

屏東縣第 63 屆國中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小

作品名稱：翻轉吧！Hexaflexagon！

關 鍵 詞：正六邊形、正三角形、菱形

編號：A1019

翻轉吧！Hexaflexagon!

摘要

我們探討 Hexaflexagon 後，發現其特性有透過簡單的形狀翻轉後，產生不可思議的結果，將多個面隱藏於其中，從正三角形的長紙條，再以等腰梯形的方式摺疊，最後形成正六邊形；更在增加正三角形個數之後，利用旋轉紙條，形成更多面的正六邊形，討論 Hexaflexagon 之幾何相關特性。

壹、前言(含研究動機、目的)

一、研究動機

升上四年級後，我們參加「益智遊戲」的社團，老師拿出一張長紙條，經過翻翻摺摺之後，正三角形卻形成正六邊形，更神奇的是，明明只看見兩個面，卻在一秒鐘翻出第三面；不僅如此，另一個正六邊形還能翻出更多面，引起我們研究的興趣。我們從三年級開始就對各種幾何圖形產生濃厚的興趣，四年級上學期我們學到了三角形、角度、正方形、長方形，這學期更學到四邊形的單元，老師都會利用她擅長的摺紙把這些圖形具象化，變成我們可以摸得到的教具，讓我們能更深入淺出的學習這些圖形特徵；其中老師延伸了一些摺紙的技巧，雖然其中的理論是國中的範圍，但是我們利用實際量測的方式，也能了解。隨著難度增加，這些幾何圖形已不是我們在課本裡學到的基礎，但卻觸發我們想要持續探索的心，我們開始思考，如果依靠動手實際量測及試驗，我們是否能找尋到規律？單純的摺紙是否能跟其他已知的基本概念相結合？這些有趣的問題一直縈繞在我們的腦海，於是我們開始展開了研究 Hexaflexagon 的旅程。

二、研究目的：

- (一)探討 Hexaflexagon 的特性。
- (二)探討 Hexaflexagon 翻轉的方法。
- (三)探討翻轉面的變化。
- (四)探討圖案設計的規則。

貳、研究設備及器材

彩色筆、直尺、壁報紙、剪刀、膠水、量角器、手機、電腦。

彩色筆	剪刀、雙面膠、膠水
	
壁報紙	直尺、量角器
	
手機	電腦
	

參、研究過程或方法

一、名詞解釋：

- 1、Hexaflexagon：Hexaflexagons 是 1939 年在普林斯頓的 Arthur Stone 發現的。這位英國研究生在從過大練習筆記本裁下的紙條上，塗鴉並摺疊後發現了這個神奇的“六角摺變體”。

- 2、正三角形：三個角都是 60 度，三個邊都一樣長的三角形。
- 3、正六邊形：正六邊形是指有六條邊和六個頂點，每個角為 120 度，對稱性最高。
- 4、梯形：一雙對邊互相平行的四邊形。
- 5、菱形：兩雙對邊互相平行，四邊等長，對角相等，鄰角合為 180 度。
- 6、30 度-60 度-90 度三角形：一種特殊的直角三角形，由 30 度、60 度、90 度組成，學生用三角板的一種。
- 7、線對稱：將一個圖形對摺，若摺痕兩邊的圖形完全疊合，則此圖形為線對稱圖形。摺線為對稱軸，對應疊合的點稱為對稱點，對應疊合的角稱為對應角，對應疊合的線段稱為對應線段。對稱軸垂直平分兩對稱點之連線段。
- 8、密鋪：是指把一些較小的表面填滿一個較大的表面而不留任何空隙。

二、研究架構圖

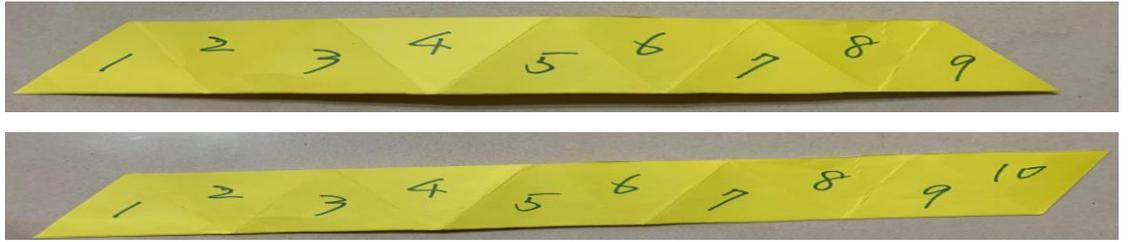
一、Hexaflexagon 的特性	二、紙條長度	三、如何製作 My Hexaflexagon
八、生活上的應用	翻轉吧！ Hexaflexagon!	四、如何翻轉
七、設計圖案	六、以圓心角來辨識	五、面的變化

