屏東縣第 63 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：摺起來怎麼不一樣

關 鍵 詞：兩面角

編號：

摘要

本作品嘗試討論當不同角度的平面所產生截痕的角度與兩面角彼此之間的函數關係，希望了解生活中，摺紙藝術所造成的角度與長度的變化關係。

壹、前言

老師上課讓我們玩 New Scientist 雜誌其中一篇關於變形插圖的圖形，一張紙上的英文字母原本歪七扭八，如【圖一】所示，但只要經過對摺變立體，再轉個角度，就是工整的字母，如【圖二】所示。因此我們想了解，經過摺紙後對於角度及長度產生的變化關係為何？所以我們就進行一連串的思辨及討論。

【圖一】

【圖二】

貳、研究設備及器材

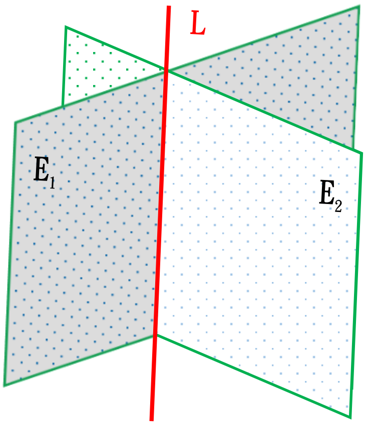
隔板、紙膠帶、電腦

參、研究過程或方法

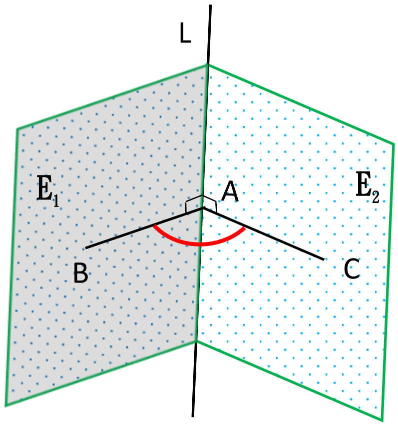
一、名詞說明：

1、**稜線**：若兩個平面 E_1 及 E_2 交於一線，則此交線稱為稜線，如【圖三】所示，直線 L 即為稜線。

2、**兩面角**：如【圖四】所示，設兩個平面 E_1 及 E_2 交於一線， 在兩個平面上各取一線段 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$，若 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 皆與稜線垂直，則∠BAC=θ稱為兩面角。



【圖三】



【圖四】

3、**同側夾角與異側夾角**：

若在兩平面取出的線段不與稜線垂直，我們分成兩種狀況討論：

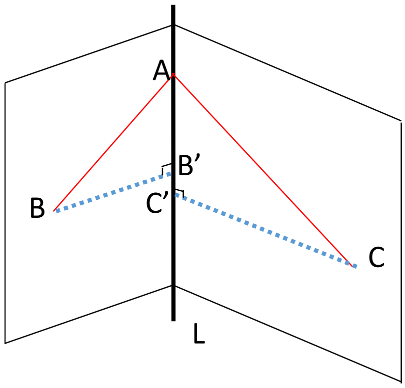
分別取 B 及 C 對稜線的垂足點 B’及 C’

(1)同側夾角：若 B’及 C’落在 A 的同側，即點的相對位置為 A-B’-C’或是 A-C’-B’，則

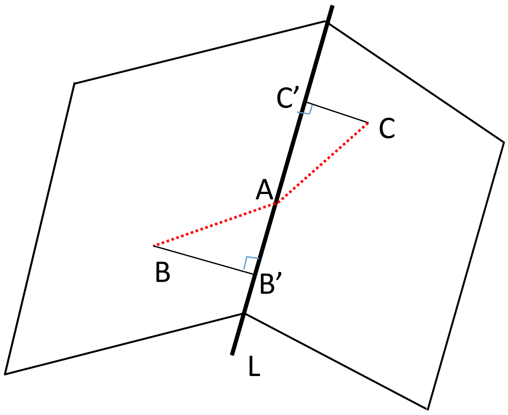
我們稱∠BAB’與∠CAC’為同側夾角。如【圖五】所示。

(2)異側夾角：若 B’及 C’落在 A 的異側，即點的相對位置為 B’-A-C’或是 C’-A-B’，則

我們稱∠BAB’與∠CAC’為異側夾角。如【圖六】所示。



【圖五】



【圖六】

定義中，兩面角取出的線段須與稜線垂直，所量測出來的角度才認定為兩面角，因此我們首先要討論就是，如果取出線段與稜線所夾出的角度非直角，即$\alpha \neq 90°$，$\beta \neq 90°$彼此的關係為何？

二、同側夾角：以下我們先討論同側夾角的情況

定理 1

設 L 為兩平面 E_1 及 E_2 的交線，若 $\overline{AB}=\overline{AC}=a$ ， $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 與稜線 L 的夾角均為 α（其中 $\alpha\neq 90°$ 且為同側夾角），∠BAC =∅，兩面角∠BDC =θ，則 $\cos\emptyset=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos\theta$。

