

屏東縣第 63 屆國中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學科

組別：國小組

作品名稱：破解了！數字九宮格魔術的關鍵

關鍵詞：去九法、倍數、餘數

編號：A1009

摘要

探討數字九宮格魔術的研究裡，我們在如何找出被抽出的數字牌過程，以及和數學課程內容相關的概念探究中，得到了許多研究成果：

- 一、被抽出的數字牌 $C_n = RS - RS_n = 9 - RS_n$
- 二、無法正確的臆測被抽出的數字牌原本放在哪個空格（位名）。
- 三、找到判別 9 的倍數方法。
- 四、找到被除數 $\div 9$ 的餘數方法，並能快速解決課本裡除數為 9 的倍數題目。
- 五、從 $(1+2+\cdots+n) \div n$ 的結果發現令人意想不到的規律性，並做更多不同的探討。

壹、研究動機

學校模範生選拔活動才藝發表時，有一位學長做了一道數學魔術的發表，表演過程是如此的：在九宮格九個格子裡任意放入 1、2、3、4、5、6、7、8、9 等九個數字牌，再加上十進位制的位名，就會形成三個三位數。此時將這九個數字牌中任意取出一個數字牌，空下來的位名用 0 代替，將新形成的三個三位數相加得到總和，並告知受測者，受測者僅知這個總和的數，要猜測取出的數字牌是哪個數字。才藝發表時，我們只看到神色自若的學長，按了按手指頭就自信的、正確的說出被取出的數字牌數字是多少，讓全校的學弟妹都驚訝不已，也讓我們陷入深思，學長是如何辦到的？我們也可以和學長一樣嗎？在好奇心驅使之下，於是我們利用午休時間一起討論，並詢問老師看法。

貳、研究目的

經過不斷的討論後，我們擬定出三項想要探討的研究目標：

- 一、研究目的（一）：能找出解題方法，算出被抽出的數字牌是哪個數字。
- 二、研究目的（二）：能找出解題方法，算出被抽出的數字牌原先是在哪個位名。
- 三、研究目的（三）：在此研究專題討論中，所得到的知識能應用在課程學習活動上。

這一連串的研究目的，和課堂學習的內容都不相同，非常值得我們好好細心研究，期待能獲得更多寶貴的知識！

參、名詞解釋與定義

為了能更清楚界定本研究所寫的用語，在此將使用的名詞做解釋與定義：

一、數字九宮格魔術：

這是本研究專題「破解了！數字九宮格魔術的關鍵」的活動名稱。活動過程是在九宮格裡任意放入1、2、3、4、5、6、7、8、9等九個數字牌，再加上十進位制的位名後，就會形成三個三位數。此時將這九個數字牌中任意取出一個數字牌，所空下來的位置用0代替，將新形成的三個三位數相加得到總和，並告知受測者，受測者只能藉由這個總和的數猜測取出的數字牌是哪個數字。

(一) C_n 代表數字牌， n 為1~9的數字， C_1 為數字牌 1……依此類推。 C_{-1} 代表被抽出的數字牌是數字 1……依此類推。

(二) S 為數字九宮格活動中尚未抽出號碼牌形成的三個三位數相加得到的總和。 S_n 為數字九宮格活動中抽出號碼牌後形成新的三個三位數相加得到的總和， n 為1~9的數字。

(三) R 是將這個數的位名去除，只把每個數字相加，直到只剩下一個一位數。

例如 $R1746=1+7+4+6=18=1+8=9$ 。

1. RS 是數字九宮格活動中尚未抽出號碼牌形成的三個三位數相加得到的總和，再將其總和的數字相加，直到只剩下一個一位數。

2. RS_n 是數字九宮格活動中抽出號碼牌後形成的三個三位數相加得到的總和，再將其總和的數字相加，直到只剩下一個一位數。

二、去九法：

去九法（又稱棄九法、棄九驗算法）是一種驗算加、減、乘、除運算的方法。去九法建構在十進位結構上，任何一個數皆可用分配律的方式，讓這個數變成一個9的倍數加上餘數的形式。例如： $ABC=100A+10B+C=(99+1)A+(9+1)B+C=9M+(A+B+C)$

肆、研究設備及器材

紙、筆、白板、筆記型電腦。

伍、研究過程與結果

一、研究目的（一）：能找出解題方法，算出被抽出的數字牌是哪個數字。

一開始，我們滿懷疑問的找老師請益，也說出了我們毫無思緒的狀況，老師笑著對我們說：「這個研究專題的關鍵要跳脫你們目前學習數學的思考模式。」於是我們再次將數字九宮格魔術過程演練一次，且每個同學都當受測者，之後將自己的想法說出來並記錄。

大家的說法都差不多，「只能用猜的」、「只知道取出一個數字牌後，形成的三個三位數相加的總和 S_n （如圖1、圖2、圖3），讓我毫無想法」、「這三個總和是找不到有何關聯性的」……，於是大家又只能望著老師，期待老師的意見。

<p>圖1</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>千位</td><td>百位</td><td>十位</td><td>個位</td></tr> <tr><td>■</td><td>0</td><td>■</td><td>■</td></tr> <tr><td>■</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr> <tr><td>合計</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr> <tr><td>1</td><td>8</td><td>3</td><td>5</td></tr> </table>	千位	百位	十位	個位	■	0	■	■	■	■	■	■	合計	■	■	■	1	8	3	5	<p>圖2</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>千位</td><td>百位</td><td>十位</td><td>個位</td></tr> <tr><td>■</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr> <tr><td>■</td><td>■</td><td>0</td><td>■</td></tr> <tr><td>合計</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr> </table>	千位	百位	十位	個位	■	■	■	■	■	■	0	■	合計	■	■	■	2	4	5	7	<p>圖3</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>千位</td><td>百位</td><td>十位</td><td>個位</td></tr> <tr><td>■</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr> <tr><td>■</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr> <tr><td>合計</td><td>0</td><td>■</td><td>■</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>7</td></tr> </table>	千位	百位	十位	個位	■	■	■	■	■	■	■	■	合計	0	■	■	1	2	3	7
千位	百位	十位	個位																																																											
■	0	■	■																																																											
■	■	■	■																																																											
合計	■	■	■																																																											
1	8	3	5																																																											
千位	百位	十位	個位																																																											
■	■	■	■																																																											
■	■	0	■																																																											
合計	■	■	■																																																											
2	4	5	7																																																											
千位	百位	十位	個位																																																											
■	■	■	■																																																											
■	■	■	■																																																											
合計	0	■	■																																																											
1	2	3	7																																																											

我們後來回想學長表演時，手指頭撥來撥去的，推測應該是透過運算後算出來的。所以老師建議我們將數字牌抽出前和抽出後的結果都記錄下來，再討論看看可以得到什麼線索，我們就照老師的說明去執行，得到的結果節錄部分如下：

