中華民國第 **63** 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：正立方體分割

關鍵詞：分割、正立方體

編號：**B1015**

摘要

由正立方體的切割，探討由相同形體的立體形狀所組合而成的立方體，藉由摺紙與GGB 軟體解構正立方體，提供直觀分解的圖像概念，利用空間座標及四角錐、三角錐等結構了解立體形狀在空間中的拼接等。

壹、前言

一、研究動機

寒假參加 FB 藝數摺學社團舉辦的親子研習，學到了菱形十二面體(Rhombic dodecahedron)的月曆摺製作，了解正立方體與菱形十二面體的關係，都是由六個相同的正四角錐翻轉所形成。於是想用 GGB 把這個結果展示出，畫出來後想到摺紙書中有切割立方體的作品，於是嘗試把他們整理出來。

	 裡面有一個正立分體	 裡面有一個正立分體	

二、研究目的

(一) 探討正立方體和菱形十二面體的關係。

(二) 正立方體二分割的種類。

(三) 有哪些分割的方式可以用來分割正立方體。

貳、研究設備及器材

一、硬體：紙、筆、電腦。

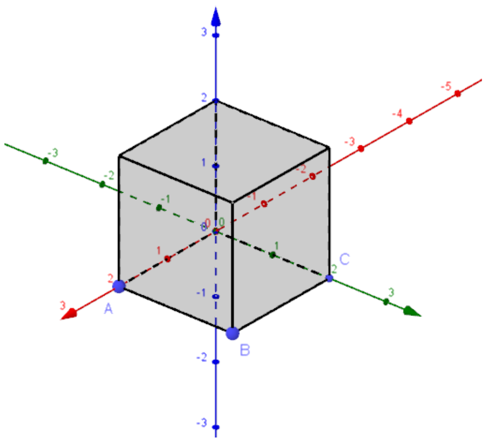
二、軟體：Geogebra (3D 繪圖軟體)，本文簡稱 GGB。

參、研究過程與方法

一、研究流程

在 Geogebra 3D 上利用空間座標設定正立方體，再利用稜邊特定的分點建構角錐及相同形體的立體模型，來執行分割與展開圖。

二、名詞說明



分割：體積相同，且形狀相同，。

鱉臑：每個面都是直角三角形的四面體。

塹堵：長方體斜切後(沿對邊的稜切)的三角柱。

陽馬：將塹堵斜切可得一四角錐與一三角椎，四角錐為陽馬，三角錐為鱉臑，

三、研究主題：

(一) 利用 Geogebra 軟體畫出正立方體切割形態。

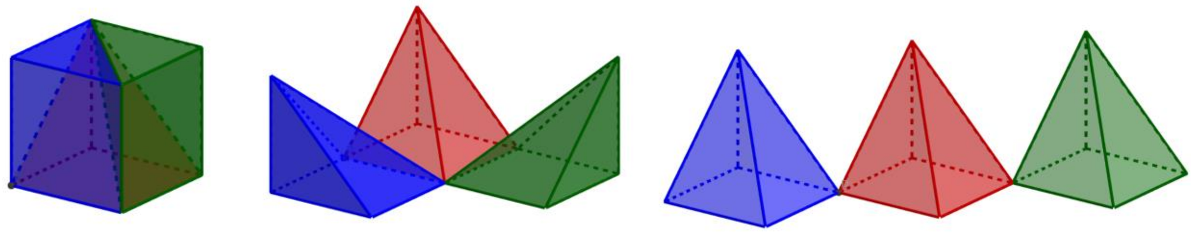
1.正立方體的設定：

設定邊長為 2 的正立方體，設 $A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,0,0)$，$E(2,0,2)$，$F(2,2,2)$，$G(0,2,2)$，$H(0,0,2)$，中心 $I(1,1,1)$的正立方體。

2. 正立方體三分割：錐體體積是否為柱體體積的三分之一?