肆、研究過程與結果

一、探討 Hexaflexagon 的特性。

(一)三面 Hexaflexagon

- 1、由 9 個或 10 個正三角形密鋪成一長條。



2、除了上下兩面，還可以翻出第三面。

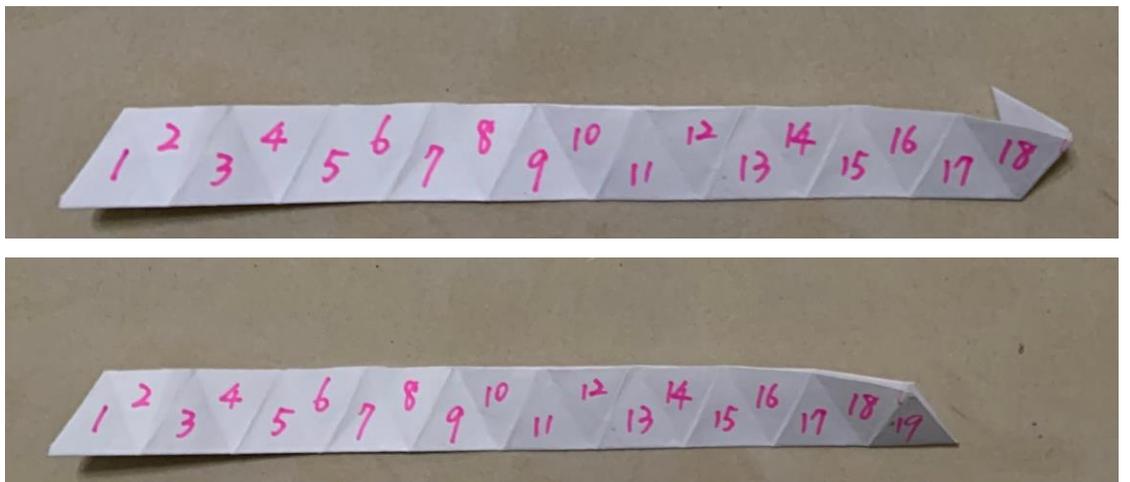


3、我們的發現：翻面時，會出現與原來不同的面。

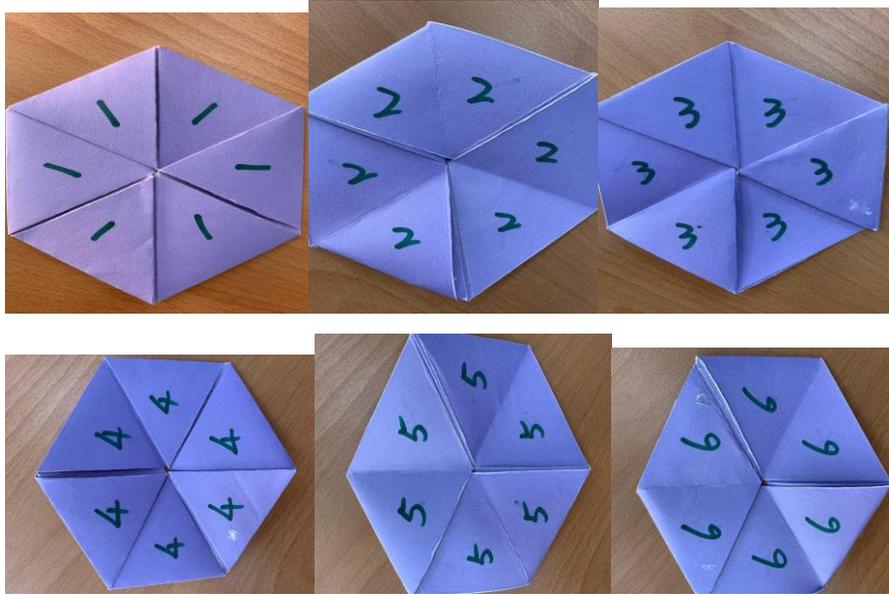


(二) 六面 Hexaflexagon

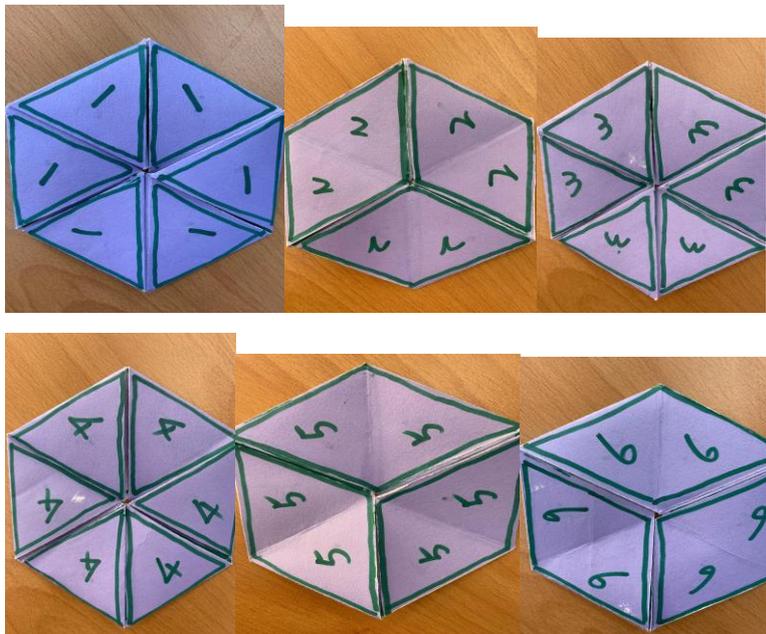
1、由 18 個或 19 個正三角形密鋪成一長條。



2、除了上下兩面，還可以翻出另外四個面。



3、我們的發現：翻面時，會出現與原來不同的面。



二、探討紙條大小

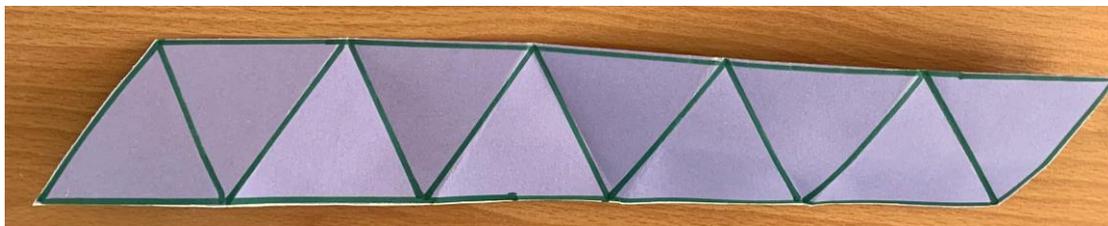
