附件三

屏東縣第 60 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：給我滾回來

關 鍵 詞：<u>　正方形　</u>、<u>　路徑長　</u>、<u>　轉動　</u>（最多三個）

編號：

製作說明：

1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。

2.編號：由承辦學校統一編列。

3.封面編排由參展作者自行設計。

給我滾回來！

－探討正方形在矩形外滾動問題

摘要：

這個作品源自 TRML2002 年思考賽中的一個題目，題目中所探討的是將正方形繞著一固定矩形邊長在外部滾動，並當正方形轉回到原出發點時所走的路徑長算出，並且我們發現正方形圍繞著 m:n 的矩形外轉動的一般化結果：即走直線的路徑長+轉角產生的路徑長，故有以下兩種分類：假設正方形的邊長為 1 單位長，

矩形的長為 m 單位長，寬為 n 單位長，其中 m、n 皆為正整數

1. m 為奇數，n 為奇數時

$$\Rightarrow \text{此時的路徑長} = \frac{(m+n)\left(2+\sqrt{2}\right)}{4}\pi \begin{cases} +\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi & m=4a+1\text{，}n=4b+1\text{或 } m=4a+3\text{，}n=4b+3\text{；} \\ +\left(1+\sqrt{2}\right)\pi & m=4a+1\text{，}n=4b+3\text{；} \\ +\pi & m=4a+3\text{，}n=4b+1\text{；} \\ +2\pi & m\text{ 為偶數，}n\text{ 為偶數時} \end{cases}$$

；其中 a、b 為正整數或 0

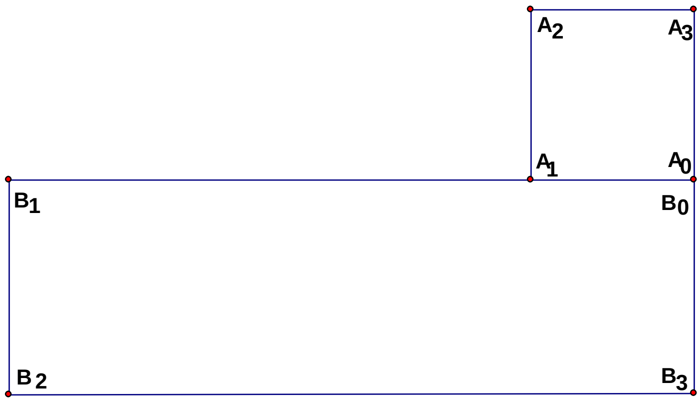
2. m、n 有一個為奇數，另一個為偶數時 $\Rightarrow$ 路徑長 $=\dfrac{(m+n)\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}\pi+\left(2+\sqrt{2}\right)\pi$

壹、　研究動機：

TRML2002 年的思考賽中有一個這樣的題目：

設 $B_0B_1B_2B_3$ 為一個固定的的矩形，其中 $\overline{B_0B_1}=m$，$\overline{B_1B_2}=n$，(m 和 n 均為正整數); $A_0A_1A_2A_3$ 是一個邊長為 1 的正方形，其中頂點 A_0 與 B_0 重合(如下圖所示). 將正方形 $A_0A_1A_2A_3$ 沿著矩形 $B_0B_1B_2B_3$ 的外緣邊界依逆時針方向轉動; 首先以 A_1 為旋轉中心，將 $A_0A_1A_2A_3$ 逆時針

方向旋轉，直到 A_2 落在矩形 $B_0B_1B_2B_3$ 的邊上；再以 A_2 為旋轉中心逆時針方向旋轉，直到 A_3 落在矩形 $B_0B_1B_2B_3$ 的邊上；依序再以 A_3 為旋轉中心作同樣的旋轉⋯，直到正方形 $A_0A_1A_2A_3$ 回到原來的位置(即所有的頂點恰好都回到原出發時的位置).



其中一個小題所問的是：正方形 $A_0A_1A_2A_3$ 第一次回到原來的位置時，A_2 所走路徑的總長為多少?

這讓我們產生了好奇，題目中只問了第一次回到原來的位置所走的路徑總長，要是我們將題目推廣成正方形滾動回原出發點且四個頂點也都要回到原來的位置，那麼所走的路徑長又會變成怎樣？路線長度可以推導出公式嗎？