在 youtube 看到使用 GGB 軟體說明如何繪製稜錐體積公式中的三分之一是怎麼來的，就試著利用 GGB 跟著依樣畫葫蘆，結果就看到這個有趣的展開方式，所以便試著尋找將正立方體切割的方式，並用 GGB 畫出來。

https://www.geogebra.org/m/kk75u3ch



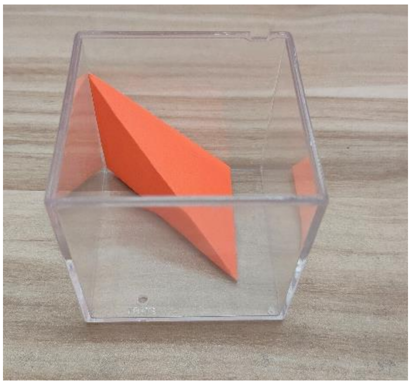
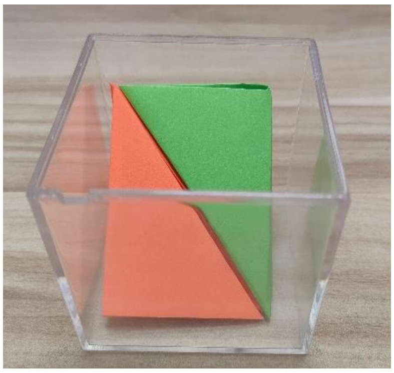
編號 1 號四角錐

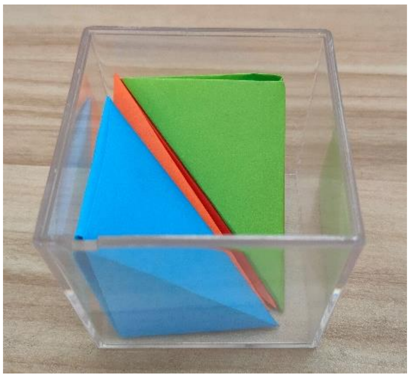
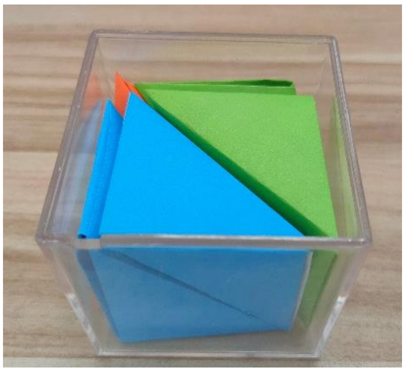
如上圖設形狀一模一樣的藍、紅、綠四角錐 (設為**編號 1 四角錐**) 體積皆為 V，且正立方體邊長為 L，可知四角錐底面積為L^2，高為 L，則$3V = L^3$，

故$V = \frac{1}{3} \times L^3 = \frac{1}{3} \times$底面積$\times$高。

又正立方體可以無縫隙填滿空間，所以也可以利用編號 1 四角錐無縫隙填滿空間，編號 1 四角錐的體積為正立方體的三分之一。

這個讓我想到家裡有常文武老師所寫的奇妙的數學摺紙裡介紹過鱉臑的摺法，於是摺出來比較。

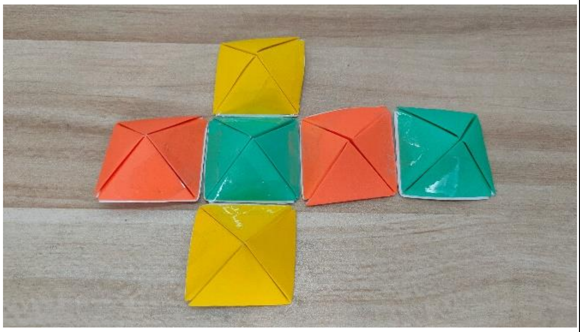
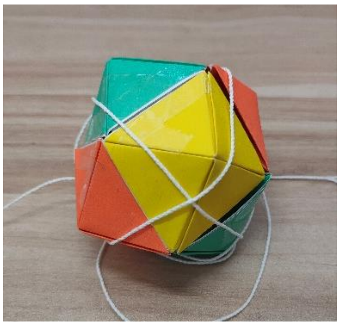
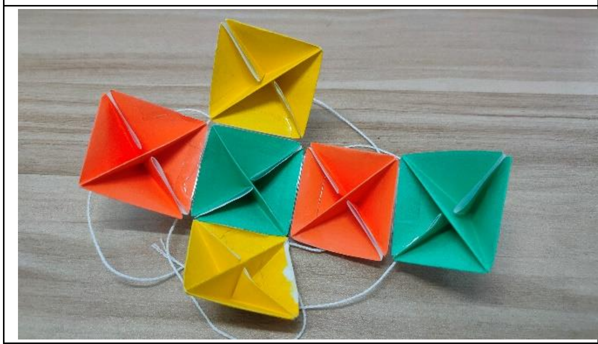
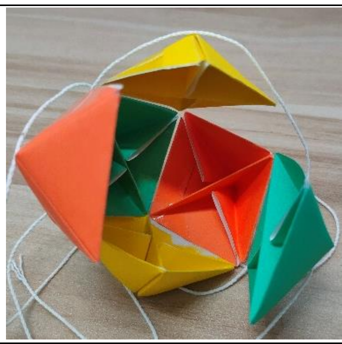
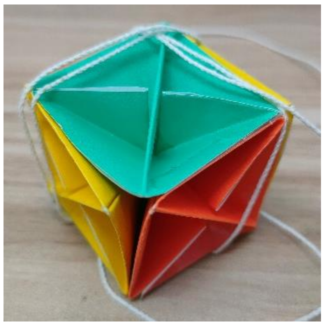
		