未抽出數字牌	抽出數字牌	步驟																																																
<p>圖4a</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>千位</td><td>百位</td><td>十位</td><td>個位</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>4</td><td>■</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td><td>2</td><td>■</td></tr> <tr><td>9</td><td>5</td><td>7</td><td>■</td></tr> <tr><td>合計 S</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>0</td><td>3</td></tr> </table>	千位	百位	十位	個位	1	6	4	■	3	8	2	■	9	5	7	■	合計 S	■	■	■	1	5	0	3	<p>圖4b</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>千位</td><td>百位</td><td>十位</td><td>個位</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>4</td><td>■</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>2</td><td>■</td></tr> <tr><td>9</td><td>5</td><td>7</td><td>■</td></tr> <tr><td>合計 S:8</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	千位	百位	十位	個位	1	6	4	■	3	0	2	■	9	5	7	■	合計 S:8	■	■	■	1	4	2	3	<p>(1) (2) $1503-1423=80$ (3) $1503=1+5+0+3=9$ (4) $1423=1+4+2+3=10$ $=1+0=1$ (5) $9-1=8$</p>
千位	百位	十位	個位																																															
1	6	4	■																																															
3	8	2	■																																															
9	5	7	■																																															
合計 S	■	■	■																																															
1	5	0	3																																															
千位	百位	十位	個位																																															
1	6	4	■																																															
3	0	2	■																																															
9	5	7	■																																															
合計 S:8	■	■	■																																															
1	4	2	3																																															
<p>圖5a</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>千位</td><td>百位</td><td>十位</td><td>個位</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>4</td><td>■</td></tr> <tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>■</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>■</td></tr> <tr><td>合計 S</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>5</td><td>6</td></tr> </table>	千位	百位	十位	個位	6	1	4	■	2	5	3	■	7	8	9	■	合計 S	■	■	■	1	6	5	6	<p>圖5b</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>千位</td><td>百位</td><td>十位</td><td>個位</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>4</td><td>■</td></tr> <tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>■</td></tr> <tr><td>0</td><td>8</td><td>9</td><td>■</td></tr> <tr><td>合計 S:7</td><td>■</td><td>■</td><td>■</td></tr> <tr><td>9</td><td>5</td><td>6</td><td>■</td></tr> </table>	千位	百位	十位	個位	6	1	4	■	2	5	3	■	0	8	9	■	合計 S:7	■	■	■	9	5	6	■	<p>(1) $1656-956=700$ (3) $1656=1+6+5+6=18$ $=1+8=9$ (4) $956=9+5+6=20$ $=2+0=2$ (5) $9-2=7$</p>
千位	百位	十位	個位																																															
6	1	4	■																																															
2	5	3	■																																															
7	8	9	■																																															
合計 S	■	■	■																																															
1	6	5	6																																															
千位	百位	十位	個位																																															
6	1	4	■																																															
2	5	3	■																																															
0	8	9	■																																															
合計 S:7	■	■	■																																															
9	5	6	■																																															

<p>圖6a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>5</td> <td>8</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>9</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>2</td> <td>6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>合計 S</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>7</td> <td>7</td> </tr> </tbody> </table>	千位	百位	十位	個位	1	5	8		4	9	3		7	2	6		合計 S				1	3	7	7	<p>圖6b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>5</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>9</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>2</td> <td>6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>合計 S₈</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>9</td> </tr> </tbody> </table>	千位	百位	十位	個位	1	5	0		4	9	3		7	2	6		合計 S ₈				1	3	6	9	<p>(1) (2) $1377-1369=8$ (3) $1377=1+3+7+7=18$ $=1+8=9$ (4) $1369=1+3+6+9=19$ $=1+9=10=1+0=1$ (5) $9-1=8$</p>
千位	百位	十位	個位																																															
1	5	8																																																
4	9	3																																																
7	2	6																																																
合計 S																																																		
1	3	7	7																																															
千位	百位	十位	個位																																															
1	5	0																																																
4	9	3																																																
7	2	6																																																
合計 S ₈																																																		
1	3	6	9																																															
<p>圖7a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>9</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>4</td> <td>6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>5</td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td>合計 S</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>4</td> <td>9</td> <td>4</td> </tr> </tbody> </table>	千位	百位	十位	個位	2	9	1		3	4	6		8	5	7		合計 S				1	4	9	4	<p>圖7b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>9</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>4</td> <td>6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>5</td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td>合計 S₈</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>9</td> <td>4</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	千位	百位	十位	個位	2	9	1		3	4	6		0	5	7		合計 S ₈				6	9	4		<p>(1) (2) $1494-694=800$ (3) $1494=1+4+9+4=18$ $=1+8=9$ (4) $694=6+9+4=19$ $=1+9=10=1+0=1$ (5) $9-1=8$</p>
千位	百位	十位	個位																																															
2	9	1																																																
3	4	6																																																
8	5	7																																																
合計 S																																																		
1	4	9	4																																															
千位	百位	十位	個位																																															
2	9	1																																																
3	4	6																																																
0	5	7																																																
合計 S ₈																																																		
6	9	4																																																
<p>圖8a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>7</td> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>8</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>6</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>合計 S</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>7</td> <td>1</td> <td>9</td> </tr> </tbody> </table>	千位	百位	十位	個位	2	7	5		4	8	1		9	6	3		合計 S				1	7	1	9	<p>圖8b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>7</td> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>8</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>6</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>合計 S₁</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>7</td> <td>1</td> <td>8</td> </tr> </tbody> </table>	千位	百位	十位	個位	2	7	5		4	8	0		9	6	3		合計 S ₁				1	7	1	8	<p>(1) $1719-1718=1$ (3) $1719=1+7+1+9=18$ $=1+8=9$ (4) $1718=1+7+1+8=17$ $=1+7=8$ (5) $9-8=1$</p>
千位	百位	十位	個位																																															
2	7	5																																																
4	8	1																																																
9	6	3																																																
合計 S																																																		
1	7	1	9																																															
千位	百位	十位	個位																																															
2	7	5																																																
4	8	0																																																
9	6	3																																																
合計 S ₁																																																		
1	7	1	8																																															
<p>圖9a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>8</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>2</td> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>6</td> <td>9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>合計 S</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>	千位	百位	十位	個位	3	8	1		4	2	5		7	6	9		合計 S				1	5	7	5	<p>圖9b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>8</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0</td> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>6</td> <td>9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>合計 S₂</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>5</td> <td>5</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>	千位	百位	十位	個位	3	8	1		4	0	5		7	6	9		合計 S ₂				1	5	5	5	<p>(1) $1575-1555=20$ (3) $1575=1+5+7+5=18$ $=1+8=9$ (4) $1555=1+5+5+5=16$ $=1+6=7$ (5) $9-7=2$</p>
千位	百位	十位	個位																																															
3	8	1																																																
4	2	5																																																
7	6	9																																																
合計 S																																																		
1	5	7	5																																															
千位	百位	十位	個位																																															
3	8	1																																																
4	0	5																																																
7	6	9																																																
合計 S ₂																																																		
1	5	5	5																																															
<p>圖10a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>9</td> <td>8</td> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>1</td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>6</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>合計 S</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>	千位	百位	十位	個位	9	8	5		4	1	7		2	6	3		合計 S				1	6	6	5	<p>圖10b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>9</td> <td>8</td> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>1</td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>6</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>合計 S₃</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	千位	百位	十位	個位	9	8	5		4	1	7		2	6	0		合計 S ₃				1	6	6	2	<p>(1) $1665-1662=3$ (3) $1665=1+6+6+5=18$ $=1+8=9$ (4) $1662=1+6+6+2=15$ $=1+5=6$ (5) $9-6=3$</p>
千位	百位	十位	個位																																															
9	8	5																																																
4	1	7																																																
2	6	3																																																
合計 S																																																		
1	6	6	5																																															
千位	百位	十位	個位																																															
9	8	5																																																
4	1	7																																																
2	6	0																																																
合計 S ₃																																																		
1	6	6	2																																															
<p>圖11a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>2</td> <td>8</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>4</td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>9</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>合計 S</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> </tbody> </table>	千位	百位	十位	個位	6	2	8		5	4	7		1	9	3		合計 S				1	3	6	8	<p>圖11b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>2</td> <td>8</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>0</td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>9</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>合計 S₄</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>8</td> </tr> </tbody> </table>	千位	百位	十位	個位	6	2	8		5	0	7		1	9	3		合計 S ₄				1	3	2	8	<p>(1) $1368-1328=40$ (3) $1368=1+3+6+8=18$ $=1+8=9$ (4) $1328=1+3+2+8=14$ $=1+4=5$ (5) $9-5=4$</p>
千位	百位	十位	個位																																															
6	2	8																																																
5	4	7																																																
1	9	3																																																
合計 S																																																		
1	3	6	8																																															
千位	百位	十位	個位																																															
6	2	8																																																
5	0	7																																																
1	9	3																																																
合計 S ₄																																																		
1	3	2	8																																															