貳、　研究目的：

一、正方形如何滾動？轉角的地方又與直線的滾動有何相異之處？

二、正方形滾動的路線是固定的嗎？要滾動幾圈才能滾回原來的位置？

三、由滾動的路線能否算出觀察點所走的路徑長：當正方形轉回出發點時所走的路徑又為何？

四、正方形在矩形外滾動的一般化情形又是如何呢？

參、　研究設備及器材：

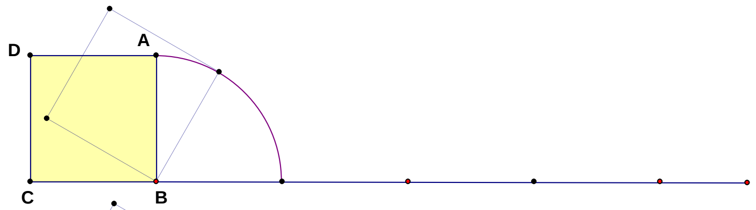
GSP 動態幾何繪圖軟體、電腦、筆、紙

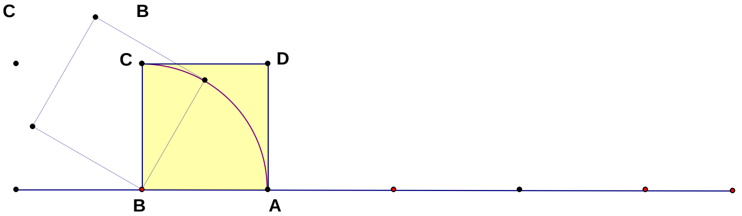
肆、 研究過程或方法：

一、正方形如何滾動？轉角的地方又與直線的滾動有何相異之處？

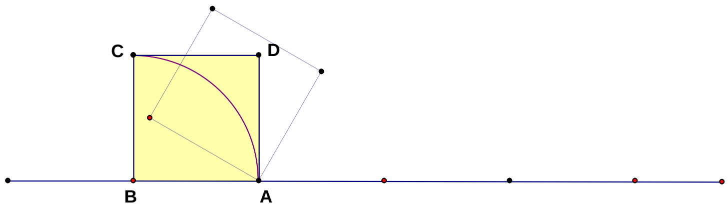
因為正方形在直線上滾動前進時，只要滾動四次，正方形的四個頂點便可回到原本相對應的位置；如下圖所示。

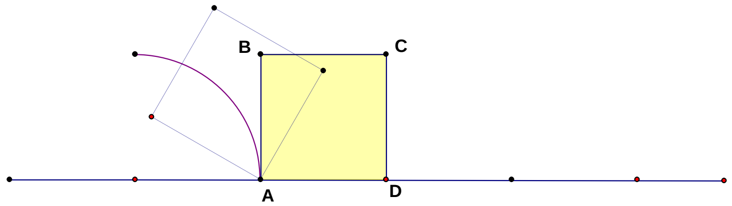
第一次滾動：(B 點為圓心)



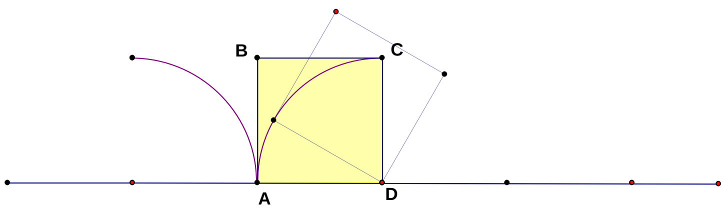


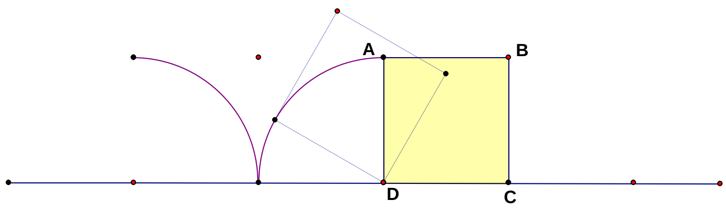
第二次滾動：(A 點為圓心)



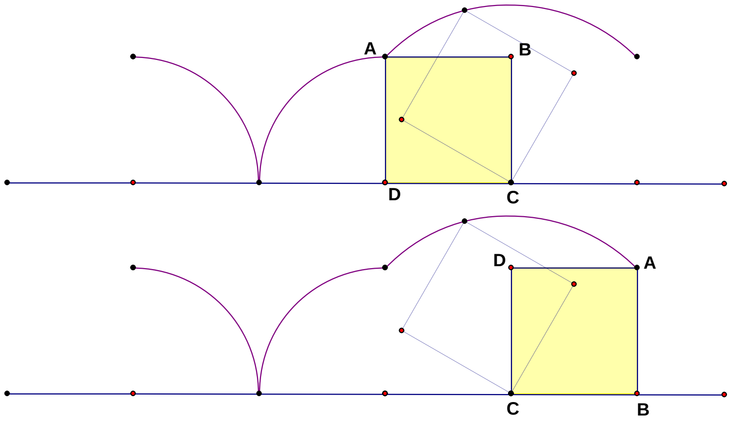


第三次滾動：(D 點為圓心)

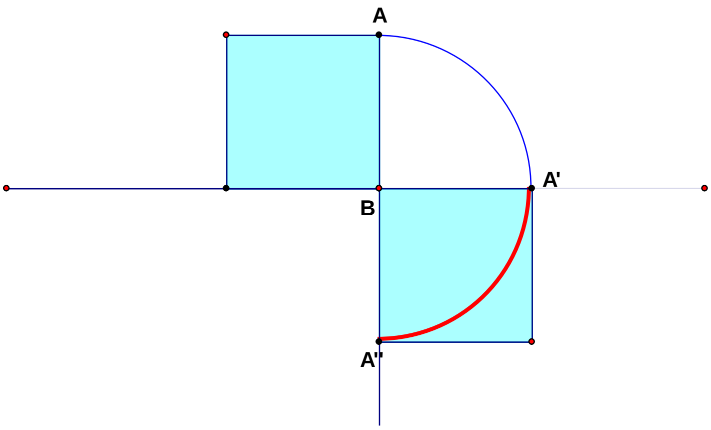




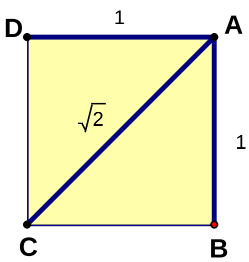
第四次滾動：(C 點為圓心)