鱉臑(有左右兩種)，$45^\circ-45^\circ-90^\circ$與 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$的三角形各佔兩面。	左右兩鱉臑合成陽馬，可清楚看見 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$的三角形。	陽馬、鱉臑各一個合成塹堵(三角柱)，這個角度可看到截面為$1:\sqrt{2}$的長方形。

 需再補一個陽馬。	 需再補一個鱉臑。	 正立方體的六面上可清楚看到 $45^{\circ}-45^{\circ}-90^{\circ}$的三角形。

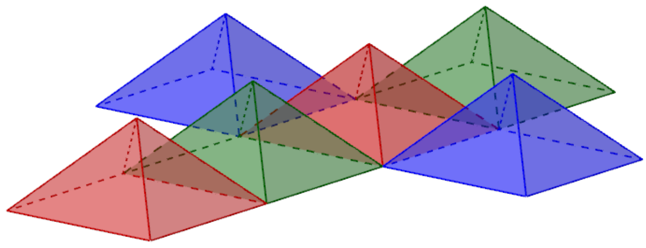
上圖每個鱉臑體積為立方體的六分之一，每個陽馬體積為立方體的三分之一。

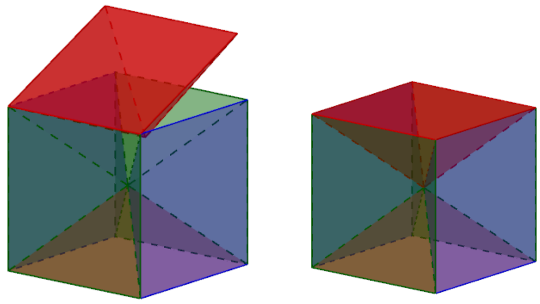
(二) 利用正立方體六分割探討與菱形十二面體的關係。

藝數摺學的第十章有將正立方體切割成六個等積的正四角錐的摺法。

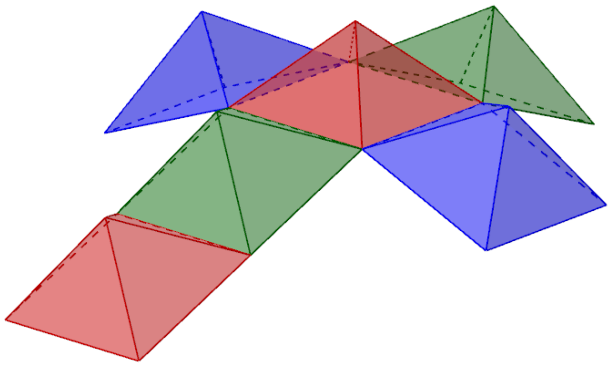
		
		

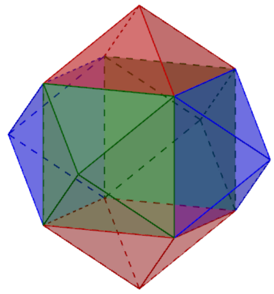
由摺紙模型可知在 GGB 繪圖中，假設邊長為 2 的正立方體，中心點的座標也可以使用整數點，便能畫出六個高度為底邊長一半的相同正四角錐，透過旋轉軸的使用，將所切割的四角錐依稜線旋轉可將正立方體轉成展開圖，繼續旋轉即可得菱形十二面體。





編號 2 號四角錐





https://www.geogebra.org/classic/zzmdsaeg　(請試著依序移動滑桿 α、β 及 γ)