<p>圖12a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S</td> <td>2</td> <td>7</td> <td>8</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>9</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>4</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>5</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S	2	7	8		5	9	3		6	4	1			1	5	1	2	<p>圖12b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S-5</td> <td>2</td> <td>7</td> <td>8</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>9</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>4</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S-5	2	7	8		0	9	3		6	4	1			1	0	1	2	<p>(1) $1512-1017=500$ (3) $1512=1+5+1+2=9$ (4) $1012=1+0+1+2=4$ (5) $9-4=5$</p>
	千位	百位	十位	個位																																												
合計 S	2	7	8																																													
	5	9	3																																													
	6	4	1																																													
	1	5	1	2																																												
	千位	百位	十位	個位																																												
合計 S-5	2	7	8																																													
	0	9	3																																													
	6	4	1																																													
	1	0	1	2																																												
<p>圖13a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S</td> <td>9</td> <td>5</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>7</td> <td>6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>1</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>2</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S	9	5	2		4	7	6		8	1	3			2	2	4	1	<p>圖13b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S-6</td> <td>9</td> <td>5</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>7</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>1</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>2</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S-6	9	5	2		4	7	0		8	1	3			2	2	3	5	<p>(1) $2241-2235=6$ (3) $2241=2+2+4+1=9$ (4) $2235=2+2+3+5=12$ $=1+2=3$ (5) $9-3=6$</p>
	千位	百位	十位	個位																																												
合計 S	9	5	2																																													
	4	7	6																																													
	8	1	3																																													
	2	2	4	1																																												
	千位	百位	十位	個位																																												
合計 S-6	9	5	2																																													
	4	7	0																																													
	8	1	3																																													
	2	2	3	5																																												
<p>圖14a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>6</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>7</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>5</td> <td>8</td> <td>4</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S	1	4	9		5	6	2		8	7	3			1	5	8	4	<p>圖14b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S-9</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>6</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>7</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S-9	1	4	0		5	6	2		8	7	3			1	5	7	5	<p>(1) $1584-1575=9$ (3) $1584=1+5+8+4=18$ $=1+8=9$ (4) $1575=1+5+7+5=18$ $18=1+8=9$ (5) $9-9=0$</p>
	千位	百位	十位	個位																																												
合計 S	1	4	9																																													
	5	6	2																																													
	8	7	3																																													
	1	5	8	4																																												
	千位	百位	十位	個位																																												
合計 S-9	1	4	0																																													
	5	6	2																																													
	8	7	3																																													
	1	5	7	5																																												

在不斷的觀察、討論、猜測及驗證下，我們將研究目的（一）步驟記錄如下：

- (1) $S - S_n$ ：我們將未抽出數字牌的合計和抽出數字牌的合計相減，圖4ab~圖14ab分別相減，得到的結果都和被抽出的數字牌有關，例如：相減的結果是 800，但抽出的數字牌是 8，如何找出這二個關聯性是首要的關鍵。
- (2) 圖4ab、圖6ab和圖7ab相差分別是 80、8、800，但抽出的號碼牌都是 8，因 8 所在位名不同，代表的值也不同。但我們在遊戲受測時只能知道抽出該數字牌後，形成的三個三位數相加的總和 S_n ，也無法斷定該數字牌會放在百位、十位、個位哪一個位名，所以萌生了將位名去掉的念頭。
- (3) RS：綜合（1）、（2），我們將圖4a~圖14a的合計分別去除位名相加，得到的數不是 9 就是 18，後來我們發現再將 $1+8$ 也是 9。這個過程讓我們知道：將每一個遊戲中尚未抽出數字牌形成的三個三位數相加得到的總和，再將其總和的數字相加，直到只剩下一位數都會等於 9，即 $RS=9$ 。這個結果讓我們如獲至寶，因為 9 這個數正是我們討論許久，想到透過減法算式計算答案的「被減數」。

- (4) 依 (3) 的方法，我們也將圖4b~圖14b抽出數字牌的合計分別算出 RS_n 的數字。我們將所得到的 RS_n 視為減法算式中的「減數」。
- (5) 我們將其上述 (3) 和項目 (4) 分別得到的「被減數」和「減數」，用減法算式相減，所得的「差」真的就是抽出的數字卡，即 $RS-RS_n=C_n$ 。如圖4ab~圖13ab (5)。
- (6) 其中圖14ab稍有不同，因為其 $RS-RS_n$ 相減結果為「0」，不是「9」，所以，我們再多做被抽出的號碼牌是 9 的情形，如圖15ab、圖16ab、圖17ab，其結果都是和圖14ab是一樣的。由此結果，我們把 $RS-RS_n=0$ 的情形，就視為抽出的數字牌為「9」的結果。另外也可以說當 $RS_n=9$ ，就可代表抽出的號碼牌為「9」。

下圖15ab~17ab 為驗證步驟 (6) $RS-RS_n=0$ 的過程及結果。

未抽出數字牌				抽出數字牌				
圖15a 千位 百位 十位 個位 合計 S 1 7 4 6				圖15b 千位 百位 十位 個位 合計 S ₉ 8 4 6				(1) $1746-846=900$ (3) $1746=1+7+4+6=18$ $18=1+8=9$ (4) $846=8+4+6=18$ $18=1+8=9$ (5) $9-9=0$
圖16a 千位 百位 十位 個位 合計 S 1 2 8 7				圖16b 千位 百位 十位 個位 合計 S ₉ 1 1 9 7				(1) $1287-1197=90$ (3) $1287=1+2+8+7=18$ $18=1+8=9$ (4) $1197=1+1+9+7=18$ $18=1+8=9$ (5) $9-9=0$
圖17a 千位 百位 十位 個位 合計 S 1 6 5 6				圖17b 千位 百位 十位 個位 合計 S ₉ 1 6 4 7				(1) $1656-1647=9$ (3) $1656=1+6+5+6=18$ $18=1+8=9$ (4) $1647=1+6+4+7=18$ $18=1+8=9$ (5) $9-9=0$

上圖15ab~17ab 驗證了 $RS-RS_n=0$ 的情形，就視為抽出的數字牌為「9」的假設，這一個結果也確定了我們達成研究目的 (一)：能找出解題方法，算出被抽出的數字牌是哪個數字。

<補充證明>

「去九法」是古代就有的一種驗算加、減、乘、除運算的方法。我們發現：運用「去九法」驗算減法過程中，其運用的方法竟和我們的研究步驟不謀而合，而且我們在數字九宮格魔術過程中，算出了「被減數=9」是數字九宮格魔術最為關鍵的部分。

由上圖1~圖17ab記錄了我們對研究目的（一）的所有歷程，從一開始完全摸不著頭緒的情況之下，透過不斷的觀察、討論、臆測及驗證之下，完成了這個研究目的（一），最後我們再將如何算出被抽出數字牌的方法記錄下來：

$$\text{抽出的號碼牌 } C_n = RS - RS_n = 9 - RS_n$$

二、研究目的（二）：能找出解題方法，算出被抽出的數字牌原先是放在哪個位名。

找出研究目的（一）的解題方法讓大家都很開心，也更有信心面對研究目的（二）的挑戰，我們使用了還原法和數字組合法來討論。

1.方法（1）還原法：透過研究目的（一）的解題方法算出 $C_n = RS - RS_n = 9 - RS_n$ ，若我們將其還原，即分別在個位、十位、百位加上被抽出的數字牌後，分別可以得到三個不同的和 $S_{n個}$ 、 $S_{n十}$ 、 $S_{n百}$ ，再分別算出 $RS_{n個}$ 、 $RS_{n十}$ 、 $RS_{n百}$ 哪個為 9，就可以知道數字牌是放在哪個位名。以下圖18ab 做說明

