中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：一筆畫燈會

關 鍵 詞：燈會、奇頂點、偶頂點

編號：

一筆畫燈會

摘要

「一筆畫問題」最早來源於「柯尼斯堡七橋問題」。這個問題是：當時柯尼斯堡市區的河中心有兩個小島，小島與河的兩岸有七座橋連接。在所有橋都只能走一遍的前提下，如何才能把這個地方所有的橋都走遍？十八世紀瑞士數學家歐拉（L.Euler 1707-1783）在 1736 年的論文「柯尼斯堡七橋」中，證明這種方法並不存在，因而提出了「一筆畫定理」。今天，我們藉由「一筆畫」的探討，試著來解決一些日常生活中可能面臨的路徑問題。

壹、研究動機：

屏東的燈會光彩絢麗、燦爛奪目，每年都會吸引無數的民眾前來觀賞。今年的燈會展示，更是結合了生肖主題與環保和科技，製作了近百座各式各樣的花燈，每一盞花燈都有它獨特的形象與意涵，除了讓人目不暇給的美麗花燈之外，還可以學習到許多與環境和天文的相關知識，真是視覺與心靈的雙重饗宴。然而，今年的花燈展示規劃了三個展區，包括「萬年溪燈區」、「縣民公園燈區」以及「勝利星村燈區」。範圍之大，涵蓋了將近半個屏東市，讓人想要一口氣逛完三大展區，變成一項艱難的挑戰，尤其是非屏東市民的我，幾乎是逛到頭昏眼花，往往迷失在美麗的燈陣中，迷失到差點懷疑人生。於是，我想要做做參觀前的路線規劃，便找了班上幾位好朋友，大家一起來想想，怎麼樣才能畫出一張讓觀賞燈會變成輕鬆寫意的「燈會參觀路線圖」。

壹、研究目的：

我們規劃的「燈會參觀路線圖」中，希望每一條道路都只能經過一次，不可以重複，這讓我們聯想到以前曾經學過的「一筆畫問題」。「一筆畫問題」起源於「柯尼斯堡七橋問題」。這個問題是基於一個現實生活的事例：當時東普魯士柯尼斯堡市區跨普列戈利亞河兩岸，河中心有兩個小島，小島與河的兩岸有七座橋連接。在所有橋都只能走一遍的前提下，如何才能把這個地方所有的橋都走遍？十八世紀瑞士數學家歐拉（L.Euler 1707-1783）在 1736 年證明這種方法並不存在，因而提出了「一筆畫定理」。今天，我們藉由「一筆畫問題」的探討，試著來研究以下的問題：