因此，當正方形按照順序分別以 B→A→D→C 為圓心在直線上滾動，要滾動回原本對應的位置時，所需滾動的次數必須是 4 的倍數。另外，我們也發現到當正方形滾動的過程中，在直線上每一次的滾動都是 90 度，只有遇到矩形的頂點時，滾動的角度就會比在直線上滾動時多了 90 度(∠ABA’)，如下圖所示。若是以 B 點為圓心在直線上滾動，A 點滾動後應該會落在 A’，但遇到矩形的頂點，則須再向下滾動 90 度，正方形的邊才會落在矩形的邊長上，因此最後的落點會落在 A”。



而滾動的半徑也有不同；其中以 B 和 D 點為圓心滾動時的半徑剛好是正方形的邊長，以 C 點為圓心滾動時的半徑為 $\sqrt{2}$ 倍的正方形邊長，以 A 點自己為圓心時則不會產生軌跡，這個藉由 A 點到 B、C、D 的距離即可得知。



二、正方形滾動的路線是固定的嗎？要滾動幾圈才能滾回原來的位置？

由以上的推論，我們知道當正方形要滾動回原本對應的位置時，所需滾動的次數必須是 4 的倍數。如今，我們要討論的是在任意一個矩形外正方形所滾動的路徑，其中矩形的長和寬均為此正方形邊長的整數倍。那我們可以去思考：在邊長比例不同的矩形中，A 點至少需繞行幾圈才能繞回原點？

為方便討論，假設正方形的邊長為 1 單位長，

矩形的長為 m 單位長，寬為 n 單位長，其中 m、n 皆為正整數。

因此矩形的周長$=2(m+n)$；可分成以下兩種情形：

(一) $m+n$ 為偶數時，則$2(m+n)$必為 4 的倍數，因此正方形只要滾動 1 圈即可回到原本對應的位置。

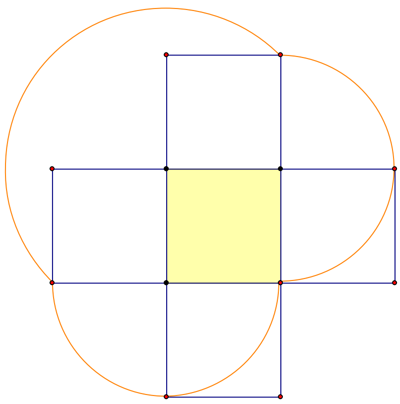
(二) $m+n$ 為奇數時，則$2(m+n)$為 2 的倍數，但不為 4 的倍數，因此要滾動 2 圈，滾動的周長為原來的 2 倍時，才會回到原本對應的位置。

藉由以上這個結論，後面我們討論路徑長時，將會就 $m+n$ 為偶數或 $m+n$ 為奇數兩種狀況進行討論。

三、由滾動的路線能否算出觀察點所走的路徑長：當正方形轉回出發點時所走的路徑又為何？

（一）尋找圖形規則：

我們將由 $m+n$ 為偶數或 $m+n$ 為奇數兩種方向去探討正方形在矩形外按順時針方向所滾動的路徑長度；為方便討論，假設正方形的邊長 1 單位長；而長=4 單位長，寬=1 單位長的矩形，在此會以長：寬=4：1 表示。先來看看正方形在長：寬=1：1 外圍滾動時的圖形：



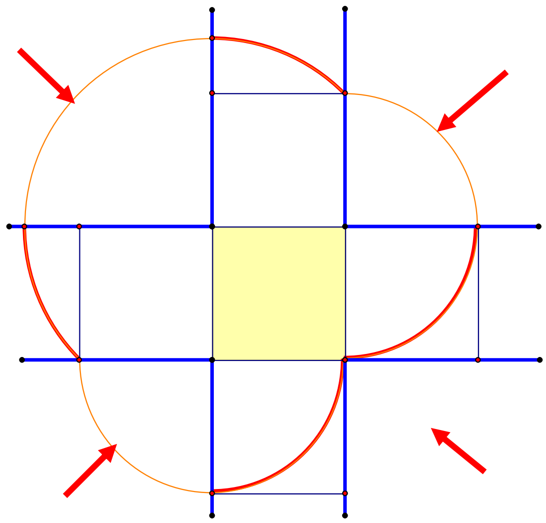
總路徑長為：
半徑為 1 的180°弧長 2 個+半徑為$\sqrt{2}$的180°弧長 1 個

$$=2\pi\times1\times\frac{180}{360}\times2+2\pi\times\sqrt{2}\times\frac{180}{360}\times1$$