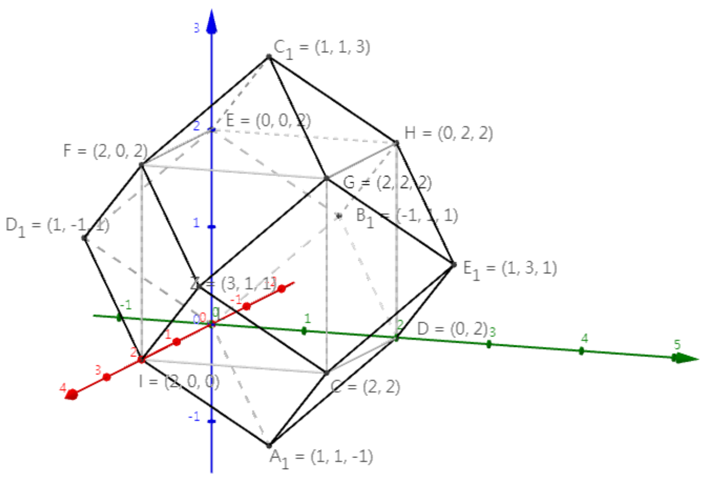
摺紙模型巧妙的使用相同大小的紙張，透過將正立方體切割成六個相同的四角錐(分別以六個面為底面，高為邊長的一半的正四角錐，設為編號 2 四角錐)，利用旋轉與外翻得到菱形十二面體，如圖，不難看出若正立方體體積為 V，邊長為 L，則由內往外翻可得菱形十二面體，且其體積為 $2V$，邊長為$\frac{\sqrt{3}}{2}L$。

因為正立方體可以無縫隙填滿空間，所以菱形十二面體也可以無縫隙填滿空間，故編號 2 四角錐也可以無縫隙填滿空間，且其體積為原正立方體的六分之一，即編號 2 四角錐體積為編號 1 四角錐體積的一半。

藝數摺學的第十一章有將正立方體切割成十二個等積的三角錐的摺法，將上述 2 號四角錐再對半切開。以下就摺紙所呈現的模型來討論。

 每個顏色有 4 個三角錐		 四個組成陽馬	
 呈現截面為$1:\sqrt{2}$的長方形。			
			

其實使用 GGB 3D 可以先在繪圖區先作一正方形，然後在 3D 繪圖區作正立方體，再使用展開圖功能，然後在展開圖上使用拉成錐體的功能，在展開圖上或下方分別作出四角錐，可以更容易作出正立方體分割圖及菱十二面體分割圖。https://www.geogebra.org/m/syzpn39h

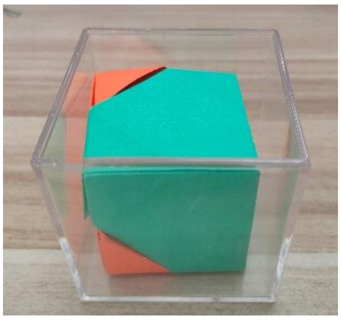
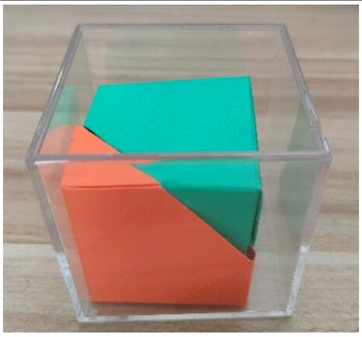
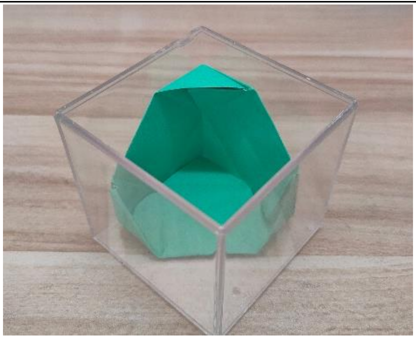


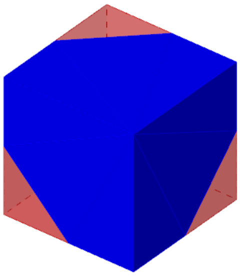
(三)其他的正立方體二分割：

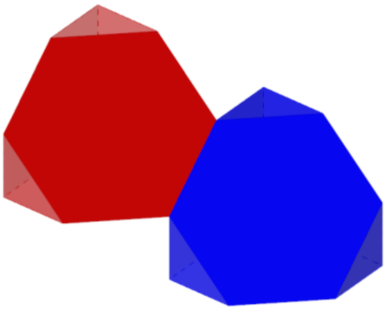
1.切成兩個相同的長方體(截面為原邊長的正方形)或兩個相同的三角柱(截面為原邊長$\sqrt{2}$倍的正方形)應該是很容易看的出來，所以在此不予討論。