【證明】：

如【圖七】所示，

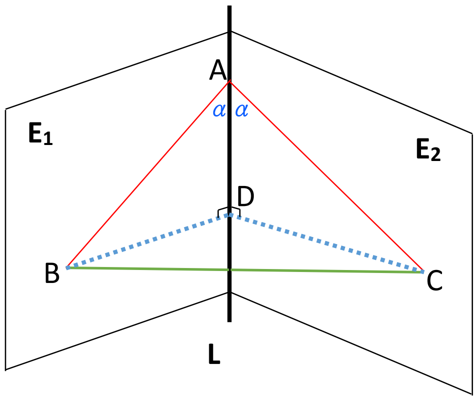
分別以 B、C 對稜線 L 取垂足點 B’、C’。

因為 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 與稜線 L 的夾角均為 α，

所以 B’、C’ 為同一位置，我們設為 D 點。

$\because\ \overline{BD}\perp\overline{AD}$，$\overline{CD}\perp\overline{AD}$

$\Rightarrow\overline{BD}=a\sin\alpha$，$\overline{CD}=a\sin\alpha$



【圖七】

在△ABC 中

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\cos\emptyset$$

$$=a^2+a^2-2\times a\times a\cos\emptyset$$

$$=2a^2-2a^2\cos\emptyset\cdots\cdots①$$

在△BCD 中

$$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{CD}\cos\theta$$

$$=(a\sin\alpha)^2+(a\sin\alpha)^2-2\times a\sin\alpha\times a\sin\alpha\cos\theta$$

$$=a^2\sin^2\alpha+a^2\sin^2\alpha-2a^2\sin^2\alpha\cos\theta$$

$$=2a^2\sin^2\alpha-2a^2\sin^2\alpha\cos\theta\cdots\cdots②$$

由①、②可知

$$2a^2\sin^2\alpha-2a^2\sin^2\alpha\cos\theta=2a^2-2a^2\cos\emptyset$$

$$\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos\theta=1-\cos\emptyset$$

$$\cos\emptyset=1-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos\theta$$

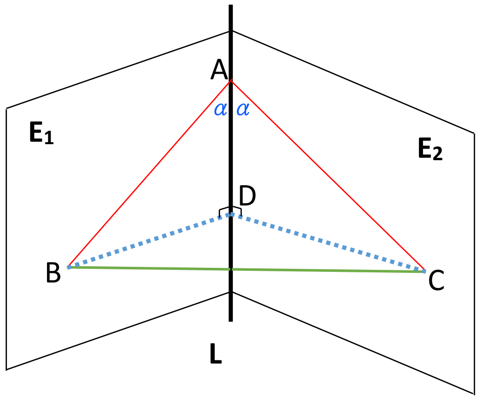
$$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos\theta$$

推論 1-1

設 L 為兩平面 E_1 及 E_2 的交線，若$\overline{AB} = \overline{AC} = a$ ，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$與稜線 L 的夾角均為 α（其中$\alpha \neq 90°$且為同側夾角），∠BAC =$\emptyset$，兩面角∠BDC =$\theta = 90^\circ$，則$\cos\emptyset = \cos^2\alpha$

【證明】:

《方法一》



【圖八】

如【圖八】所示，

分別以 B、C 對稜線 L 取垂足點 B’、C’。

因為$\overline{AB} = \overline{AC}$，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$與稜線 L 的夾角均為$\alpha$

所以 B’、C’為同一位置，我們設為 D

因為∠BAD=α　∠CAD=α

空間中∠BAC=$\emptyset$

$\because \overline{BD} = \overline{DC} = a\sin\alpha$

$\angle BDC = \theta = 90^\circ$

$\overline{BC} = \sqrt{2}a\sin\alpha$

$$\cos\emptyset = \frac{a^2 + a^2 - \left(\sqrt{2}a\sin\alpha\right)^2}{2\times a\times a}$$
$$= \frac{2a^2 - 2a^2\sin\alpha}{2\times a^2}$$
$$= 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

《方法二》

由定理 1 可知 $\Rightarrow$ $\cos\emptyset = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\theta$

當 $\theta = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = 0$

則 $\cos\emptyset = \cos^2\alpha$

推論 1-2

設 L 為兩平面 E_1 及 E_2 的交線，若$\overline{AB} = \overline{AC} = a$ ，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$與稜線 L 的夾角均為α（其中$\alpha \neq 90°$且為同側夾角），∠BAC =$\emptyset$，兩面角∠BDC =θ，則$\theta > \emptyset$

【證明】:

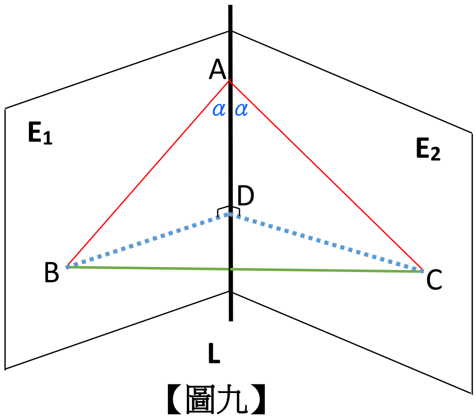
如【圖九】所示，

分別以 B、C 對稜線 L 取垂足點 B’ 、C’ 。

因為$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$與稜線 L 的夾角均為$\alpha$

所以 B’ 、C’ 為同一位置，我們設為 D

∠BAD=α ∠CAD=α



【圖九】

在△BCD

$$\cos\theta=\frac{\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{BD}\times\overline{CD}}$$

$$\because \overline{BD}=\overline{CD}$$

$$\cos\theta=\frac{2\overline{BD}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{BD}^2}$$

$$=\frac{2\overline{BD}^2}{2\overline{BD}^2}-\frac{\overline{BC}^2}{2\overline{BD}^2}$$

$$=\frac{2\overline{BD}^2}{2\overline{BD}^2}-\frac{\overline{BC}^2}{2\overline{BD}^2}$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}\right)^2\cdots\cdots①$$

同理在△ABC中$\overline{AC}=\overline{AB}$

$$\cos\emptyset=\frac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{AB}}$$

$$=\frac{2\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}^2}$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2\cdots\cdots②$$

$$①-②\Rightarrow\cos\theta-\cos\emptyset=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}\right)^2-\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}+\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}-\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}+\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)\times\left[\frac{\overline{BC}(\overline{AB}-\overline{BD})}{\overline{BD}\times\overline{AB}}\right]$$

$$\because \overline{AB}>\overline{BD}\Rightarrow\overline{AB}-\overline{BD}>0$$

$$\cos\theta-\cos\emptyset<0$$

$$\cos\theta<\cos\emptyset$$

$0° \leq \theta \leq 180°$

$0° \leq \emptyset \leq 180°$

$\cos\theta$單調遞減函數

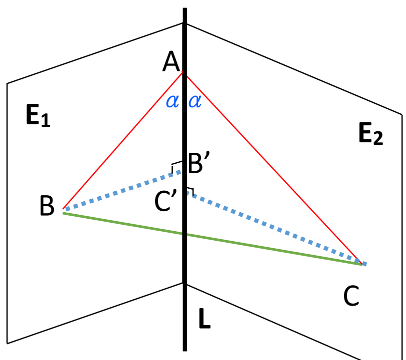
$\therefore \theta > \emptyset$

定理 2

設 L 為兩平面 E_1 及 E_2的交線，若$\overline{AB} = a$，$\overline{AC} = b$ $(a \neq b)$，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$與稜線 L 的夾角均為α（其中$\alpha \neq 90°$且為同側夾角），∠BAC =∅，兩面角∠BDC =θ，則$\cos\emptyset = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\theta$。

【證明】:

如【圖十】所示，



【圖十】

分別以 B、C 對稜線 L 取垂足點 B'、C'。

因為$\overline{AB} = \overline{AC}$，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$與稜線 L 的夾角均為$\alpha$

所以 B'、C' 為同一位置，我們設為 D

因$\overline{AB} = a$

$\overline{AC} = b$

令∠BAB'=∠CAC'= $\alpha \neq 90°$

$\overline{BB'} = a \times sin\,\alpha$

$\overline{CC'} = b \times \sin\alpha$

在△ABC 中

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC}\cos\emptyset$$

$$= a^2 + b^2 - 2a \times b\cos\emptyset \cdots\cdots ①$$

又$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C}$

$$\therefore \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C}\right|^2$$

$$= \left|\overrightarrow{BB'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{B'C'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{C'C}\right|^2 + 2(\overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'C'} \cdot \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'C} \cdot \overrightarrow{BB'})$$

$\because \overrightarrow{BB'} \perp \overrightarrow{B'C'} \Rightarrow \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{B'C'} = 0$

同理 $\Rightarrow \overrightarrow{B'C'} \cdot \overrightarrow{C'C} = 0$

$$\therefore \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BB'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{B'C'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{C'C}\right|^2 + 2\overrightarrow{C'C} \cdot \overrightarrow{BB'}$$

$$= (a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha - a\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2 + 2b\sin\alpha \times a\sin\alpha \times \cos(180° - \theta)$$

$$= (a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha - a\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2 - 2b\sin\alpha \times a\sin\alpha \times \cos\theta$$

$$= a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha - 2ab\cos^2\alpha + a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha - 2ab\sin^2\alpha\cos\theta$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos^2\alpha - 2ab\sin^2\alpha\cos\theta \cdots\cdots ②$$