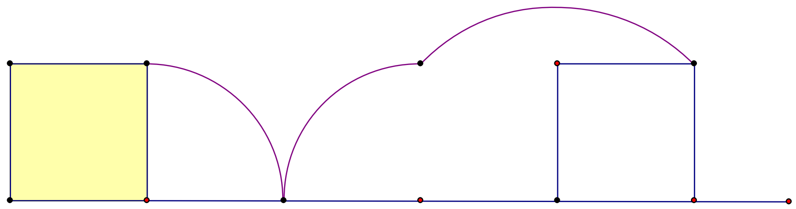
$$=2\pi+\sqrt{2}\pi$$

1：1 的圖形是滾動一圈就回到原本對應位置，但就圖形的形狀及轉動的角度明顯和在直線上滾動的圖形很不同，乍看之下好像沒有任何的規則，但前面有討論過，正方形在滾

動的過程中遇到矩形的頂點會多滾動 90 度，所以我們把四個頂點位置多滾動的 90 度路徑另外劃分出來重新再看一次 1：1 的圖形：



紅色箭頭所指的地方就是因轉角而多滾動的路徑，而其他原來滾動的路徑(即粗體的圓弧部分)如果銜接在一起就會跟在直線上滾動的路徑一樣，如下圖所示。

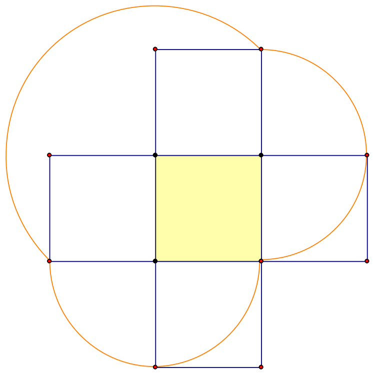


這樣的話除了轉角的地方，其他位置的滾動路徑長就容易計算了；最大的問題就在四個頂點多滾動的路徑雖然都是滾動 90 度，但有時半徑是 1 有時半徑是$\sqrt{2}$，有時觀察點又剛好是圓心，這個會有規則可循嗎？

為了找尋規則，我們畫了好幾個不同邊長比例的矩形外滾動的路徑圖來進行觀察：

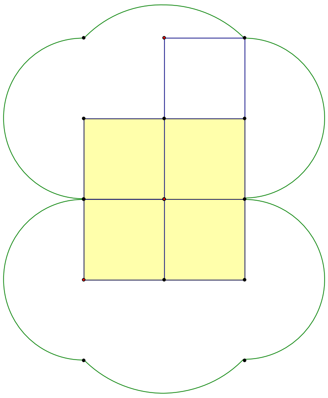
1. *m+n* 為偶數時：(滾動一圈就回到原本對應的位置)

(1)長：寬=1：1 時，



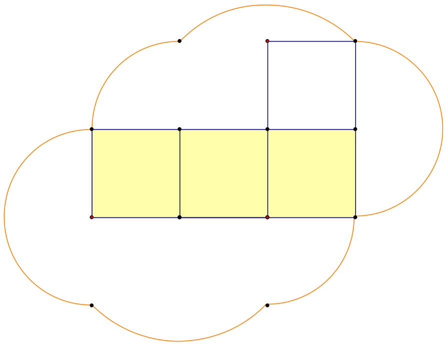
四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 2 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 1 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 1 次

(2)當長：寬=2：2 時，



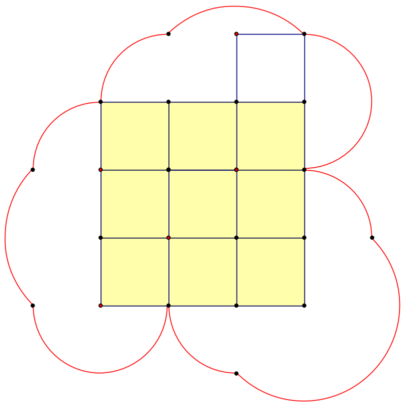
四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 4 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 0 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 0 次

(3) 當長：寬=3：1 時，



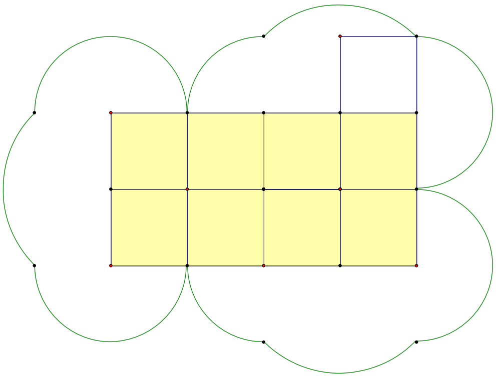
四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 2 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 0 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 2 次

(4) 當長：寬=3：3 時，



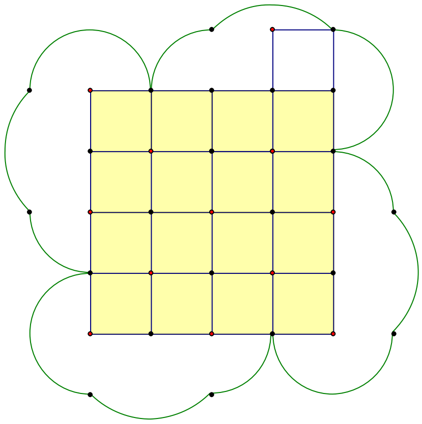
四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 2 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 1 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 1 次

(5) 當長：寬=4：2 時，



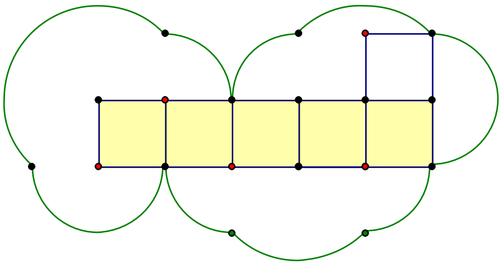
四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 4 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 0 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 0 次