一、找出一筆畫圖形的規律。

二、如何將無法一筆畫的圖形製成可以一筆畫的圖形？

三、製作一筆畫的「燈會參觀路線圖」。

貳、研究設備及器材：

電腦、圖畫紙、圓規、直尺、麥克筆、修正液、手機。

肆、研究過程：

一、找出一筆畫圖形的規律：

（一）蒐集可以一筆畫及無法一筆畫的圖形若干，透過觀察和嘗試，整理紀錄並歸納出一筆畫圖形的規律，如下列圖表。

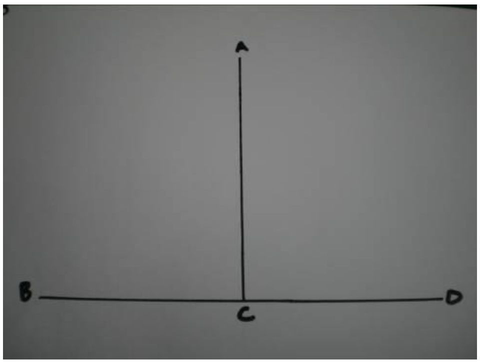


圖 1

起點	A	B	C	D
連接線段數	1	1	3	1
可否一筆畫	×	×	×	×
終點	×	×	×	×

表 1

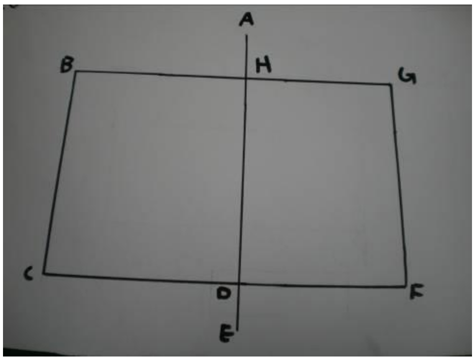


圖 2

起點	A	B	C	D	E	F	G	H
連接線段數	1	2	2	4	1	2	2	4
可否一筆畫	○	×	×	×	○	×	×	×
終點	E	×	×	×	A	×	×	×

表 2

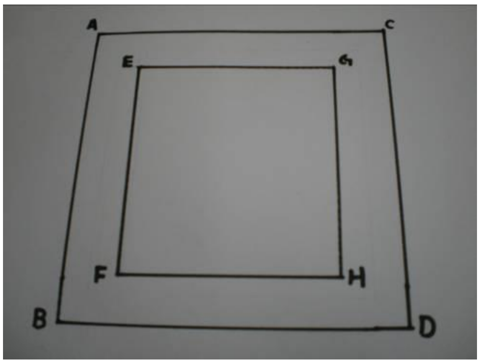


圖 3

起點	A	B	C	D	E	F	G	H
連接線段數	2	2	2	2	2	2	2	2
可否一筆畫	×	×	×	×	×	×	×	×
終點	×	×	×	×	×	×	×	×

表 3

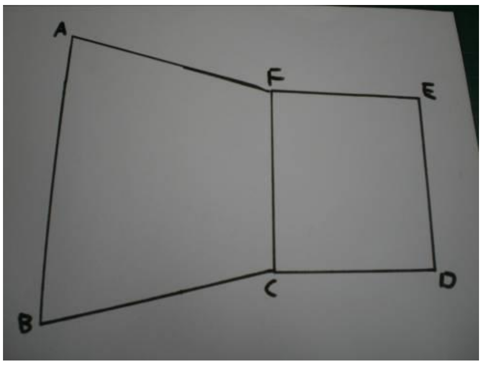


圖 4

起點	A	B	C	D	E	F
連接線段數	2	2	3	2	2	3
可否一筆畫	×	×	○	×	×	○
終點	×	×	F	×	×	C

表 4

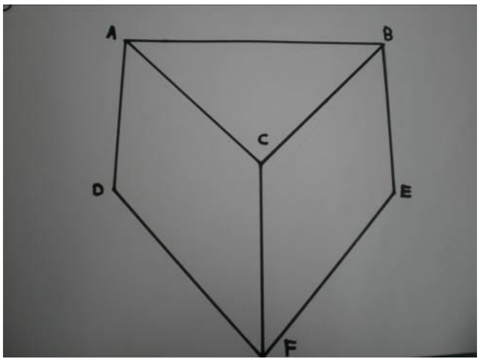


圖 5

起點	A	B	C	D	E	F
連接線段數	3	3	3	2	2	3
可否一筆畫	×	×	×	×	×	×
終點	×	×	×	×	×	×

表 5

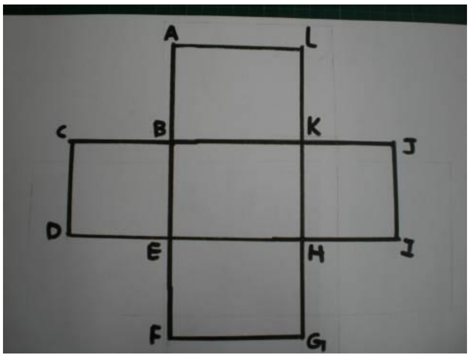


圖 6

起點	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
連接線段數	2	4	2	2	4	2	2	4	2	2	4	2
可否一筆畫	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
終點	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L