(一) 以一個 30 度-60 度-90 度的斜邊為正三角形的邊長

(二) 實際量測的結果，長方形紙條的寬度是 8.65 公分，那麼斜邊量起來大約是 10 公分。

(三) 三面 Hexaflexagon 的紙條長度大約是斜邊長的 5 倍，而六面 Hexaflexagon 則大約是斜邊長的 10 倍。

三、製作 MyHexaflexagon:

- (一) 剪下一張長紙條。
- (二) 在紙條上畫出密鋪的正三角形。



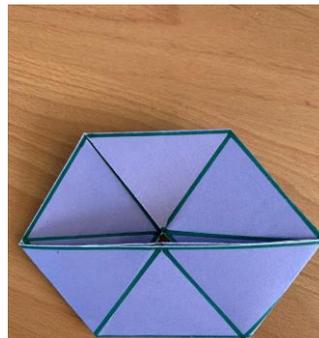
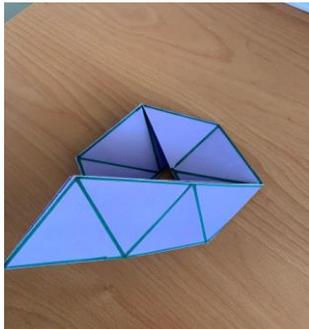
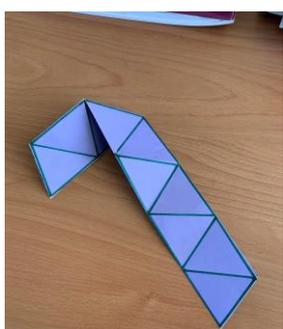
Step1:用量角器在紙條上量出像 30 度-60 度-90 度的直角三角形。