未抽出數字牌				抽出數字牌				計算過程
圖18a				圖18b				(1) $RS_{-8} 694 = 6+9+4 = 19$ $= 1+9 = 10 = 1+0 = 1$ (2) $RS - RS_{-8} = 9 - 1 = 8$ (3) $RS_{n個} 694 + 8 = 702 = 9$ (4) $RS_{n十} 694 + 80 = 774 = 9$ (5) $RS_{n百} 694 + 800 = 1494 = 9$
千位	百位	十位	個位	千位	百位	十位	個位	
	2	9	1		2	9	1	
合計 S	3	4	6	合計 S ₋₈	3	4	6	
	8	5	7		0	5	7	
1	4	9	4	6	9	4		

原以為抽出的數字牌 8 只有還原加在百位時， $RS_{n百}$ 才會等於 9，結果將數字牌 8 加在個位及十位時 $RS_{n個}$ 、 $RS_{n十}$ 竟然也都會等於 9，這樣不就代表個位或者十位這一個位名就有4個數字相加，且相加後的 $RS=9$ 。後來仔細思考，原因在於我們在探究過程中會將位名去掉，就相當於 1~9 這九個數字相加而已。所以運用方法（1）還原法，是無法正確算出被抽出的數字牌原先放在哪個位名。

2.方法(2) 數字組合法：已知抽出數字牌 C_n 及抽出數字牌的總和 S_n 。先將抽出的數字牌 C_n 分別放在個位、十位和百位這三種不同的情形討論，再針對抽出數字牌總和 S_n 的個位數字、十位數字和百位數字，由 1~9 這九個數字的組合情形來研究、分析各種組合的可能性，最後判斷是否能正確算出抽出的數字牌放在哪個位名。以圖19 來討論：

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="4" style="text-align: center;">圖19</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">千位</td><td style="text-align: center;">百位</td><td style="text-align: center;">十位</td><td style="text-align: center;">個位</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">a</td><td style="text-align: center;">b</td><td style="text-align: center;">c</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">合計 S_{-8}</td><td style="text-align: center;">d</td><td style="text-align: center;">e</td><td style="text-align: center;">0</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">g</td><td style="text-align: center;">h</td><td style="text-align: center;">i</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table> <p style="margin-top: 10px;">抽出數字為 8</p>	圖19				千位	百位	十位	個位		a	b	c	合計 S_{-8}	d	e	0		g	h	i	1	6	7	5	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="4" style="text-align: center;">圖19-1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">千位</td><td style="text-align: center;">百位</td><td style="text-align: center;">十位</td><td style="text-align: center;">個位</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">合計 S_{-8}</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">0</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	圖19-1				千位	百位	十位	個位		3	2	1	合計 S_{-8}	5	6	0		7	9	4	1	6	7	5	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="4" style="text-align: center;">圖19-2</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">千位</td><td style="text-align: center;">百位</td><td style="text-align: center;">十位</td><td style="text-align: center;">個位</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">合計 S_{-8}</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">0</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	圖19-2				千位	百位	十位	個位		2	3	1	合計 S_{-8}	6	5	0		7	9	4	1	6	7	5
圖19																																																																										
千位	百位	十位	個位																																																																							
	a	b	c																																																																							
合計 S_{-8}	d	e	0																																																																							
	g	h	i																																																																							
1	6	7	5																																																																							
圖19-1																																																																										
千位	百位	十位	個位																																																																							
	3	2	1																																																																							
合計 S_{-8}	5	6	0																																																																							
	7	9	4																																																																							
1	6	7	5																																																																							
圖19-2																																																																										
千位	百位	十位	個位																																																																							
	2	3	1																																																																							
合計 S_{-8}	6	5	0																																																																							
	7	9	4																																																																							
1	6	7	5																																																																							
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="4" style="text-align: center;">圖19-3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">千位</td><td style="text-align: center;">百位</td><td style="text-align: center;">十位</td><td style="text-align: center;">個位</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">2</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">合計 S_{-8}</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">0</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	圖19-3				千位	百位	十位	個位		4	1	2	合計 S_{-8}	5	7	0		6	9	3	1	6	7	5	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="4" style="text-align: center;">圖19-4</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">千位</td><td style="text-align: center;">百位</td><td style="text-align: center;">十位</td><td style="text-align: center;">個位</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">2</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">合計 S_{-8}</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">0</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	圖19-4				千位	百位	十位	個位		1	4	2	合計 S_{-8}	5	6	0		9	7	3	1	6	7	5	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="4" style="text-align: center;">圖19-5</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">千位</td><td style="text-align: center;">百位</td><td style="text-align: center;">十位</td><td style="text-align: center;">個位</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">6</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">合計 S_{-8}</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">0</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">9</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	圖19-5				千位	百位	十位	個位		4	1	6	合計 S_{-8}	5	2	0		7	3	9	1	6	7	5
圖19-3																																																																										
千位	百位	十位	個位																																																																							
	4	1	2																																																																							
合計 S_{-8}	5	7	0																																																																							
	6	9	3																																																																							
1	6	7	5																																																																							
圖19-4																																																																										
千位	百位	十位	個位																																																																							
	1	4	2																																																																							
合計 S_{-8}	5	6	0																																																																							
	9	7	3																																																																							
1	6	7	5																																																																							
圖19-5																																																																										
千位	百位	十位	個位																																																																							
	4	1	6																																																																							
合計 S_{-8}	5	2	0																																																																							
	7	3	9																																																																							
1	6	7	5																																																																							
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="4" style="text-align: center;">圖19-6</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">千位</td><td style="text-align: center;">百位</td><td style="text-align: center;">十位</td><td style="text-align: center;">個位</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">2</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">合計 S_{-8}</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">6</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">7</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	圖19-6				千位	百位	十位	個位		3	0	2	合計 S_{-8}	4	1	6		9	5	7	1	6	7	5	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="4" style="text-align: center;">圖19-7</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">千位</td><td style="text-align: center;">百位</td><td style="text-align: center;">十位</td><td style="text-align: center;">個位</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">合計 S_{-8}</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">9</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	圖19-7				千位	百位	十位	個位		3	0	1	合計 S_{-8}	6	2	5		7	4	9	1	6	7	5	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="4" style="text-align: center;">圖19-8</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">千位</td><td style="text-align: center;">百位</td><td style="text-align: center;">十位</td><td style="text-align: center;">個位</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">2</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">合計 S_{-8}</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">9</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	圖19-8				千位	百位	十位	個位		3	0	2	合計 S_{-8}	6	1	4		7	5	9	1	6	7	5
圖19-6																																																																										
千位	百位	十位	個位																																																																							
	3	0	2																																																																							
合計 S_{-8}	4	1	6																																																																							
	9	5	7																																																																							
1	6	7	5																																																																							
圖19-7																																																																										
千位	百位	十位	個位																																																																							
	3	0	1																																																																							
合計 S_{-8}	6	2	5																																																																							
	7	4	9																																																																							
1	6	7	5																																																																							
圖19-8																																																																										
千位	百位	十位	個位																																																																							
	3	0	2																																																																							
合計 S_{-8}	6	1	4																																																																							
	7	5	9																																																																							
1	6	7	5																																																																							
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="4" style="text-align: center;">圖19-9</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">千位</td><td style="text-align: center;">百位</td><td style="text-align: center;">十位</td><td style="text-align: center;">個位</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">合計 S_{-8}</td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">6</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	圖19-9				千位	百位	十位	個位		0	1	4	合計 S_{-8}	9	2	5		7	3	6	1	6	7	5																																																		
圖19-9																																																																										
千位	百位	十位	個位																																																																							
	0	1	4																																																																							
合計 S_{-8}	9	2	5																																																																							
	7	3	6																																																																							
1	6	7	5																																																																							