由①、②可知

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\emptyset = a^2 + b^2 - 2ab\cos^2\alpha - 2ab\sin^2\alpha\cos\theta$$

$$-2ab\cos\emptyset = -2ab\cos^2\alpha - 2ab\sin^2\alpha\cos\theta$$

$$\cos\emptyset = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\theta$$

有了以上的討論，我們試著放寬條件，若$\overline{AB}$、$\overline{AC}$與稜線的夾角在不同的狀況下？彼此之間的關聯性為何？

定理 3

設 L 為兩平面 E_1 及 E_2 的交線，若$\overline{AB} = \overline{AC} = a$，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$與稜線的夾角分別為 α 及 β（其中$\alpha \neq 90°$，$\beta \neq 90°$且為同側夾角），∠BAC $=\emptyset$，兩面角為 θ，則$\cos\emptyset = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

【證明】:

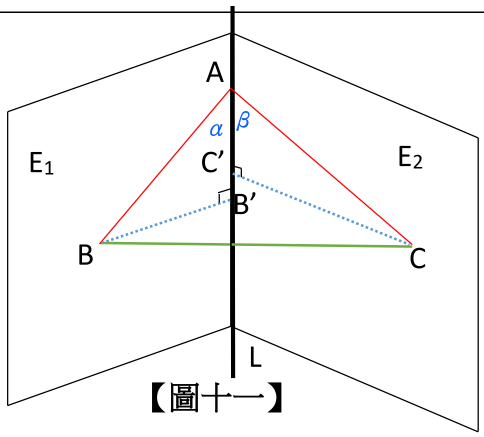
如【圖十一】所示，

分別以 B、C 對稜線 L 取垂足點 B’、C’。

因$\overline{AB} = \overline{AC} = a$

令∠BAB’$=\alpha \neq 90°$，∠CAC’$=\beta \neq 90°$

$\overline{BB'} = a \times sin\,\alpha$



【圖十一】

$\overline{CC'} = a \times \sin\beta$

在△ABC 中

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\emptyset$

$= a^2 + a^2 - 2 \times a \times a \times \cos\emptyset$

$= 2a^2 - 2a^2\cos\emptyset \cdots\cdots$ ①

又$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C}$

$\therefore \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C}\right|$

$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C}\right|^2$

$= \left|\overrightarrow{BB'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{B'C'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{C'C}\right|^2 + 2(\overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'C'} \cdot \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'C} \cdot \overrightarrow{BB'})$

$\because \overrightarrow{BB'} \perp \overrightarrow{B'C'} \Rightarrow \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{B'C'} = 0$

同理 $\Rightarrow \overrightarrow{B'C'} \cdot \overrightarrow{C'C} = 0$

$\therefore \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BB'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{B'C'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{C'C}\right|^2 + 2\overrightarrow{C'C} \cdot \overrightarrow{BB'}$

$= (a\sin\alpha)^2 + (a\cos\alpha - a\cos\beta)^2 + (a\sin\beta)^2 + 2 \times a\sin\beta \times a\sin\alpha \times \cos(180° - \theta)$

$= (a\sin\alpha)^2 + (a\cos\alpha - a\cos\beta)^2 + (a\sin\beta)^2 - 2 \times a\sin\beta \times a\sin\alpha\cos\theta$

$= a^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha - 2a^2\cos\alpha\cos\beta + a^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta - 2a^2\sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

$= a^2 - 2a^2\cos\alpha\cos\beta + a^2 - 2a^2\sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

$= 2a^2 - 2a^2\cos\alpha\cos\beta - 2a^2\sin\alpha\sin\beta\cos\theta \cdots\cdots$ ②

由①、②可知

$2a^2 - 2a^2\cos\emptyset = 2a^2 - 2a^2\cos\alpha\cos\beta - 2a^2\sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

$1 - \cos\emptyset = 1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

$\cos\emptyset = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

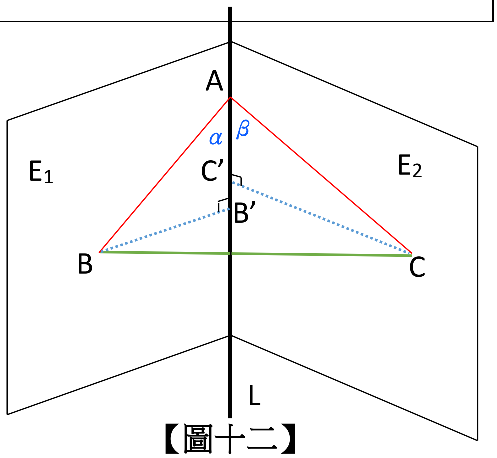
定理 4

設 L 為兩平面 E_1 及 E_2 的交線，若$\overline{AB} = a$，$\overline{AC} = b(a \neq b)$， $\overline{AB}$、$\overline{AC}$與稜線的夾角分別為 α 及 β（其中$\alpha \neq 90°$， $\beta \neq 90°$且為同側夾角），$\angle$BAC =$\emptyset$，兩面角為 θ，則$\cos\emptyset = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

