我們也用 n 等分線段的方法還做任意多邊形 n 等分面積，也用這方法堆廣至三角型與四邊形的 n 等分分割，都可以順利完成，最後用一樣的方法，對五邊形、六邊形、七邊形、八邊行、九邊行、十邊形作 3 等分、4 等分面積分割也都成功了。所以相信，用這方法都可以將任意 n 邊形作 n 等分分割。

陸、討論

原本只是想作多邊形的 n 等分面積分割，而用此方法也可以做到圓面積的 n 等分面積分割(如圖 11 所示)，而且做出來的圖形還很特別，因為一般來說，做圓的 n 等面積分割，都是從圓心與半徑出發來做(以圖 9 為例)，這真是一件意外收穫。

而在做五邊形、六邊形、七邊形、八邊行、九邊行、十邊形作 3 等分、4 等分面積分割時，剛開始本來顯簡單用斜線來做區分等分，後來發現容易搞亂，經過討論後，決定用彩虹筆來上色，而在塗完顏色後發現，這塗還真漂亮，也嘗試用顏色對稱的塗法，也別有一番滋味，一時間，整個人都陷進去了，一直停不下手。

另外我們發現，我們所完成的作品，跟琉璃吊橋、教堂上的琉璃窗、市面上一些琉璃品等，有異曲同工之妙，真是數學與藝術的完美結合作品。而且我們還有拿去給視覺藝術老師看，老師說她可以拿來課堂上當教具，跟數學老師配合，在數學課堂時先讓大家畫出多邊形的等面積分割圖，接著再由視覺藝術老師，教大家利用配色概念，來加以上色，甚至還可以讓大家發揮自我創意， 設計出屬於自己的專屬圖案。

柒、結論

其實一開始我們想嘗試用任意正多邊形來直接切等面積分割，後來發現難度有點高，所以，進度一直停滯不前，沒有半點頭緒，這讓我們受到了很大的打擊，就在我們準備放棄之際，老師不斷鼓勵我們，建議我們先從較簡單的等分線段開始，最後慢慢的我們漸入佳境，我們利用社團時間與午休時間互相討論，也參考了許多的網路資訊、資料，雖然在這些過程中令人絞盡腦汁，雖然我們中途一度想放棄，但是回過頭看到這些日積月累的報告、每天花費精力利用午休時間做的報告，就會突然充滿電，彷彿一切的辛苦都值得了，從短短的只有 5、6 頁的內容，如今，已經完成了 13 頁的內容，是我們目前以來做過頁數最多的報告了，讓我們又有了滿滿的成就感。

在這科技與資訊爆炸的時代，這在古代是被認為是多麼不可能的事情，甚至是天方夜譚，至今都一一被實現了。就像以前農業社會的時代，怎會想到因為蒸汽機的發明，機械而取代了人力，而社會型態轉變為工業社會，甚至今日的資訊社會，最後我們歸納了以下幾點結論。

1.利用網路資料發現等分線段有好幾種分法，而這些方法跟課本不一樣，讓我們學到了更多的思路。

2.循序漸進進入到 n 等分面積，我們試著利用畫圖的方式來更了解等分面積的劃分，發現用這個方式挺容易清楚的。

捌、參考資料及其他

1.康軒國中數學第 3 冊

2.國民中學學習資源網

http://siro.moe.edu.tw/teach/index.php?n=0&m=0&cmd=&sb=3

3. https://twgreatdaily.com/7eITQmwB8g2yegNDiI77.html

4. 尺規作圖：求一條線段的 n 等分點- 每日頭條

https://kknews.cc/zh-tw/news/q43geog.html

5. https://www.jihehuaban.com.cn/video/xianduan-dengfen.html

6.https://zh.wikihow.com

7. https://lyingheart6174.pixnet.net/blog/post/5122663