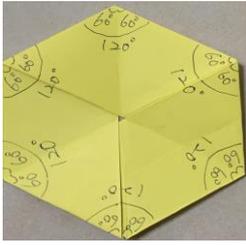
Step2:再以直角三角形的長邊為正三角形的邊長，反覆摺出正三角形。



Step3:每隔 3 個正三角形便要往下摺 60 度，重疊一個正三角形。摺疊兩次後，剩下的正三角形與第一個黏合。

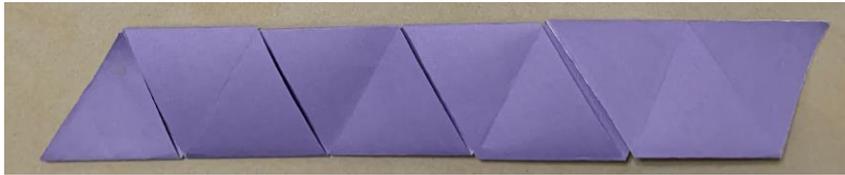
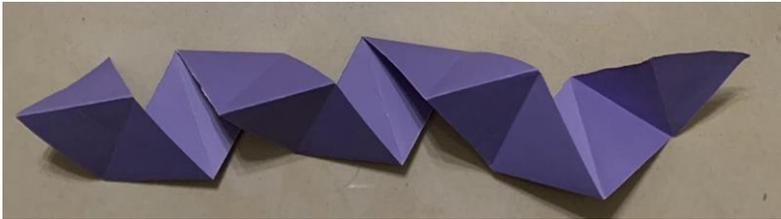


(三)正六邊形是由六個正三角形拼湊而成，每個角有兩個正三角形，所以
60 度 $\times 2 = 120$ 度。如下圖：



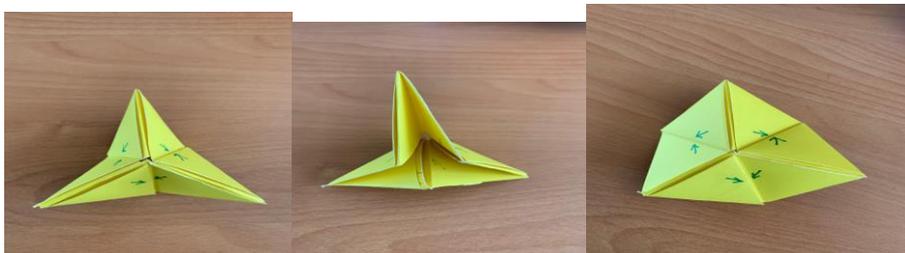
(四) 我們的發現：

- 1、摺成正六邊形的過程中，3 個正三角形會形成一個等腰三角形。
- 2、將 18 或 19 個正三角形旋轉後成為 8 個或 9 個正三角形，還是會形成一長條。