(6) 當長：寬=4：4 時，



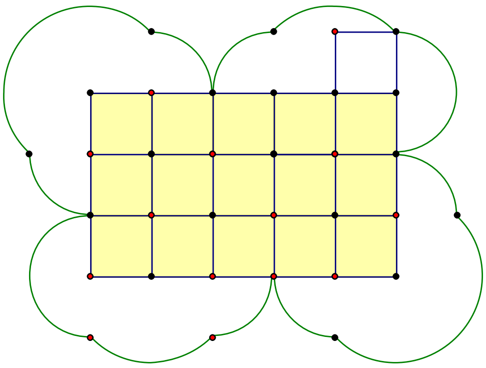
四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 4 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 0 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 0 次

(7) 當長：寬=5：1 時，



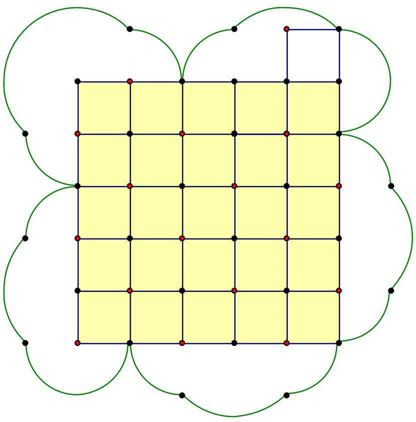
四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 2 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 1 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 1 次

(8) 當長：寬=5：3 時，



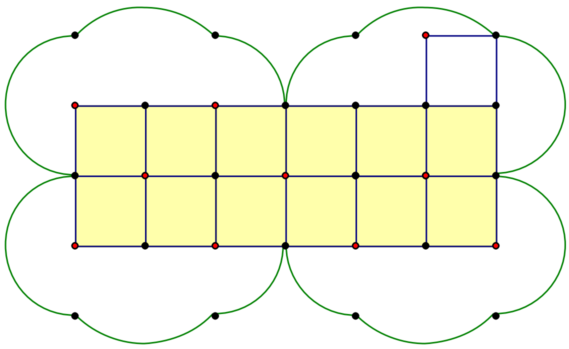
四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 2 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 2 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 0 次

(9) 當長：寬=5：5 時，



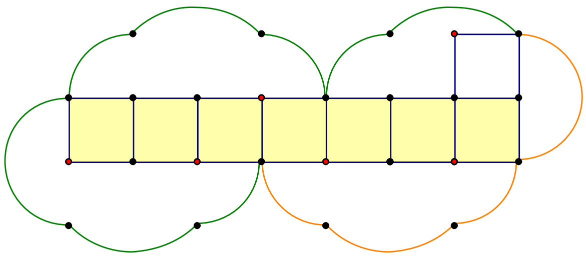
四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 2 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 1 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 1 次

(10) 當長：寬=6：2 時，



四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 4 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 0 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 0 次

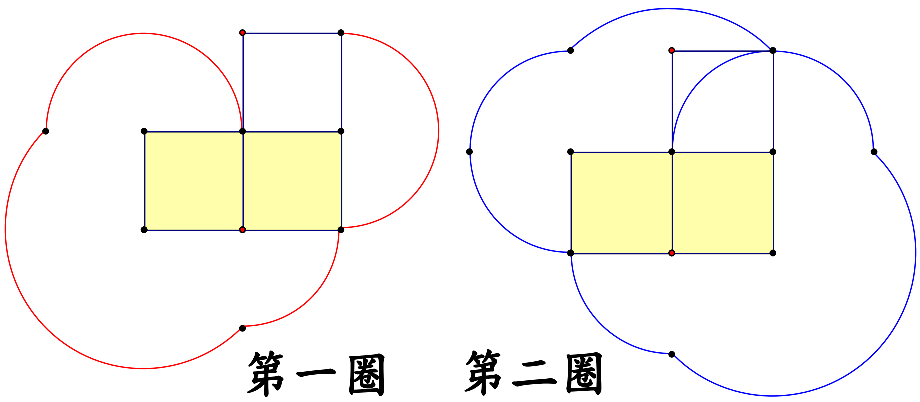
(11) 當長：寬=7：1 時，



四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 2 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 0 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 2 次

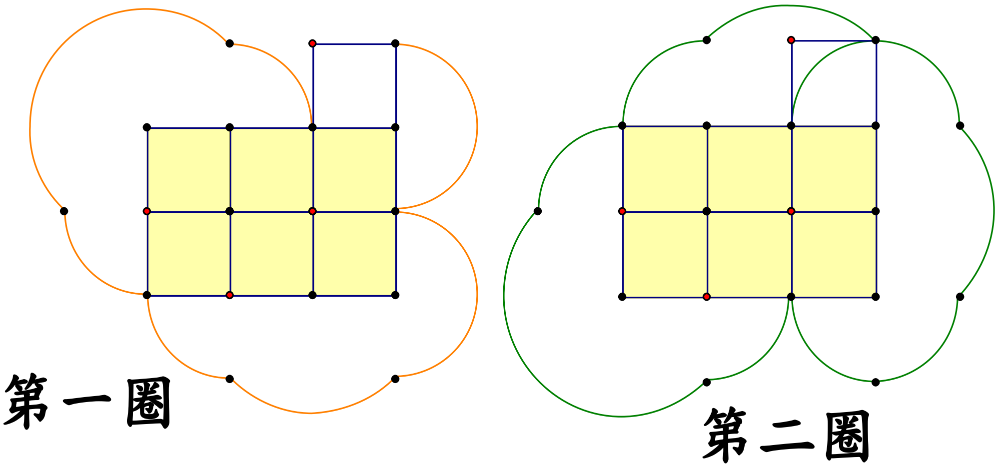
2. $m+n$ 為奇數時：(滾動兩圈才回到原本對應的位置)