由上圖19-1~圖19-9 都是抽出數字牌 8 後，三個三位數的合計都符合 1675 的情形：若 8 是在個位，我們找到 5 組答案；若 8 是在十位，我們找到 3 組答案；若 8 是在百位，

我們找到 1 組答案，合計 9 組答案，而且我們是將相同位名不同位置都當成同一組答案的情況下就有 9 組答案，若再考慮相同位名不同位置的組合情形，答案會更多組，所以運用方法（2）數字組合法也無法正確判斷被抽出的數字牌是在哪個位名。

<結論>研究目的（二）我們無法正確的判斷出被抽出的數字牌是在哪個位名。因為我們想出的這二種不同的方法，都無法找到唯一的一組答案，也許在玩數字九宮格魔術中如果能多提供一些條件，或許就可以正確判斷被抽出的數字牌是在哪個位名了。

三、研究目的（三）：在此研究專題討論中，所得到的知識能應用在課程學習活動上。

在探討研究目的（一）的過程中，我們遭遇到了很多問題，也從中發現不少和課程有相關的概念，我們也藉這次的專題研究來探究一番，看看能否有更多的收穫。

1. 「倍數」：

我們在探討研究目的（一）的過程中，發現未抽出數字牌時三個三位數合計的數 S ，經過去掉位名後加總起來都是 9 ($RS=9$)，於是我們就臆測未抽出數字牌時的合計 S 是否是「9」的倍數？因為在計算 RS 時的方法和「如何判別 3 的倍數方法」類似。另外抽出數字牌時的合計 RS_n 又代表什麼意義呢？於是我們製作圖表來探究：

未抽出數字牌		抽出數字牌																																															
<table border="1"> <tr><td colspan="4">圖20a</td></tr> <tr><td>千位</td><td>百位</td><td>十位</td><td>個位</td></tr> <tr><td></td><td>5</td><td>7</td><td>1</td></tr> <tr><td rowspan="3">合計 S</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>9</td><td>8</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	圖20a				千位	百位	十位	個位		5	7	1	合計 S	4	6	3	2	9	8	1	3	3	2	$1332 \div 9 = 148 \cdots 0$	<table border="1"> <tr><td colspan="4">圖20b</td></tr> <tr><td>千位</td><td>百位</td><td>十位</td><td>個位</td></tr> <tr><td></td><td>5</td><td>7</td><td>0</td></tr> <tr><td rowspan="3">合計 S₁</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>9</td><td>8</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr> </table>	圖20b				千位	百位	十位	個位		5	7	0	合計 S ₁	4	6	3	2	9	8	1	3	3	1	$1331 \div 9 = 147 \cdots 8$ $RS_1: 1331 = 1+3+3+1 = 8$
圖20a																																																	
千位	百位	十位	個位																																														
	5	7	1																																														
合計 S	4	6	3																																														
	2	9	8																																														
	1	3	3	2																																													
圖20b																																																	
千位	百位	十位	個位																																														
	5	7	0																																														
合計 S ₁	4	6	3																																														
	2	9	8																																														
	1	3	3	1																																													
<table border="1"> <tr><td colspan="4">圖21a</td></tr> <tr><td>千位</td><td>百位</td><td>十位</td><td>個位</td></tr> <tr><td></td><td>8</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td rowspan="3">合計 S</td><td>4</td><td>2</td><td>9</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>9</td><td>5</td><td>3</td></tr> </table>	圖21a				千位	百位	十位	個位		8	5	1	合計 S	4	2	9	6	7	3	1	9	5	3	$1953 \div 9 = 217 \cdots 0$	<table border="1"> <tr><td colspan="4">圖21b</td></tr> <tr><td>千位</td><td>百位</td><td>十位</td><td>個位</td></tr> <tr><td></td><td>8</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td rowspan="3">合計 S₂</td><td>4</td><td>0</td><td>9</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>9</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	圖21b				千位	百位	十位	個位		8	5	1	合計 S ₂	4	0	9	6	7	3	1	9	3	3	$1933 \div 9 = 214 \cdots 7$ $RS_2: 1933 = 1+9+3+3 = 16 = 1+6 = 7$
圖21a																																																	
千位	百位	十位	個位																																														
	8	5	1																																														
合計 S	4	2	9																																														
	6	7	3																																														
	1	9	5	3																																													
圖21b																																																	
千位	百位	十位	個位																																														
	8	5	1																																														
合計 S ₂	4	0	9																																														
	6	7	3																																														
	1	9	3	3																																													