四、如何翻轉

(一) 在正六邊形以中心點到六個角形成六條等邊的線，也就是正三角形的邊長，相間隔形成谷線及山線的摺法，使中間出現開口，則能往外翻面。



(二) 我們的發現：在六面 Hexaflexagon 中，有些面能形成兩個開口，有些面只有一個。

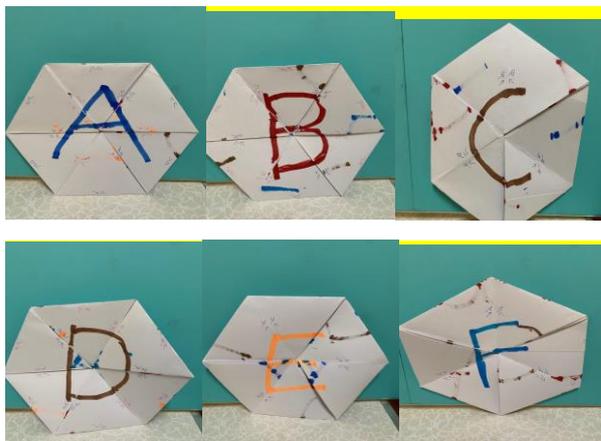
五、面的變化

(一) 我們將可以翻出開口的邊做上箭頭記號。

(二) 我們的發現：A、B、D 三個面有兩個開口，而 C、E、F 三個面只有一個開口。

(三) 我們的發現：

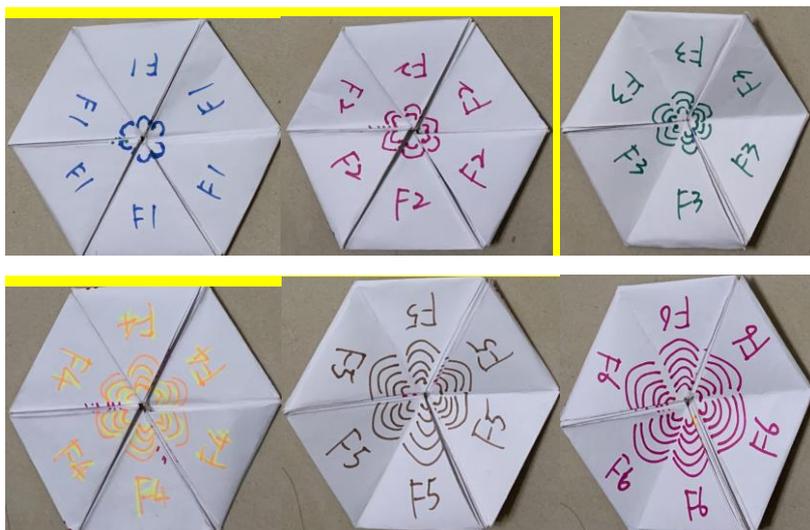
1、A 面可以翻到 C、D 面，A、C 面，C 面可以翻到 B 面，D 面可以翻到 B、E 面，E 面可以翻到 A 面，F 面可以翻到 D 面；但是，好像有些不是原來的面，為什麼呢？



六、以圓心角來辨識

(一) 根據研究舞的發現，雖然同樣的面，似乎會翻出與原來不同的面。

(二) 我們在每個面的圓心做出可以分辨的記號。



(三)我們將紙條的正反兩面分開，得到下面的圖案。



七、設計圖案

(一)根據研究六的結果，將三面 Hexaflexagon 分別設計。



(二)將六面 Hexaflexagon 中三個面的菱形及三個面的正三角形分別設計圖案。



八、生活上的應用

(一)可以製作多層資料夾，減省製作材料及空間，剩餘的長條可以繼續使用，無限銜接。

(二)可以製作多層次的披薩或餅皮，增加多層次的口感。

伍、討論

一、紙條的寬度與長度

(一)實際量測 30 度-60 度-90 度的三角形，當最長邊為 10 公分時，最短邊為 5 公分，而第三邊大約為 8.65 公分。最長邊為最短邊的 2 倍，第三邊為最短邊的 1.732 倍左右。換句話

說，最長邊大約是第三邊的 1.015 倍。

(二)正三角形在紙條上是一上一下的排列，三面 Hexaflexagon 上下邊只需要 5 個邊長，而六面 Hexaflexagon 則需要 10 個邊長。

二、正三角形的個數

(一)三面 Hexaflexagon：每個正六邊形有 6 個正三角形，兩面都有圖案，有 3 面，所以 $6 \times 3 \div 2 = 9$ ，需要 8 個(或 9 個) 正三角形。

(二)六面 Hexaflexagon：每個正六邊形有 6 個正三角形，兩面都有圖案，有 6 面， $6 \times 6 \div 2 = 18$ ，所以需要 18 個(或 19 個) 正三角形。