表 6

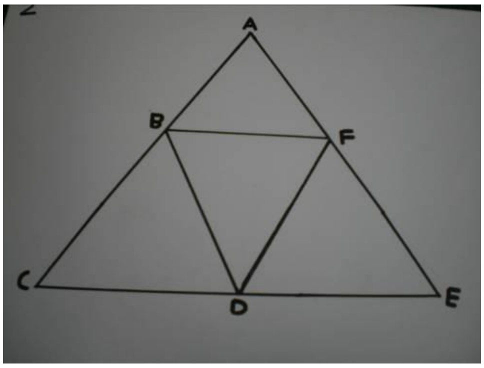


圖 7

一筆畫起點	A	B	C	D	E	F
連接線段數	2	4	2	4	2	4
可否一筆畫	○	○	○	○	○	○
一筆畫終點	A	B	C	D	E	F

表 7

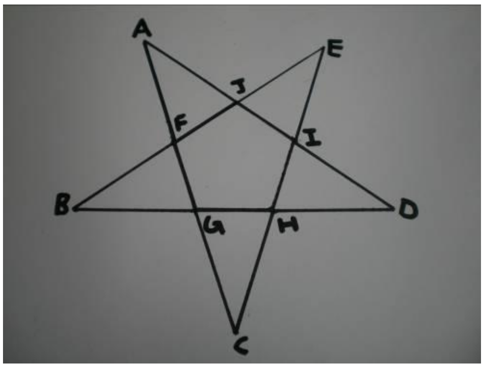


圖 8

起點	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J		
連接線段數	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4		
可否一筆畫	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		
終點	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J		

表 8

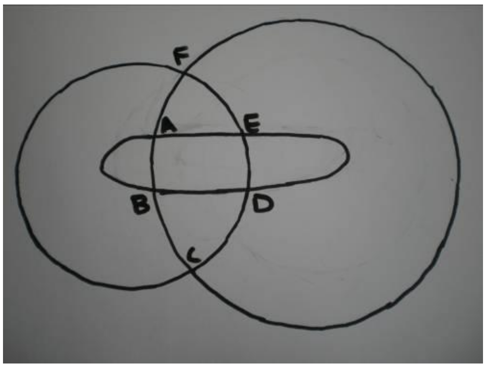


圖 9

起點	A	B	C	D	E	F
連接線段數	4	4	4	4	4	4
可否一筆畫	○	○	○	○	○	○
終點	A	B	C	D	E	F

表 9

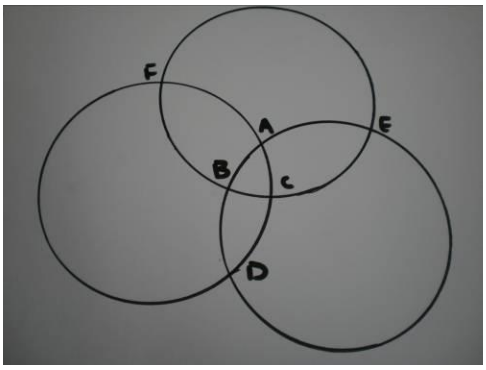


圖 10

起點	A	B	C	D	E	F
連接線段數	4	4	4	4	4	4
可否一筆畫	○	○	○	○	○	○
終點	A	B	C	D	E	F

表 10

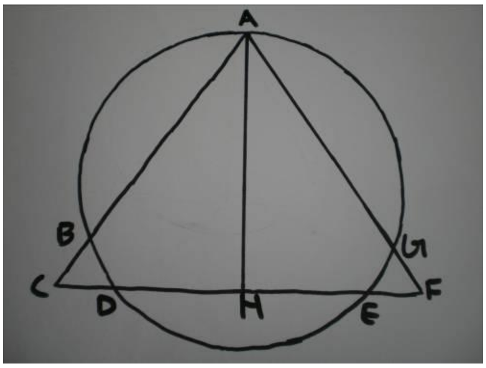


圖 11

起點	A	B	C	D	E	F	G	H
連接線段數	5	4	2	4	4	2	4	3
可否一筆畫	○	×	×	×	×	×	×	○
終點	H	×	×	×	×	×	×	A