2.截面為正六邊形的兩個相同的形體。

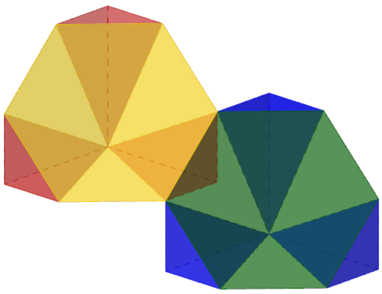
同樣見於常文武老師的奇妙的數學摺紙一書中的半正立方體

		 截面為正六邊形





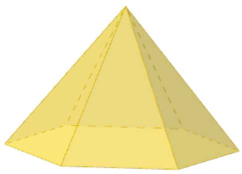
編號 1 模塊



藍及紅三角椎設為編號 1 三角錐

https://www.geogebra.org/classic/jwd9zrrw
https://www.geogebra.org/classic/v85efv58

如圖所示，通過六個稜邊中點可得截面為正六邊形的兩塊(設為編號 1 模塊)。透過觀察可知每塊皆為三個三角錐(設為編號 1 三角錐)與一個正六角錐所組成。三個三角錐體積總合為立方體的八分之一，所以每個六角錐的體積為$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$，正六角錐的高度為正立方體立體對角線的一半，若正立方體邊長為 2，則正六邊形邊長為$\sqrt{2}$，高為$\sqrt{3}$。



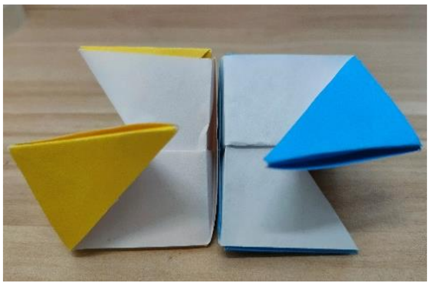
設一常數 K，則正六角錐體積 $K\times\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3})^2\times\sqrt{3}=\frac{3}{8}\times 2^3$ ，可求得 $K=\frac{1}{3}$。所以六角柱的體積也是六角錐體積的三分之一。

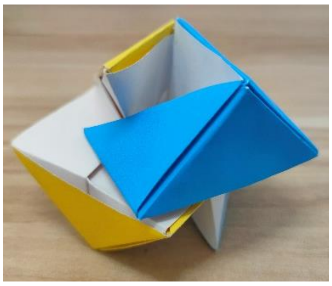
同理，編號 1 模塊也可以無縫隙填滿空間，其體積為原正立方體體積的一半，而編號 1 三角錐的體積為原面體的體積的二十四分之一。

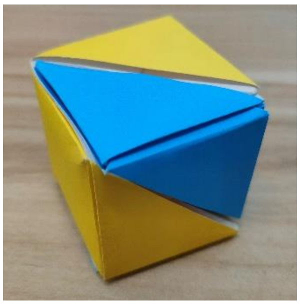
3.鋸齒分割立方體

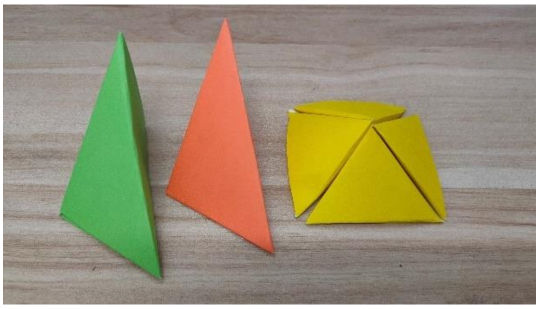
這個切割的方法非常有趣，見於前川淳摺紙幾何學一書之鋸齒分割立方體。設計上也是利用 1:$\sqrt{2}$:$\sqrt{3}$的比例。