【證明】：

如【圖十二八】所示，

分別以 B、C 對稜線 L 取垂足點 B'、C'。



【圖十二】

因$\overline{AB} = a$，$\overline{AC} = b,$

令$\angle$BAB'= $\alpha \neq 90°$，$\angle$CAC'= $\beta \neq 90°$

$\overline{BB'} = a \times sin\,\alpha$

$\overline{CC'} = b \times \sin\beta$

在△ABC 中

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\emptyset$$

$$= a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos\emptyset$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\emptyset \cdots\cdots ①$$

又$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C}$

$$\therefore |\overrightarrow{BC}| = \left|\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C}\right|$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = \left|\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C}\right|^2$$

$$= \left|\overrightarrow{BB'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{B'C'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{C'C}\right|^2 + 2(\overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'C'} \cdot \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'C} \cdot \overrightarrow{BB'})$$

$\because \overrightarrow{BB'} \perp \overrightarrow{B'C'} \Rightarrow \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{B'C'} = 0$

同理 $\Rightarrow \overrightarrow{B'C'} \cdot \overrightarrow{C'C} = 0$

$$\therefore |\overrightarrow{BC}|^2 = \left|\overrightarrow{BB'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{B'C'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{C'C}\right|^2 + 2\overrightarrow{C'C} \cdot \overrightarrow{BB'}$$

$$= (a\sin\alpha)^2 + (a\cos\alpha - b\cos\beta)^2 + (b\sin\beta)^2 + 2 \times b\sin\beta \times a\sin\alpha \times \cos(\pi - \theta)$$

$$= (a\sin\alpha)^2 + (a\cos\alpha - b\cos\beta)^2 + (b\sin\beta)^2 - 2 \times b\sin\beta \times a\sin\alpha \times \cos\theta$$

$= a^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha - 2ab\cos\alpha\cos\beta + b^2\cos^2\beta + b^2\sin^2\beta - 2ab\sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

$= a^2 - 2ab\cos\alpha\cos\beta + b^2 - 2ab\sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha\cos\beta - 2ab\sin\alpha\sin\beta\cos\theta \cdots\cdots$②

由①、②可知

$a^2 + b^2 - 2ab\cos\emptyset = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha\cos\beta - 2ab\sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

$-2ab\cos\emptyset = -2ab\cos\alpha\cos\beta - 2ab\sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

$\cos\emptyset = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

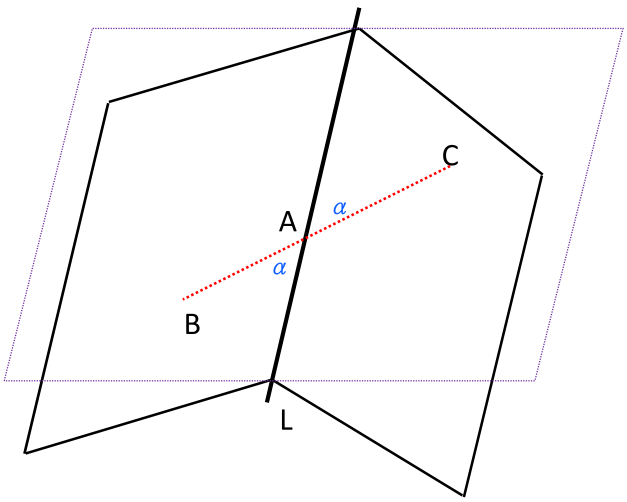
經由上面的討論，我們得到不同的同側夾角的關係，接下我們試著將兩個偏離稜線的線段以不同的方向進行旋轉，即為異側夾角，試看看會得到什麼結果？

三、異側夾角：

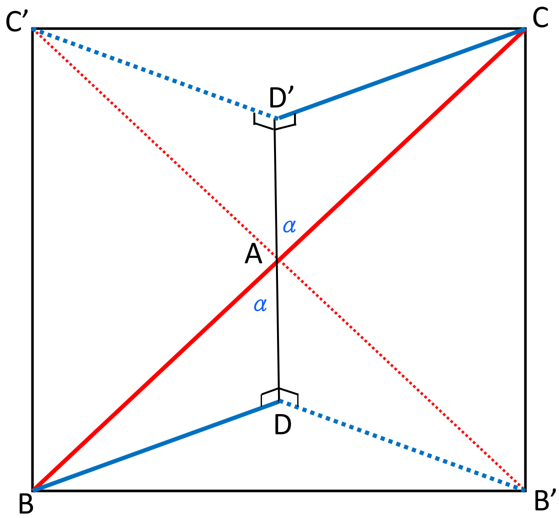
定理 5

設 L 為兩平面 E_1 及 E_2 的交線，若$\overline{AB} = \overline{AC} = a$ ，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$與稜線 L 的夾角均為α（其中$\alpha \neq 90°$且為異側夾角），∠BAC =$\emptyset$，兩面角∠BDC =θ，則$\cos\emptyset = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\theta$。

【證明】:



【圖十三】



【圖十四】

如【圖十三】所示，分別以稜線 L 為對稱軸，對 B、C 作對稱點 B’、C’，再分別以 B、C 對稜線 L 取垂足點 D、D’， 形成如【圖十四】的結構圖。

令∠BAD=α，∠CAD'=α

$\overline{AB} = \overline{AC} = a$

兩面角∠BDB’=θ

空間中∠BAC=∅

在△ABC 中

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \cos\emptyset$

$= a^2 + a^2 - 2a \times a \cos\emptyset$

$= 2a^2 - 2a^2 \cos\emptyset \cdots\cdots①$

在△BB’D 中

$\overline{BB'}^2 = (a \sin\alpha)^2 + (a \sin\alpha)^2 - 2a \sin\alpha \times a \sin\alpha \times \cos\theta$

$= 2a^2 \sin^2\alpha - 2a^2 \sin^2\alpha \cos\theta$

$\overline{B'C} = 2a \cos\alpha \qquad \overline{B'C}^2 = 4a^2 \cos^2\alpha$

$\overline{BC}^2 = \overline{BB'}^2 + \overline{B'C}^2$

$= 2a^2 \sin^2\alpha - 2a^2 \sin^2\alpha \cos\theta + 4a^2 \cos^2\alpha \cdots\cdots②$

由①②可知

$2a^2 - 2a^2 \cos\emptyset = 2a^2 \sin^2\alpha - 2a^2 \sin^2\alpha \cos\theta + 4a^2 \cos^2\alpha$

$1 - \cos\emptyset = \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \cos\theta + 2\cos^2\alpha$

$1 - \cos\emptyset = 1 - \sin^2\alpha \cos\theta + \cos^2\alpha$

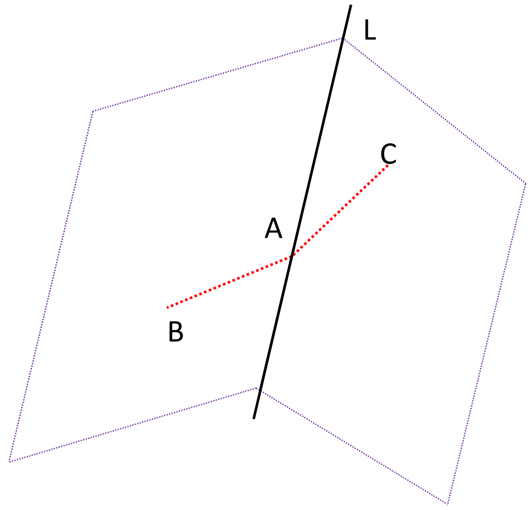
$-\cos\emptyset = -\sin^2\alpha \cos\theta + \cos^2\alpha$

$\cos\emptyset = \sin^2\alpha \cos\theta - \cos^2\alpha$

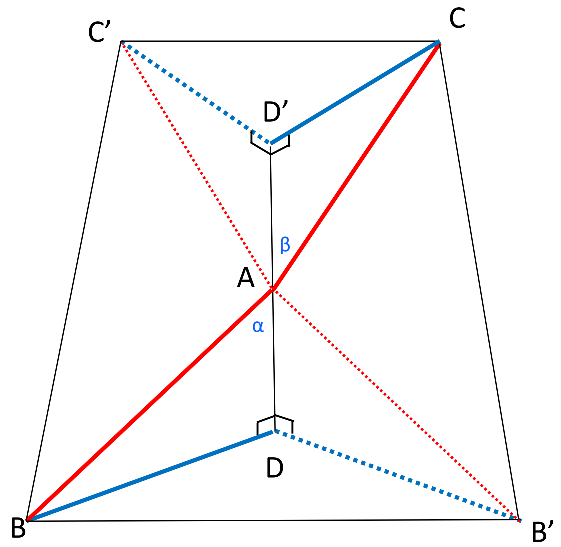
定理 6

設 L 為兩平面 E_1 及 E_2 的交線，若$\overline{AB} = a$，$\overline{AC} = b$，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$與稜線的夾角分別為 α 及 β（其中$\alpha \neq 90°$，$\beta \neq 90°$且為異側夾角），∠BAC =$\emptyset$，兩面角為 θ，則$\cos\emptyset = \sin\alpha\sin\beta\cos\theta - \cos\alpha\cos\beta$

【證明】:



【圖十五】



【圖十六】

如【圖十五】所示，分別以稜線 L 為對稱軸，對 B、C 作對稱點 B'、C'，再分別以 B、C 對稜線 L 取垂足點 D、D'， 形成如【圖十六】的結構圖。

令∠BAD=α，∠CAD'=β

兩面角∠BDB'=θ

在△ABC 中

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC}\cos\emptyset$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\emptyset \cdots\cdots ①$$

又$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'C}$

$$\therefore \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'C}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'C}\right|^2$$

$$= \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{DD'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{D'C}\right|^2 + 2(\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{D'C} + \overrightarrow{D'C}\cdot\overrightarrow{BD})$$