三、30 度-60 度-90 度三角形的摺法

(一)先將紙條的寬度對摺，再將紙條 90 度角對準中央的直線，就會形成就會形成 30 度-60 度-90 度的直角三角形。



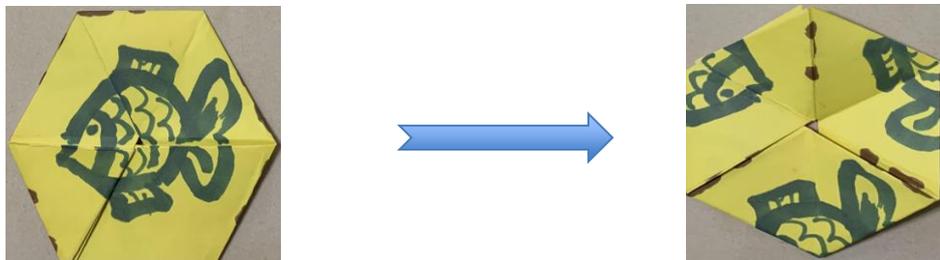
(二)再以摺出得先長邊為正三角形的邊長再以摺出得先長邊為正三角形的邊長，反覆摺出正三角形。



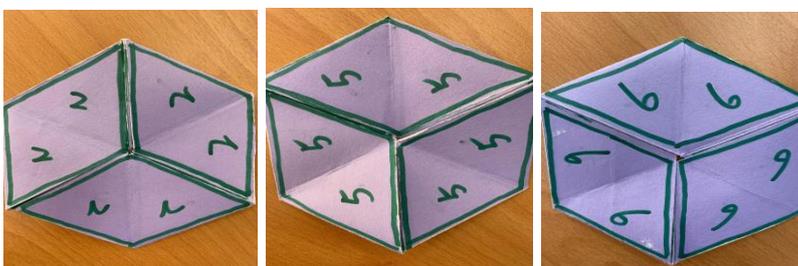
四、翻轉的技巧與順序

(一)因為在正六邊形畫上圖案時，先在第一面畫上第一個圖案，

然後翻第二面在畫上第二個圖案，以此依序完成三面或六面的圖案之後，如果在翻的過程上下翻轉，則會產生 6 個非原來的面，而使得圖案變成碎形。

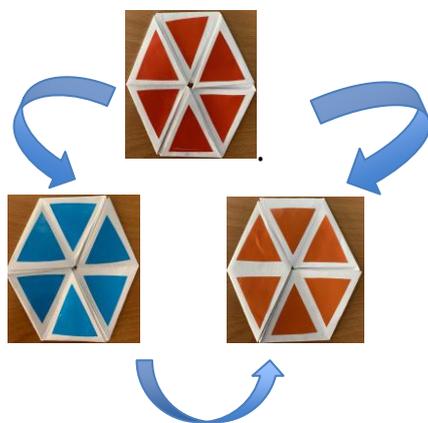


(二)翻轉到出現三個菱形時，就只能翻轉一面，無法翻轉兩面。

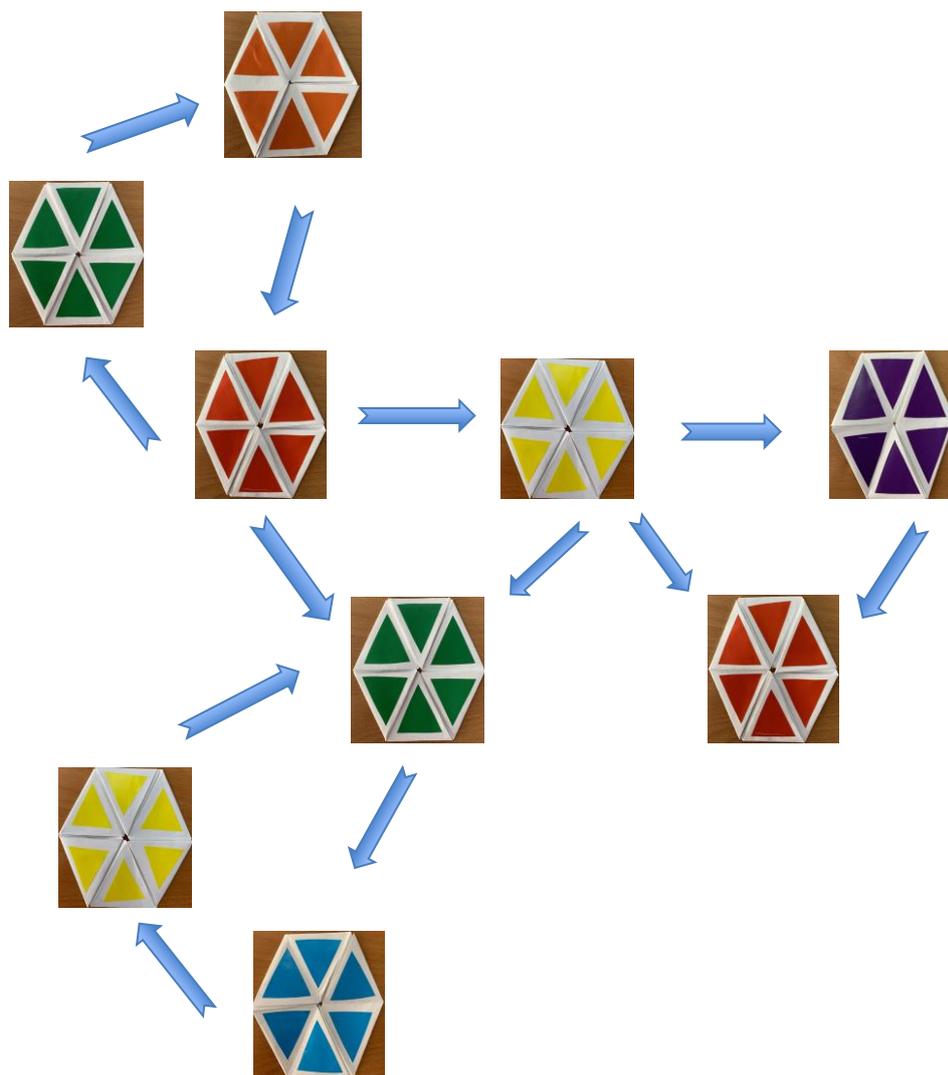


五、翻轉面的關係

(一) 三面 Hexaflexagon: 以紅、藍、橘三色的 Hexaflexagon 來看，由紅色翻出藍色，再翻出橘色，橘色能再翻出紅色，一直循環。



(二) 六面 Hexaflexagon:



六、設計圖案

(一) 三面 Hexaflexagon 正反兩面的排列方式如下圖：



(二) 六面 Hexaflexagon 正反兩面的圖案排列如下：



陸、結論

一、紙條的寬度與長度：

(一)三面 Hexaflexagon：紙條寬度 $\times 1.15 \times 5$

(二)六面 Hexaflexagon：紙條寬度 $\times 1.15 \times 10$