<p>圖22a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S</td> <td>6</td> <td>4</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>7</td> <td>9</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>6</td> <td>4</td> <td>7</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S	6	4	3		1	2	5		8	7	9			1	6	4	7	$1647 \div 9 = 183 \cdots 0$	<p>圖22b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S₃</td> <td>6</td> <td>4</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>7</td> <td>9</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>6</td> <td>4</td> <td>4</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S ₃	6	4	0		1	2	5		8	7	9			1	6	4	4	$1644 \div 9 = 182 \cdots 6$ $RS_3 1644 = 1 + 6 + 4 + 4$ $= 15 = 1 + 5 = 6$
	千位	百位	十位	個位																																													
合計 S	6	4	3																																														
	1	2	5																																														
	8	7	9																																														
	1	6	4	7																																													
	千位	百位	十位	個位																																													
合計 S ₃	6	4	0																																														
	1	2	5																																														
	8	7	9																																														
	1	6	4	4																																													
<p>圖23a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S</td> <td>5</td> <td>8</td> <td>9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>6</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>4</td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>0</td> <td>9</td> <td>8</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S	5	8	9		1	6	2		3	4	7			1	0	9	8	$1098 \div 9 = 122 \cdots 0$	<p>圖23b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S₄</td> <td>5</td> <td>8</td> <td>9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>6</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0</td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>0</td> <td>5</td> <td>8</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S ₄	5	8	9		1	6	2		3	0	7			1	0	5	8	$1058 \div 9 = 117 \cdots 5$ $RS_4 1058 = 1 + 0 + 5 + 8$ $= 14 = 1 + 4 = 5$
	千位	百位	十位	個位																																													
合計 S	5	8	9																																														
	1	6	2																																														
	3	4	7																																														
	1	0	9	8																																													
	千位	百位	十位	個位																																													
合計 S ₄	5	8	9																																														
	1	6	2																																														
	3	0	7																																														
	1	0	5	8																																													
<p>圖24a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S</td> <td>1</td> <td>7</td> <td>8</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>6</td> <td>9</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>1</td> <td>7</td> <td>9</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S	1	7	8		4	3	2		5	6	9			1	1	7	9	$1179 \div 9 = 131 \cdots 0$	<p>圖24b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S₅</td> <td>1</td> <td>7</td> <td>8</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>6</td> <td>9</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>6</td> <td>7</td> <td>9</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S ₅	1	7	8		4	3	2		0	6	9			6	7	9		$679 \div 9 = 75 \cdots 4$ $RS_5 679 = 6 + 7 + 9 = 22$ $= 2 + 2 = 4$
	千位	百位	十位	個位																																													
合計 S	1	7	8																																														
	4	3	2																																														
	5	6	9																																														
	1	1	7	9																																													
	千位	百位	十位	個位																																													
合計 S ₅	1	7	8																																														
	4	3	2																																														
	0	6	9																																														
	6	7	9																																														
<p>圖25a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S</td> <td>9</td> <td>6</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>5</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>4</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>2</td> <td>5</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S	9	6	3		8	5	2		7	4	1			2	5	5	6	$2556 \div 9 = 284 \cdots 0$	<p>圖25b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S₆</td> <td>9</td> <td>0</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>5</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>4</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>2</td> <td>4</td> <td>9</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S ₆	9	0	3		8	5	2		7	4	1			2	4	9	6	$2496 \div 9 = 277 \cdots 3$ $RS_6 2496 = 2 + 4 + 9 + 6$ $= 21 = 2 + 1 = 3$
	千位	百位	十位	個位																																													
合計 S	9	6	3																																														
	8	5	2																																														
	7	4	1																																														
	2	5	5	6																																													
	千位	百位	十位	個位																																													
合計 S ₆	9	0	3																																														
	8	5	2																																														
	7	4	1																																														
	2	4	9	6																																													
<p>圖26a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S</td> <td>3</td> <td>5</td> <td>9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>7</td> <td>4</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>3</td> <td>5</td> <td>9</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S	3	5	9		1	2	6		8	7	4			1	3	5	9	$1359 \div 9 = 151 \cdots 0$	<p>圖26b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S₇</td> <td>3</td> <td>5</td> <td>9</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>0</td> <td>4</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>8</td> <td>9</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S ₇	3	5	9		1	2	6		8	0	4			1	2	8	9	$1289 \div 9 = 143 \cdots 2$ $RS_7 1289 = 1 + 2 + 8 + 9$ $= 20 = 2 + 0 = 2$
	千位	百位	十位	個位																																													
合計 S	3	5	9																																														
	1	2	6																																														
	8	7	4																																														
	1	3	5	9																																													
	千位	百位	十位	個位																																													
合計 S ₇	3	5	9																																														
	1	2	6																																														
	8	0	4																																														
	1	2	8	9																																													
<p>圖27a</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S</td> <td>8</td> <td>6</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>4</td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>9</td> <td>3</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S	8	6	3		1	2	5		9	4	7			1	9	3	5	$1935 \div 9 = 215 \cdots 0$	<p>圖27b</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>千位</th> <th>百位</th> <th>十位</th> <th>個位</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">合計 S₈</td> <td>0</td> <td>6</td> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>4</td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>		千位	百位	十位	個位	合計 S ₈	0	6	3		1	2	5		9	4	7			1	1	3	5	$1135 \div 9 = 126 \cdots 1$ $RS_8 1135 = 1 + 1 + 3 + 5$ $= 10 = 1 + 0 = 1$
	千位	百位	十位	個位																																													
合計 S	8	6	3																																														
	1	2	5																																														
	9	4	7																																														
	1	9	3	5																																													
	千位	百位	十位	個位																																													
合計 S ₈	0	6	3																																														
	1	2	5																																														
	9	4	7																																														
	1	1	3	5																																													

圖28a				$1746 \div 9 = 194 \cdots 0$	圖28b				$1737 \div 9 = 193 \cdots 0$ $RS_9: 1737 = 1+7+3+7$ $= 18 = 1+8 = 9$		
千位	百位	十位	個位		千位	百位	十位	個位			
合計 S	6	5	4		6	5	4	6		5	4
	2	1	3		2	1	3	2		1	3
	8	7	9		8	7	0	8		7	0
1	7	4	6	1	7	3	7	1	7	3	7

由上圖20ab~圖28ab 的算式中，運用了除法算式和 RS_n 計算，得到了幾個重點：

- (1) 所有的 S 都是 9 的倍數。由圖20a、圖21a~圖28a 除法算式計算後得到，也就是，在九宮格中任意填入 1~9 的數字後合計的數 S 除以 9 都會整除。
- (2) $S_1 \sim S_8$ 都不是 9 的倍數，且 $S_1 \div 9$ 的餘數 $=RS_1$ 、 $S_2 \div 9$ 的餘數 $=RS_2 \cdots$ 依此類推。由圖20b、圖21b~圖27b知道，在九宮格中任意填入1~9的數字後，抽出的數字牌如果是 1~8，合計的數 S_n 除以 9 都不會整除，且其餘數和 RS_n 的數字是相同的。
- (3) S_9 是 9 的倍數，因為抽出的數字 9 本身也是 9 的倍數。
- (4) RS 的計算過程就是「判別 9 的倍數方法」，和「判別 3 的倍數方法」類似。
- (5) 若在研究目的（一）過程中就不管位名，直接將九個數字相加，則圖20a、圖21a~圖28a的情形就相當於 1~9 這 9 個數字相加，其總和是 45， $45=4+5=9$ 也是 9 的倍數。

<應用> 將上述的重點（2）與重點（4）結合，我們可以應用在六年級上學期數學課本和「倍數」有相關的題目：

題目1：6500是不是9的倍數？若不是，9的倍數中比6500小，且最接近6500的數是多少？	
課本方法	快速方法
解題步驟 (1) $\begin{array}{r} 7 \ 2 \ 2 \\ 9 \overline{) 6 \ 5 \ 0 \ 0} \\ \underline{6 \ 3} \\ 2 \ 0 \\ \underline{1 \ 8} \\ 2 \ 0 \\ \underline{1 \ 8} \\ 2 \end{array}$ 不是9的倍數 (2) $\begin{array}{r} 7 \ 2 \ 2 \\ \times \\ \hline 6 \ 4 \ 9 \ 8 \end{array}$	想法 (1) $6+5+0+0=11=1+1=2$ ，不是9的倍數，且2是6500除以9的餘數 (2) 因為餘數是2，本題目要求出比6500小所以 $6500-2=6498$ 6498就是本題的答案 解題步驟 (1) $6+5+0+0=11=1+1=2$ (2) $6500-2=6498$

題目2：5000是不是9的倍數？若不是，9的倍數中比5000大，且最接近5000的數是多少？	
課本方法	快速方法
<p>解題步驟</p> <p>(1)</p> $\begin{array}{r} 5 \ 5 \ 5 \\ 9 \overline{) 5 \ 0 \ 0 \ 0} \\ \underline{4 \ 5} \\ 5 \ 0 \\ \underline{4 \ 5} \\ 5 \ 0 \\ \underline{4 \ 5} \\ 5 \end{array}$ <p>不是9的倍數</p> <p>(2) $555+1=556$</p> <p>(3)</p> $\begin{array}{r} 5 \ 5 \ 6 \\ \times \\ \hline 5 \ 0 \ 0 \ 4 \end{array}$	<p>想法</p> <p>(1) $5+0+0+0=5$，不是9的倍數，且5是5000除以9的餘數</p> <p>(2) 因為餘數是5，本題目要求出比5000大 $9-5=4$代表再加上4就是下一個9的倍數 $5000+4=5004$，5004就是本題的答案</p> <p>解題步驟</p> <p>(1) $5+0+0+0=5$</p> <p>(2) $9-5=4$</p> <p>(3) $5000+4=5004$</p>

由上面兩個題目中「課本方法」和「快速方法」兩種不同的解題方法中，「快速方法」確實可以用很短的時間就可以正確的解出答案，關鍵在於能快速找出「9 的餘數」也就是計算 RS 的結果，並善用餘數的觀念，就可以很快解出答案。

缺點是「快速方法」找出餘數僅能用在除數為 9 的題目中，無法用在除數不為 9 的題目。但餘數的觀念可以用在只要除數不為 0 的題目都可以。

2. 「規律性」：

在上述討論「倍數」結果的第(4)重點裡，我們又提出和課程相關的問題：從 1 加到 9 是 9 的倍數，那麼從 $1+2+3+\dots+n$ ，會是 n 的倍數嗎？好奇心強烈的我們於是製做表1 記錄我們的做法：