$\because \overrightarrow{BD'} \perp \overrightarrow{DD'} \Rightarrow \overrightarrow{BD'}\cdot\overrightarrow{DD'} = 0$

同理 $\Rightarrow \overrightarrow{D'C}\cdot\overrightarrow{DD'} = 0$

$$\therefore \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{DD'}\right|^2 + \left|\overrightarrow{D'C}\right|^2 + 2\overrightarrow{D'C}\cdot\overrightarrow{BD}$$

$$= (a\sin\alpha)^2 + (a\cos\alpha + b\cos\beta)^2 + (b\sin\beta)^2 + 2\times b\sin\beta\times a\sin\alpha\cos(\pi-\theta)$$

$$= (a\sin\alpha)^2 + (a\cos\alpha + b\cos\beta)^2 + (b\sin\beta)^2 - 2\times b\sin\beta\times a\sin\alpha\cos\theta$$

$$= a^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha + 2ab\cos\alpha\cos\beta + b^2\cos^2\beta + b^2\sin^2\beta - 2a\sin\alpha\, b\sin\beta\cos\theta$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha\cos\beta - 2ab\sin\alpha\sin\beta\cos\theta \cdots\cdots ②$$

由①、②可知

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\emptyset = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha\cos\beta - 2ab\sin\alpha\sin\beta\cos\theta$$

$$-2ab\cos\emptyset = 2ab\cos\alpha\cos\beta - 2ab\sin\alpha\sin\beta\cos\theta$$

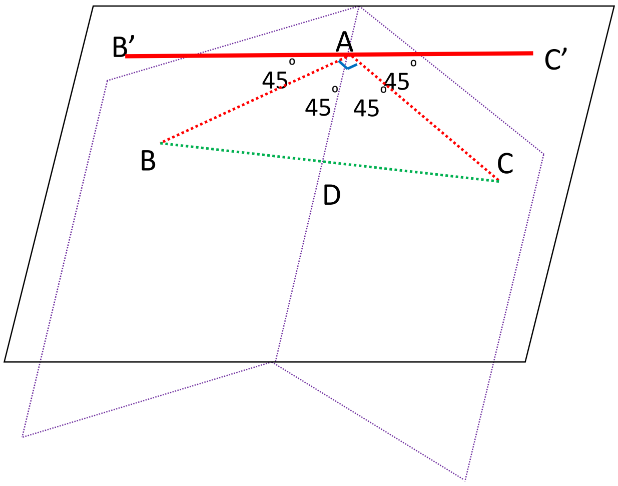
$$\cos\emptyset = \sin\alpha\sin\beta\cos\theta - \cos\alpha\cos\beta$$

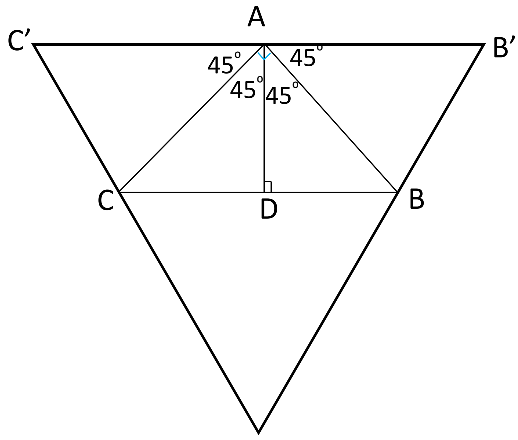
當摺紙後原本在平面的線段在視覺上感覺就變小了，接下來我們來討論摺紙後的長度變化關係。

定理 7

若原紙張上的線段$\overline{B'C'}$長度為 2a，取$\overline{B'C'}$中點將紙對摺使得兩面角為直角，則空間中線段$\overline{BC}$的長為$\sqrt{2}a$，即$\overline{BC}$：$\overline{B'C'} = 1$：$\sqrt{2}$

【證明】:





【圖十七】 【圖十八】

如【圖十七】所示，取射線 B'B 射線及 C'C 交於一點，形成如【圖十八】的結構圖

令原紙張上的$\overline{B'C'}$的中點為 A，則$\overline{AB} = \overline{AC} = a$

$\overline{\mathrm{AB'}} = \overline{AC'} = a$

又∠BAC=90°

$\therefore \overline{BC} = \sqrt{2}a$

$\overline{BC} : \overline{B'C'} = \sqrt{2}a : 2a$

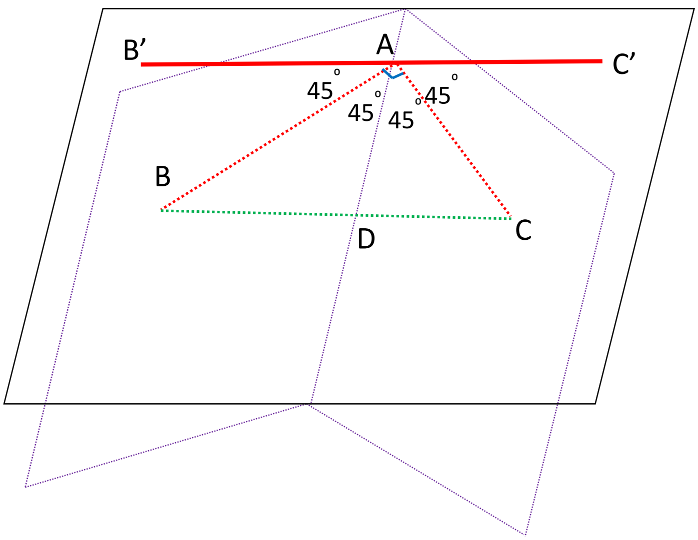
$= \sqrt{2} : 2 = 1 : \sqrt{2}$

依上述的討論，我們再放寬討論的條件，如果對摺條件不是線段的中點，那麼所的結果又會有什麼改變嗎？

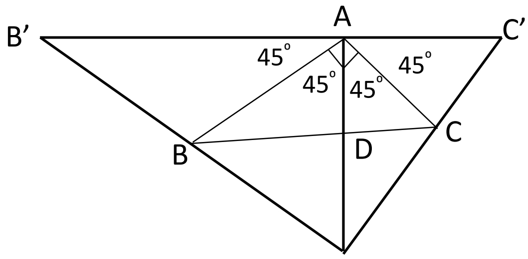
定理 8

若原紙張上的$\overline{B'C'}$的對摺點為 A，且$\overline{B'A} = a$，$\overline{AC'} = b$，將紙對摺使得兩面的夾角為直角，則$\overline{BC} : \overline{\mathrm{B'C'}} = \sqrt{a^2+b^2} : (a+b)$

【證明】:



【圖十九】



【圖二十】

如【圖十九】所示，取射線$\overrightarrow{B'B}$射線及$\overrightarrow{C'C}$交於一點，形成如【圖二十】的結構圖

$$\overline{AB} = \overline{AB'} = a$$

$$\overline{AC} = \overline{AC'} = b$$

又$\angle BAC = 90^\circ$

$$\overline{BC} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\overline{BC} : \overline{B'C'} = \sqrt{a^2 + b^2} : (a + b)$$

肆、研究結果

一、在 L 為兩平面 E_1 及 E_2 的交線，若$\overline{AB} = a$，$\overline{AC} = b$，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$與稜線 L 的夾角分別為α及β(其中$\alpha \neq 90°$且為同側夾角)，$\angle BAC = \emptyset$，兩面角$\angle BDC = \theta$，前提下可知θ與$\emptyset$的函數關係：

（一）當$a = b$，$\alpha = \beta$，則$\cos\emptyset = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\theta$

（二）當$a \neq b$，$\alpha = \beta$，則$\cos\emptyset = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\theta$

（三）當$a = b$，$\alpha \neq \beta$，則$\cos\emptyset = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

（四）當$a \neq b$，$\alpha \neq \beta$，則$\cos\emptyset = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\theta$

由上可知$\overline{AB}$、$\overline{AC}$長度不影響θ與$\emptyset$的函數關係，因此我們在討論異側夾角時，就不特別控制$\overline{AB}$、$\overline{AC}$長短是否相同。

二、在 L 為兩平面 E_1 及 E_2 的交線，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$與稜線 L 的夾角分別為α 及β(其中$\alpha \neq 90°$且為異側夾角)，∠BAC =$\emptyset$，兩面角∠BDC =θ，前提下可知θ與$\emptyset$的函數關係：

（一） $\alpha = \beta$，則$\cos\emptyset = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\theta$。

（二） $\alpha \neq \beta$，則$\cos\emptyset = \sin\alpha\sin\beta\cos\theta - \cos\alpha\cos\beta$

三、若原紙張上的線段$\overline{B'C'}$長度為 2a，摺點為 A，且$\overline{B'A} = a$，$\overline{AC'} = b$，將紙摺起來使得兩面的夾角為直角，則空間中線段為$\overline{BC}$時，$\overline{BC}$、$\overline{B'C'}$長度變化關係：

（一）當$a = b$，則$\overline{BC}：\overline{B'C'} = 1：\sqrt{2}$

（二）當$a \neq b$，則$\overline{BC}：\overline{B'C'} = \sqrt{a^2 + b^2}：(a + b)$

伍、結論與未來展望

在本作品中，我們試著討論不同的摺紙角度對於線段的角度及長度所產生的關係。從目前的關係式看來，雖可找到之間的函數關係，但亦需考量實際摺紙中線段的寬度。未來可以試著精簡函數關係，並討論有關不同寬度的線段在截痕角度的關係式。

陸、參考資料及其他

Wilson, L. (2020, December). New Scientist: Anamorphic Illustration. Retrieved December 23, 2022, from https://lexwilson.co.uk/new-scientist-anamorphic-illustration