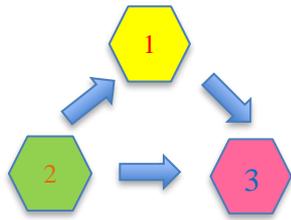
二、正三角形的個數：

(一)三面 Hexaflexagon： $6 \times 3 \div 2 = 9$

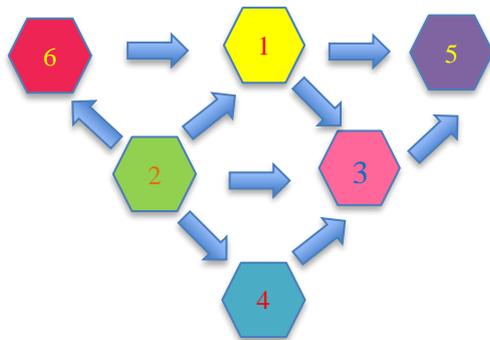
(二)六面 Hexaflexagon： $6 \times 6 \div 2 = 18$

三、翻轉面的關係：

(一)三面 Hexaflexagon：



(二)六面 Hexaflexagon：



四、圖案設計的技巧；

(一)三面 Hexaflexagon：



(二)六面 Hexaflexagon：



柒、未來展望

以上的研究及討論，看來三面及六面的 Hexaflexagon 已經無法再次旋轉或摺成更多的面，但是正六邊形可以密鋪，或許將長條轉個角度重疊後再再摺疊，可以形成更多面。我們將繼續研究，期待有更多的發現。

捌、參考資料及其他

一、中文部分

【康軒文教事業 國小數學第七冊】

第三單元 角度 第五單元 三角形。

【康軒文教事業 國小數學第七冊】

第二單元 四邊形。

二、網路資源

【魔法六角摺變體】

取自

<https://ppfocus.com/0/edbac2956.html>

【NTCU 科學遊戲-六角變形體】

取自

<http://scigame.ntcu.edu.tw/paper/paper-009.html>

【分享個激發娃數學興趣的神法寶：Hexaflexagons 六角折變體！】

取自

https://www.gushiciku.cn/dc_hk/2002261874