完全相同的兩個模型

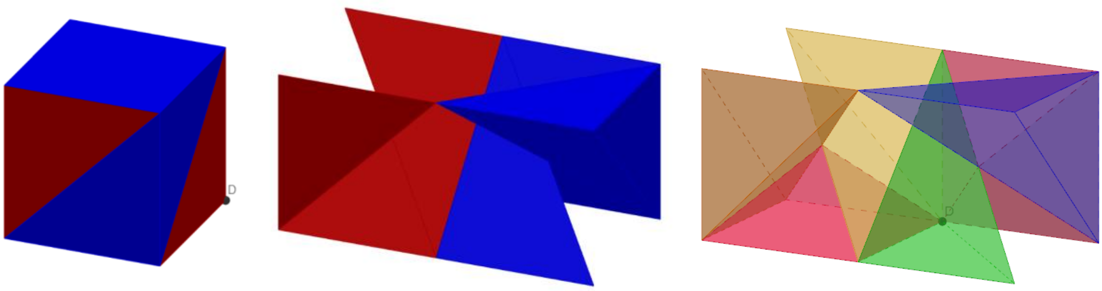

找到旋轉軸


旋轉合併


合併之後

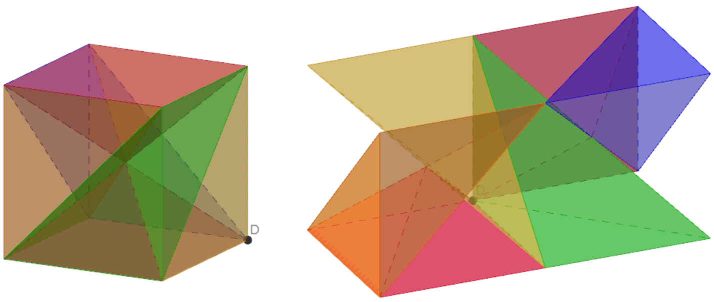

解構


組合


每一藍或紅的模塊設為編號 2 模塊　　https://www.geogebra.org/m/mjjvrjrt

這是前川淳先生的摺紙幾何學一書中所提到的例子，透過兩個相同的鋸齒狀形體組合而成。經過 GGB 繪圖找出旋轉軸可以看出每個鋸齒狀形體(設為編號 2 模塊)都是由兩個三角

錐(設為編號 2 三角錐)和一個編號 2 四角錐組合而成且每個編號 2 三角錐體積與編號 2 四角錐體積相等，其體積皆為正立方體體積的六分之一。



https://www.geogebra.org/classic/thznm6uw

同理，編號 2 模塊也可以無縫隙填滿空間，其體積為原正立方體體積的一半。

肆、研究結果

一、編號 1 四角錐體積為原正立方體體積的三分之一。且他的稜線長有三種不同的長度，短：中：長=1：$\sqrt{2}$：$\sqrt{3}$。除一面為正方形外其餘四面皆為直角三角形，$45^\circ-45^\circ-90^\circ$與 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$的三角形各佔兩面，九章算經中稱陽馬。

二、編號 2 四角錐體積為原正立方體體積的六分之一。若以底面正方形邊長為 2，則其他四面皆為稜長$\sqrt{3}$的等腰三角形。

三、編號 2 三角錐體積為原正立方體體積的六分之一，且每個面都是直角三角形，$45^\circ-45^\circ-90^\circ$與 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$的三角形各佔兩面九章算經中稱鱉臑。且他的稜線長有三種不同的長度，短：中：長=1：$\sqrt{2}$：$\sqrt{3}$。事實上如果把編號 1 的四角錐(陽馬)對半切開也可以得編號 2 的三角錐(鱉臑)。

四、正立方體對切得兩個相同三角柱稱塹堵，塹堵可再切分為陽馬及鱉臑。

體積比塹堵：陽馬：鱉臑 ＝3：2：1。

伍、結論與未來展望

透過摺紙與 GGB 的學習，未來希望可以類似的方式切割柏拉圖多面體，藉由直觀的看法了解多面體的性質且透過動態更容易理解立體結構的圖形。

陸、參考資料

1.前川淳 2018 年 4 月。摺紙幾何學。新北市：世茂出版。

2.常文武 2019 年 7 月。奇妙的數學摺紙。上海；上海科學技術出版社。

3.李政憲 2019 年 9 月。藝數摺學。台北市：臉譜出版。

4.連崇馨、李政憲、常文武 2019 年 8 月。摺紙學數學。台南市：翰林出版。

5. 直观形象看棱锥体积公式的 1/3 是怎么来的——GeoGebra 制作教程 - YouTube