表 11

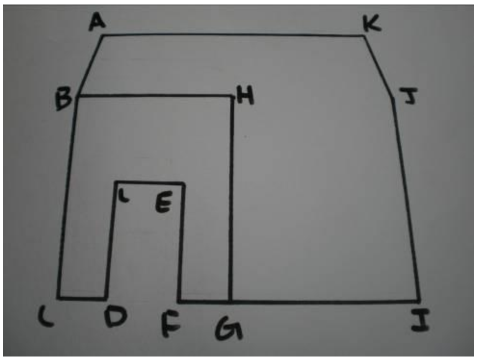


圖 12

起點	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
連接線段數	2	3	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2
可否一筆畫	×	○	×	×	×	×	○	×	×	×	×	×
終點	×	G	×	×	×	×	B	×	×	×	×	×

表 12

（二）由上述圖形的實驗中，我們歸納出以下幾點規律：

1.若圖形中的標點所連接的線段數全部是奇數（奇頂點），則圖形中任一點為起點都無法完成一筆畫(如圖一)。

2.若圖形中的標點所連接的線段數全部是偶數(偶頂點)，則圖形中的任一點為起點都能完成一筆畫，且終點亦為同一點(如圖六、圖七、圖八、圖九、圖十)。

3.若圖形各自獨立，沒有線段連結，則不論圖形中的標點所連接的線段數是奇、偶數，圖形都無法一筆畫(如圖三)。

4.若圖形中的標點所連接的線段數是奇數的點只有 2 個，其餘的點所連接的線段數都是偶數，則連接線段是奇數的點當起點可以一筆畫，且終點必為另一個奇數的點，即使連接的線段數不同也可以(如圖二、圖四、圖十一、圖十二)，而偶數的任一點當起點都無法完成一筆畫。

5.若圖形中的標點所連接的線段數是奇數的點超過 2 個，則圖形中任一點為起點都無法完成一筆畫，如圖五。

（三）根據上述規律，我們討論要如何完成這份「燈會參觀路線圖」，而做出以下幾點規劃：

1. 簡化名稱：將圖形中的交點或端點所連接的線段數是奇數的點稱為「奇頂點」，而圖形中的交點或端點所連接的線段數是偶數的點稱為「偶頂點」。
2. 依據一筆畫的規律，找出將無法一筆畫的圖形製成可以一筆畫圖形的方法，並依此方法做出一份「一筆畫燈會參觀路線圖」。

二、如何將無法一筆畫的圖形製成可以一筆畫的圖形：

由實驗一的歸納得知，圖形中的奇點若為 0 個（全部為偶點）或是 2 個時，圖形才可以一筆畫。因此，我們可以運用「加線」或「減線」的方式，讓奇點變成偶點，則圖形便可以一筆畫。