(1) 當長：寬=2：1 時，



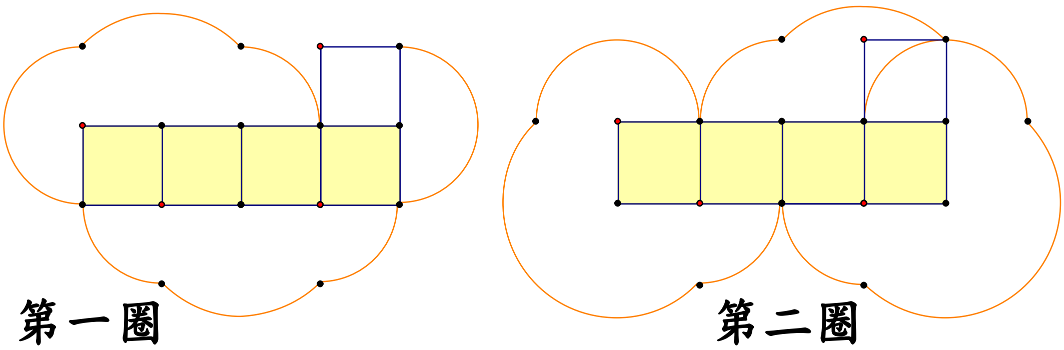
四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 4 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 2 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 2 次

(2) 當長：寬=3：2 時，



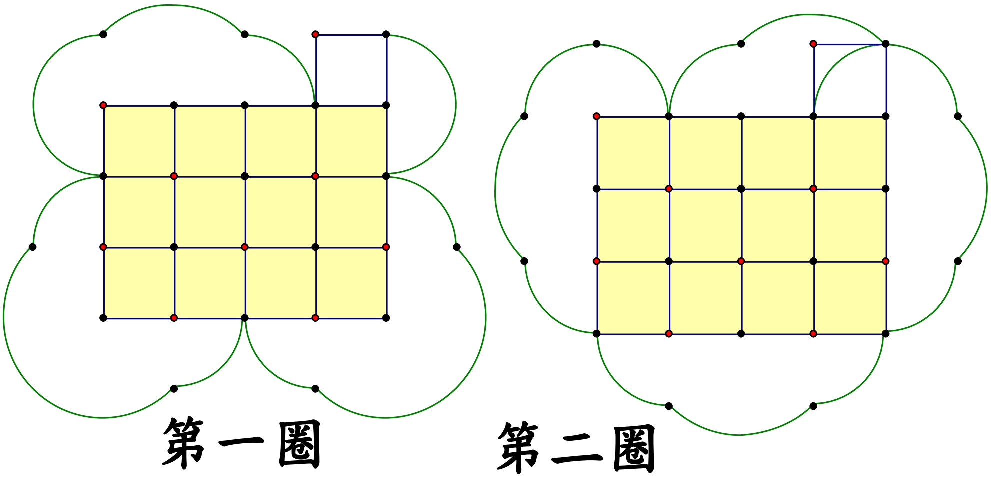
四個轉角多轉的 90 度半徑分別為： 半徑為 1 的 4 次， 半徑為$\sqrt{2}$的 2 次， 半徑為 0(觀察點為圓心)的 2 次

(3) 當長：寬=4：1 時，



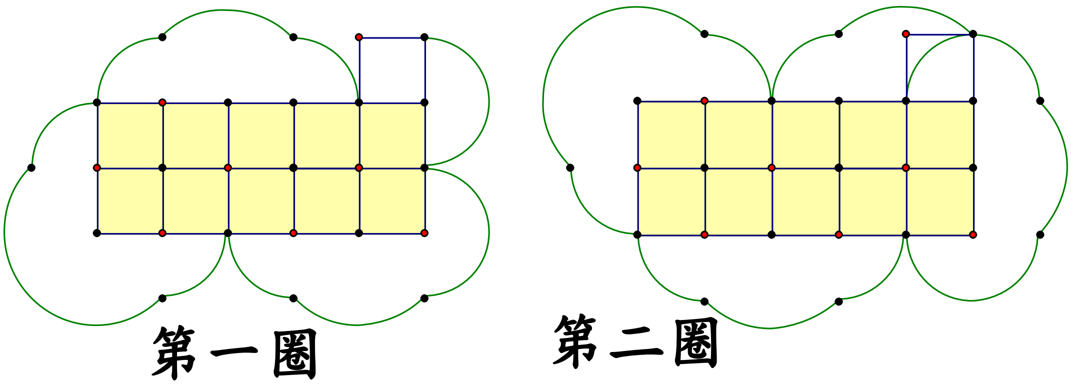
四個轉角多轉的 90 度半徑分別為： 半徑為 1 的 4 次， 半徑為$\sqrt{2}$的 2 次， 半徑為 0(觀察點為圓心)的 2 次