表1 (1+2+3+……+ n)

項數	總和	總和除以項數
1	1	$1 \div 1 = 1$
2	$1+2=3$	$3 \div 2 = 1 \cdots 1$
3	$1+2+3=6$	$6 \div 3 = 2$
4	$1+2+3+4=10$	$10 \div 4 = 2 \cdots 2$
5	$1+2+3+4+5=15$	$15 \div 5 = 3$
6	$1+2+3+4+5+6=21$	$21 \div 6 = 3 \cdots 3$
7	$1+2+3+4+5+6+7=28$	$28 \div 7 = 4$
8	$1+2+3+4+5+6+7+8=36$	$36 \div 8 = 4 \cdots 4$
9	$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$	$45 \div 9 = 5$
10	$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$	$55 \div 10 = 5 \cdots 5$
11	$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66$	$66 \div 11 = 6$
12	$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78$	$78 \div 12 = 6 \cdots 6$
13	$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13=91$	$91 \div 13 = 7$
14	$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=105$	$105 \div 14 = 7 \cdots 7$
15	$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15=120$	$120 \div 15 = 8$
16	$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16=136$	$136 \div 16 = 8 \cdots 8$
17	$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17=153$	$153 \div 17 = 9$
18	$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18=171$	$171 \div 18 = 9 \cdots 9$
19	$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19=190$	$190 \div 19 = 10$
20	$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20=210$	$210 \div 20 = 10 \cdots 10$

從表1可以得知：

(1) 奇數個項數的總和會是奇數個項數的倍數，且商= (奇數個項數+1) \div 2。

所以，奇數個項數的總和=商 \times 奇數個項數

(2) 偶數個項數的總和不會是偶數個項數的倍數。且商=餘數=偶數個項數 \div 2

所以，偶數個項數的總和=商×偶數個項數+餘數

由上述（1）、（2）的規律性，我們可以快速且正確的回答下列問題：

題目1：若從1加到101的總和是不是101的倍數？商會是多少？總和是多少？	規律性方法 (1)總和是項數的倍數 (2)商 $(101+1) \div 2 = 51$ (3)總和 $= 51 \times 101 = 5151$	教科書方法 (1)總和 $(1+101) \times 101 \div 2 = 5151$ (2) $5151 \div 101 = 51 \cdots 0$ (3)總和是項數的倍數
題目2：從1加到1000的總和是不是1000的倍數？商會是多少？總和是多少？	(1)總和不是項數的倍數 (2)商=餘數 $= 1000 \div 2 = 500$ (3)總和 $= 1000 \times 500 + 500 = 500500$	(1) $(1+1000) \times 1000 \div 2 = 500500$ (2) $500500 \div 1000 = 500 \cdots 500$ (3)總和不是項數的倍數
<兩種方法比較>	(1)教科書方法：會先算出總和，再除以項數，求得商和餘數，最後判斷是否為其項數的倍數。 (2)規律性方法：可以先判斷是否為其項數的倍數，接著算出商和餘數，最後再算出總和。 (3) 當項數很多，要算出總和時，不可能一項一項加，而求總和的方法要到國中課程才會學到。但運用規律性方法解題其計算算式都是國小已經學過的。	

由於上述的規律太有趣了，也獲得很多不同於教科書的解題方法，於是我們又針對項數之間相差2的情形討論 $(1+3+5+\cdots+n)$ ，我們將紀錄做成表2

表2 $(1+3+5+\cdots+n)$

個數	個數總和	總和除以個數
1	1	$1 \div 1 = 1$
2	$1+3=4$	$4 \div 2 = 2$
3	$1+3+5=9$	$9 \div 3 = 3$
4	$1+3+5+7=16$	$16 \div 4 = 4$
5	$1+3+5+7+9=25$	$25 \div 5 = 5$
6	$1+3+5+7+9+11=36$	$36 \div 6 = 6$

7	$1+3+5+7+9+11+13=49$	$49\div 7=7$
8	$1+3+5+7+9+11+13+15=64$	$64\div 8=8$
9	$1+3+5+7+9+11+13+15+17=81$	$81\div 9=9$
10	$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$	$100\div 10=10$
11	$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21=121$	$121\div 11=11$
12	$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23=144$	$144\div 12=12$
13	$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25=169$	$169\div 13=13$
14	$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27=196$	$196\div 14=14$
15	$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29=225$	$225\div 15=15$
16	$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31=256$	$256\div 16=16$
17	$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33=289$	$289\div 17=17$
18	$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33+35=324$	$324\div 18=18$
19	$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33+35+37=361$	$361\div 19=19$
20	$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33+35+37+39=400$	$400\div 20=20$

從表2可以得知：

(1) 不論是奇數個項數和或者是偶數個項數和都會是其項數的倍數。

(2) 商=項數，項數=(末項+1) \div 2，所以總和=商 \times 項數。

依據這些規律性，我們可以快速且正確的回答下列題目：

題目1：有一個數列	規律性方法	教科書方法
$1+3+5+7+\dots+101$ ，請問從1加到101的總和是不是其項數的倍數？商會是多少？總和是多少？	(1)總和是項數的倍數 (2)商=項數=(1+101) \div 2=51 (3)總和=51 \times 51=2601	(1)項數=(101+1) \div 2=51 (2)總和(1+101) \times 51 \div 2=2601 (3)2601 \div 51=51 \dots 0 (4)總和是項數的倍數
題目2：有一個數列 $1+3+5+7+\dots+999$ ，請問從	(1)總和是項數的倍數 (2)商=項數=(1+999) \div 2=500	(1) 項數 (1+999) \div 2=500 (2) 總和(1+999) \times 51 \div 2

1加到999的總和是不是其項數的倍數？商會是多少？總和是多少？	(3)總和=500×500=250000	=250000 (3)250000÷500=500 總和是項數的倍數
<兩種方法比較>	(1)教科書方法：會先算出項數，接著算出總和，再除以項數，求得商和餘數，最後判斷是否為其項數的倍數。 (2)規律性方法：可以先判斷是否為其項數的倍數，接著算出項數和商，最後再算出總和。	

綜合表1和表2的結果及解題的方法，我們可以得知：

- (1) 利用規律性方法解題會比較快速，且思考模式、計算技巧都很活潑、很多樣性，但只適用符合該規律性的題目，不能通用到各種不同規律的題目。
- (2) 教科書方法都是固定的解題方法，都能夠應用在各種不同規律的題目裡，但解題的思考模式及計算技巧比較不活潑、多樣性。
- (3) 由於數列的排列方式千變萬化，產生的規律性也會很多種，且會偏離本研究專題的主旨，可以另作專題好好研究。

陸、研究結果及討論

數字九宮格魔術研究專題非常有趣，既可享受當數學魔術師的樂趣，又可以探究數學領域裡的奧秘，透過大家的觀察、臆測、討論及計算等步驟，得到更多課本外的知識。下面是依據研究目標的順序，呈現研究結果及討論內容。

一、研究目的（一）：能找出解題方法，算出被抽出的數字牌是哪個數字。

被抽出的號碼牌 $C_n = RS - RS_{-n} = 9 - RS_{-n}$

二、研究目的（二）：能找出解題方法，算出被抽出的數字牌原先是在哪個位名。

數字九宮格魔術活動裡，在只有知道抽出數字牌後三個三位數的合計情況下，我們運用了「還原法」及「數字組合法」都無法正確的算出被抽出的數字牌是在哪個位名，因為九宮格數字符合題意的組合太多種了。倘若我們告知抽出數字牌後加總三個三位數合計時的