（一）加線法：如圖一

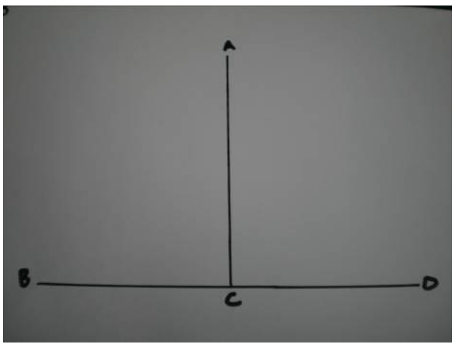


圖 1

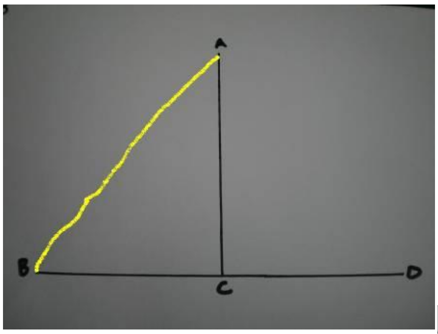


圖 1-1

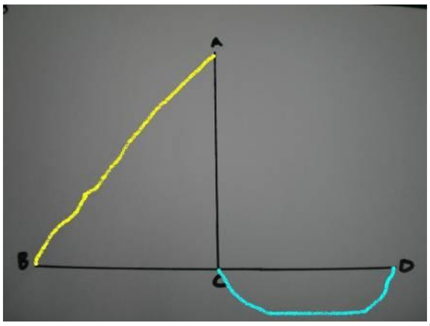


圖 1-2

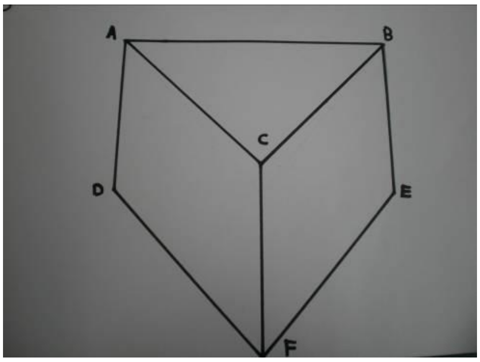
圖 1-1	起點	A	B	C	D
	連接線段數	2	2	3	1
	可否一筆畫	×	×	○	○
	終點	×	×	D	C

表 1-1

圖 1-2	起點	A	B	C	D
	連接線段數	2	2	4	2
	可否一筆畫	○	○	○	○
	終點	A	B	C	D

表 1-2

（二）減線法：如圖五



圖五

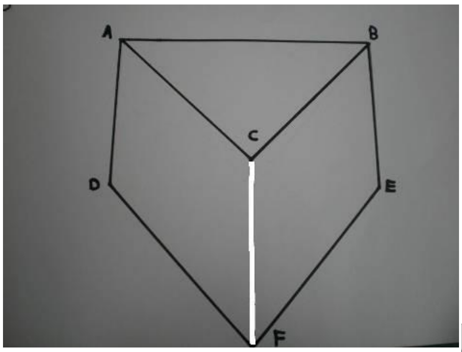


圖 5-1

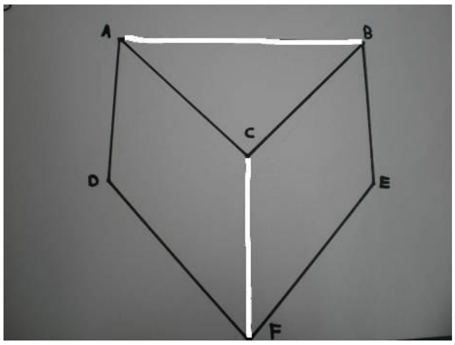


圖 5-2

圖 5-1	起點	A	B	C	D	E	F
	連接線段數	3	3	2	2	2	2
	可否一筆畫	○	○	×	×	×	×
	終點	B	A	×	×	×	×

表 5-1

圖	起點	A	B	C	D	E	F

5-2	連接線段數	2	2	2	2	2	2
	可否一筆畫	◯	◯	◯	◯	◯	◯
	終點	A	B	C	D	E	F

表 5-2

三、製作一筆畫的「燈會參觀路線圖」：

運用加、減線法來製作「家庭訪問路線圖」，其步驟如下：

（一）先至網站上翻拍「勝利星村燈區」、「萬年溪燈區」以及「縣民公園燈區」附近地圖，並將燈會作品位置，以黑點標示在地圖上，如下圖 A-1(勝利星村燈區)、圖 B-1(萬年溪燈區)、圖 C-1(縣民公園燈區)。