(4) 當長：寬=4：3 時，



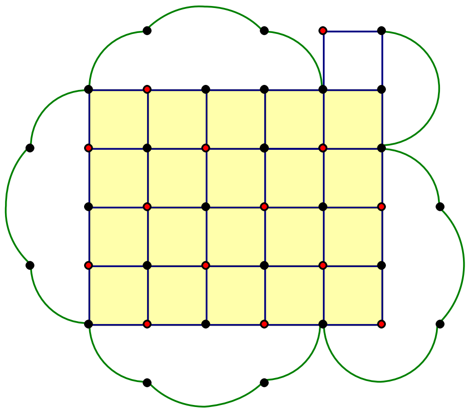
四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 4 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 2 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 2 次

(5) 當長：寬=5：2 時，

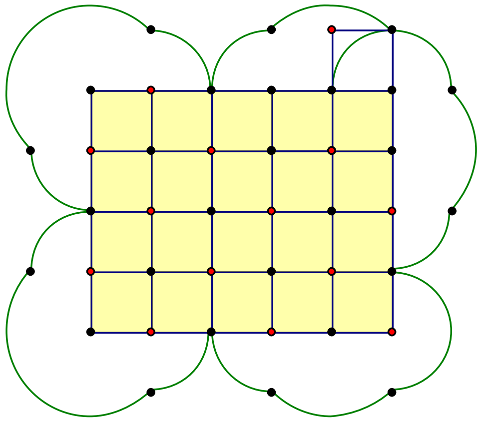


四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
半徑為 1 的 4 次，
半徑為$\sqrt{2}$的 2 次，
半徑為 0(觀察點為圓心)的 2 次

(6) 當長：寬=5：4 時，



第一圈



第二圈

> 四個轉角多轉的 90 度半徑分別為：
> 半徑為 1 的 4 次，
> 半徑為$\sqrt{2}$的 2 次，
> 半徑為 0(觀察點為圓心)的 2 次

（二）結果：

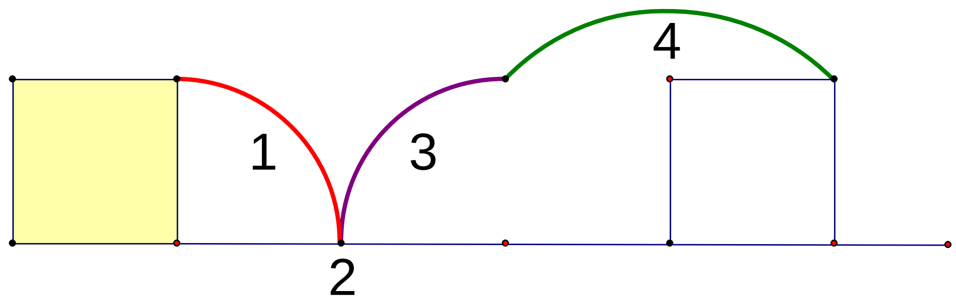
將正方形在以上不同長寬比例的矩形外圍四個頂點多轉動的那 90 度的次數狀況整理如下：

長：寬 / 轉動半徑	1：1	2：1	2：2	3：1	3：2	3：3	4：1	4：2	4：3
1	2	4	4	2	4	2	4	4	4
$\sqrt{2}$	1	2	0	0	2	1	2	0	2
0	1	2	0	2	2	1	2	0	2

長：寬 / 轉動半徑	4：4	5：1	5：2	5：3	5：4	5：5	6：2	7：1	
1	4	2	4	2	4	2	4	2	
$\sqrt{2}$	0	1	2	2	2	1	0	0	
0	0	1	2	0	2	1	0	2	

從表格中不難發現，$m+n$ 為奇數時(藍色部分)，換言之就是 m、n 其中有一個是奇數，另外一個是偶數時，因為要轉兩圈才能回到原本對應的位置，會經過 8 次的轉角，但因轉角所多轉動的 90 度的路徑長組合起來都是半徑 1 的轉動 4 次，半徑$\sqrt{2}$的轉動 2 次，半徑 0 的(觀察點剛好為支點)2 次所產生的弧長總和。但 m、n 同為奇數或同為偶數時情況就有好多種，到底是為什麼呢？

我們再重新看一次在直線上滾動的圖形，並將每一次滾動加以註記：



$$每一次完整的滾動所走的路徑長=2\pi\times1\times\frac{1}{4}+0+2\pi\times1\times\frac{1}{4}+2\pi\times\sqrt{2}\times\frac{1}{4}$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$$

如此周而復始，不斷循環，但如果正方形的第 k 次滾動剛好遇到矩形的頂點需要多轉 90 度時，其旋轉半徑會有以下的結論：若

$$\begin{cases} k=4t+1 \text{時，就是跟紅色的圓弧一樣，半徑為 } 1 \\ k=4t+2 \text{時，就是觀察點為圓心，半徑為 } 0 \\ k=4t+3 \text{時，就是跟紫色的圓弧一樣，半徑為 } 1 \\ k=4t \quad\ \text{時，就是跟綠色的圓弧一樣，半徑為} \sqrt{2} \end{cases}$$