「進位」情形，是否就能判斷出被抽出的數字牌原先放在哪個位名？我們以圖29做討論：

假設已經算出被抽出的數字牌是「5」，三個三位數合計是「1588」，圖29藍色數字是進位情形，我們用數字組合法及進位情形分別討論，數字牌「5」分別在個位、十位、百位的可能情形。

圖29			
千位	百位	十位	個位
1	0	1	
合計 S-5	a	b	c
	d	0	e
	g	h	i
1	5	8	8

抽出數字為 5

(一) 若數字牌「5」在個位

(1) 個位剩2個數字相加要等於18，只有9+9，但不會成立，所以數字牌「5」原先不會放在個位。

(二) 若數字牌「5」在十位

(1) 個位有3個數字相加要等於18，就有 $1+8+9=18$ ， $2+7+9=18$ ， $3+6+9=18$ 等三種情形，再分別討論。

$1+8+9=18$ ， $2+7+9=18$ 分別可以找到一組答案，但 $3+6+9=18$ 就無法找到。

圖29-1			
千位	百位	十位	個位
1	0	1	
合計 S-5	2	0	1
	6	3	8
	7	4	9
1	5	8	8

圖29-2			
千位	百位	十位	個位
1	0	1	
合計 S-5	1	0	2
	6	3	7
	8	4	9
1	5	8	8

(三) 若數字牌「5」在百位

(1) 個位有3個數字相加要等於18，就有 $1+8+9=18$ ， $2+7+9=18$ ， $3+6+9=18$ 等三種情形。

(2) 在個位三種不同的組合情形下，且要符合十位要有3個數字相加要等於8都是不可能的，所以數字牌「5」原先不會在百位。

<討論結果> 運用數字組合法、進位情形來分析抽出數字牌合計的過程及結果如圖29、圖29-1、圖29-2，是可以算出被抽出的數字牌原先放在哪個位名的，於是，我們可以確定的是：多加了進位情形的這個條件確實能算出更正確的答案，如果多加幾個條件，甚至可以找到和題目九宮格裡 9 個數字排列一模一樣的組合情形。

三、研究目的（三）：在此研究專題討論中，所得到的知識可以應用在課程學習活動上。

此研究目標得到二大項重點：

（一）倍數

1. 找到判別 9 的倍數方法： $RS=9$ 。例如： $1314=1+3+1+4=9$
2. 快速算出此數 $\div 9$ 的餘數方法： $RS \neq 9$ ，算出的數字就是餘數。

例如： $5201314=5+2+0+1+3+1+4=16=1+6=7$ 餘數=7 因為 $5201314 \div 9=577923 \dots 7$

3. 綜合重點1和2，可以快速解決 9 的倍數題目

（二）規律性

1. 從 $1+2+3+\dots+n$ 連續正整數相加

（1）奇數個項數的總和會是奇數個項數的倍數，且商= $(\text{奇數個項數}+1) \div 2$ 。

所以，奇數個項數的總和= $\text{商} \times \text{奇數個項數}$

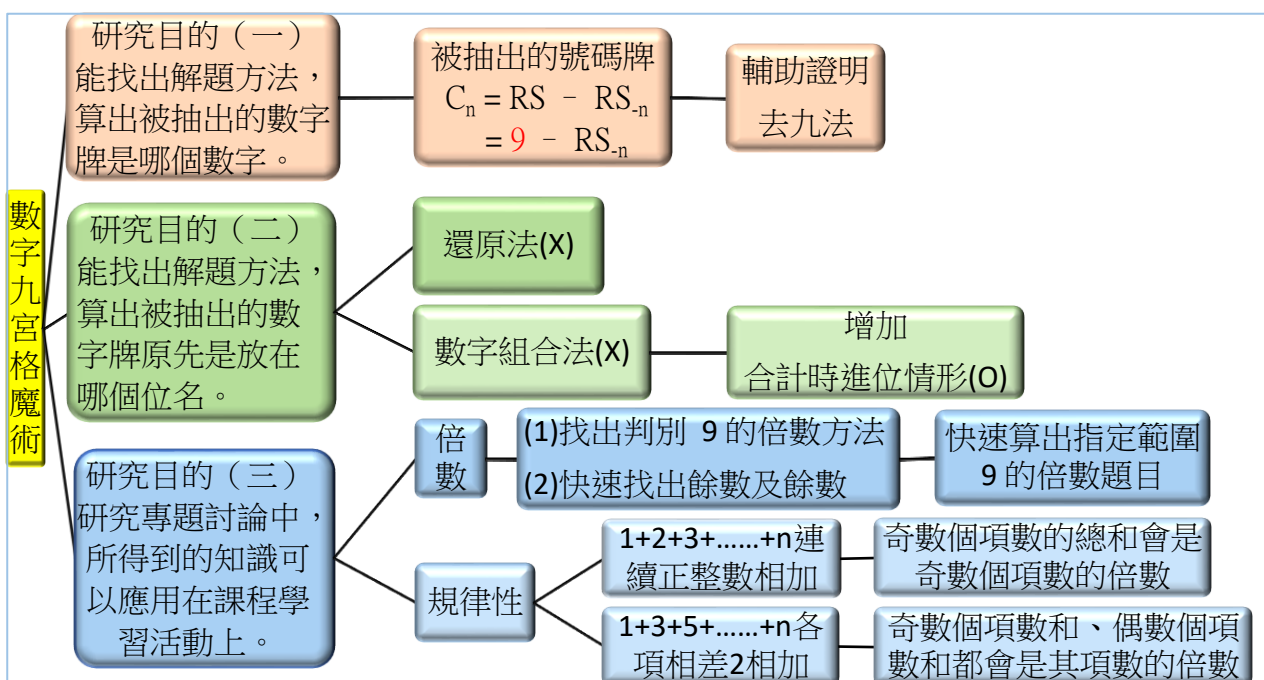
（2）偶數個項數的總和不會是偶數個項數的倍數。且商=餘數=偶數個項數 $\div 2$

所以，偶數個項數的總和= $\text{商} \times \text{偶數個項數} + \text{餘數}$

2. 從 $1+3+5+\dots+n$ 各項相差2

（1）不論是奇數個項數和或者是偶數個項數和都會是其項數的倍數。

（2）商=項數，項數= $(\text{末項}+1) \div 2$ ，所以總和= $\text{商} \times \text{項數}$ 。



柒、未來展望

數字九宮格魔術是一項非常有趣的遊戲，但我們在研究目的（二）被抽出的數字牌是放在哪個位名不能有效的算出，實在可惜！但整個研究過程也讓我們學到很多寶貴的知識。無法完成研究目的（二）的原因或許是知道的線索太少，也或許是我們沒能想到解決問題的方法，但在「陸、研究結果及討論」的內容裡，我們加入了計算抽出數字牌合計的進位情形，可以算出更正確的答案，我們可以討論如何設計出一個全面性的數字九宮格魔術遊戲：受測者除了知道抽出數字牌的合計之外，又知道哪些條件，就可以讓數字九宮格魔術不只可以算出被抽出的數字牌是哪個數字，也可以知道抽出的數字牌原來放在哪個位名，甚至可以找到和題目九宮格裡 9 個數字一模一樣的組合情形，這樣的目標我們留到未來再做專題研究。

捌、參考資料

一、逆向解題 黃敏晃/台大數學系退休。科學研習月刊48-7

<https://www.ntsec.edu.tw/LiveSupply->

<Content.aspx?a=6829&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&lsid=8139&print=1>

二、去九法 <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8E%BB%E4%B9%9D%E6%B3%95>

三、康軒出版，數學領域。國小課程第十一冊第一單元：因數與倍數。

四、康軒出版，數學領域。國中課程第一冊第一單元：整數的運算。