圖 13-1（地圖翻拍自 yahoo！奇摩地圖）

圖 14-1

圖 15-1

（二）將燈區附近的道路，配合燈會作品位置，用黃線畫出，如下圖 A-2(勝利星村燈區)、圖 B-2(萬年溪燈區)、圖 C-2(縣民公園燈區)。

圖 13-2

圖 14-2

圖 15-2

（三）將地圖中路線的奇頂點用紅點標出，如下圖 A-3(勝利星村燈區)、圖 B-3(萬年溪燈區)、圖 C-3(縣民公園燈區)。

圖 13-3

圖 14-3

圖 15-3

（四）運用加、減線的方式，讓地圖中所有的奇點都變成偶點，以完成此路線圖，如下圖 A-4(勝利星村燈區)、圖 B-4(萬年溪燈區)、圖 C-4(縣民公園燈區)。

圖 13-4

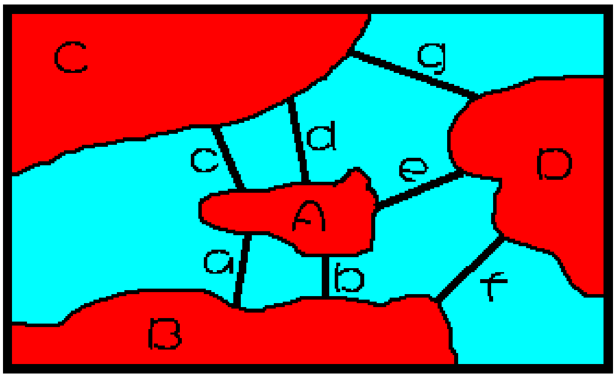
圖 14-4

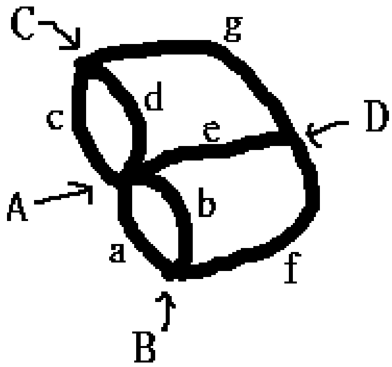
圖 15-4

(以上圖片翻拍自 Google map)

伍、討論與結論：

一、「一筆畫問題」起源於「柯尼斯堡七橋問題」。這個問題是基於一個現實生活的事例：當時東普魯士柯尼斯堡市區跨普列戈利亞河兩岸，河中心有兩個小島，小島與河的兩岸有七座橋連接。在所有橋都只能走一遍的前提下，如何才能把這個地方所有的橋都走遍？十八世紀瑞士數學家歐拉（L.Euler 1707-1783）把實際的問題簡化為平面上的點與線，將每一座橋視為一條線，橋所連接的區域視為點，這樣若從某點出發後最後再回到這點，則這一點必須是「偶點」，從柯尼斯堡七橋所形成的圖形來看，沒有一點是「偶點」，因此歐拉證明上述的方法是不可能存在的。





二、「一筆畫問題」並不是深奧的數學問題，主要的關鍵在於「奇頂點」的數目，由實驗中我們可以得知一筆畫的規律：

（一）圖形必須連結，各自獨立的圖形是無法一筆畫。

（二）圖形中的「奇頂點」數目只能是 0（全部都是「偶頂點」）或 2，其它數目的「奇頂點」是無法一筆畫。

（三）「奇頂點」數目是 0（全部都是「偶頂點」）的圖形，圖中任一點都能完成一筆畫，而且起點和終點幣為同一點。

（四）「奇頂點」數目是 2 的圖形，只能以「奇頂點」為起點才能一筆畫，而且終點必為另一個「奇點」，其餘的「偶頂點」為起點都無法完成一筆畫。

三、「一筆畫問題」可以幫助我們解決許多生活中的路徑問題，除了旅遊行程，還有參觀動線的安排，甚至連郵差送信以及社區巡守也可以加以規劃。我們運用「一筆畫原理」規劃設計的燈會參觀路線，可以盡可能地減少重複路線，卻能將所有參觀景點或作品的位置，都能確實造訪。雖然，今年屏東的燈會於 2 月 28 日即將結束，但它的璀璨、美麗，將透過這次的實驗研究與實地造訪，讓我們留下深刻的印象(如下圖)。



陸、參考資料：

一、陳文祥。國小數學、數學邏輯王。盈昇教育企業社。

二、王登傳（2001）。數學遊戲大觀。高雄市：前程出版社。

三、網路資訊：http://home.netvigator.com/~stone2448/self/writing/one.html