其中 t 為正整數或 0。

如此一來，我們只要知道在矩形頂點的是第幾次的滾動，將在頂點多轉動的路徑另外算出，就可以統計出轉角位置所滾動的路徑長了。

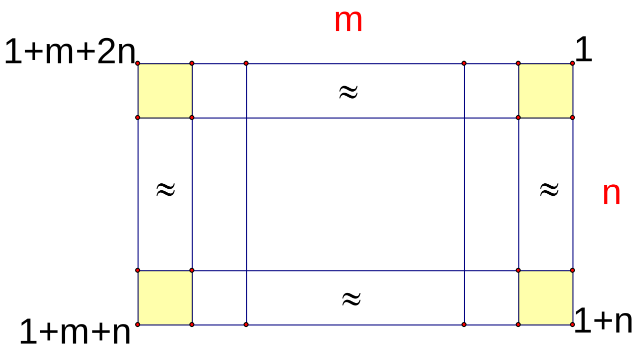
伍、 討論：

一、從以上的討論不難發現，觀察點所走的路徑長包含了兩部分，也就是直線的路徑長及因轉角而產生的路徑長；其中：

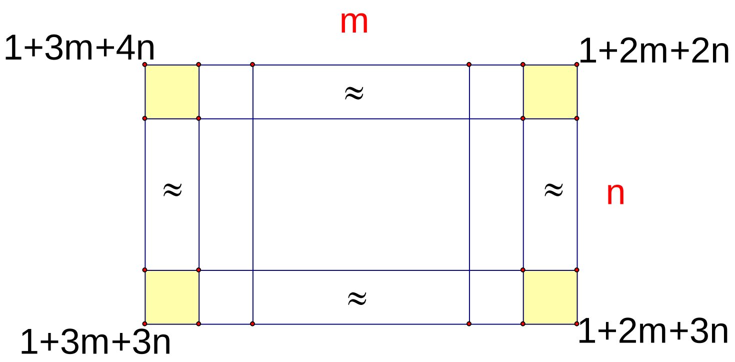
(一) 直線的路線長：和周長有關，須注意小正方形是繞行一圈還是兩圈才能回到原對應的位置；

(二) 因轉角而產生的路徑長：會因觀察點滾動到頂點時的旋轉半徑而有不同的狀況；接下來將就這些部分進行討論。

二、綜合以上的討論過程，我們將討論正方形在矩形外滾動的一般化情形；為此，我們先將正方形在 m:n 的矩形外滾動的順序標記下來，由右上角第一次滾動開始，順時鐘方向繞行，4 個頂點的分別是第 1、1+n、1+m+n、1+m+2n 次滾動，如下圖所示：



若需滾動第二圈時，4 個頂點的分別是第 *1+2m+2n*、*1+2m+3n*、*1+3m+3n*、*1+3m+4n* 次滾動，如下圖所示：



由於正方形的滾動 4 次為一個循環，因此在設定未知數時就有了以下的情形：

(一)滾動一圈回到原對應位置，此時 $m+n$ 為偶數，可能的情形為奇＋奇或偶＋偶；

1. m 為奇數，n 為奇數時會有以下四種情形：

(1) 設$m = 4a + 1$，$n = 4b + 1$；其中 a、b 為正整數或 0，

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+2*	*2*	*0*
1+m+n	*4a+4b+3*	*3*	*1*
1+m+2n	*4a+8b+4*	*0*	$\sqrt{2}$

∴在頂點部分以半徑 1 滾動 2 次，以半徑 $\sqrt{2}$ 滾動 1 次

$$\Rightarrow \text{此時的路徑長} = (m+n)\times 2 \div 4 \times \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi + 2\pi \times 1 \times \frac{1}{4} \times 2 + 2\pi \times \sqrt{2} \times \frac{1}{4} \times 1$$

$$= \frac{(m+n)(2+\sqrt{2})}{4}\pi + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$$

$$= \frac{(m+n+2)(2+\sqrt{2})}{4}\pi$$

(2) 設$m = 4a + 1$，$n = 4b + 3$；其中 a、b 為正整數或 0，

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+4*	*0*	$\sqrt{2}$
1+m+n	*4a+4b+5*	*1*	*1*
1+m+2n	*4a+8b+8*	*0*	$\sqrt{2}$

∴在頂點部分以半徑 1 滾動 2 次，以半徑$\sqrt{2}$滾動 2 次

$$\Rightarrow \text{此時的路徑長} = (m+n)\times 2 \div 4 \times \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi + 2\pi \times 1 \times \frac{1}{4} \times 2 + 2\pi \times \sqrt{2} \times \frac{1}{4} \times 2$$

$$= \frac{(m+n)(2+\sqrt{2})}{4}\pi + (1+\sqrt{2})\pi$$

(3) 設$m = 4a + 3$，$n = 4b + 1$；其中 a、b 為正整數或 0，

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+2*	*2*	*0*
1+m+n	*4a+4b+5*	*1*	*1*
1+m+2n	*4a+8b+6*	*2*	*0*

∴在頂點部分以半徑 1 滾動 2 次，以半徑$\sqrt{2}$滾動 0 次

$$\Rightarrow \text{此時的路徑長} = (m+n)\times 2 \div 4 \times \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi + 2\pi \times 1 \times \frac{1}{4} \times 2$$

$$= \frac{(m+n)(2+\sqrt{2})}{4}\pi + \pi$$

(4) 設$m=4a+3$，$n=4b+3$；其中 a、b 為正整數或 0，

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+4*	*0*	$\sqrt{2}$
1+m+n	*4a+4b+7*	*3*	*1*
1+m+2n	*4a+8b+10*	*2*	*0*

∴在頂點部分以半徑 1 滾動 2 次，以半徑$\sqrt{2}$滾動 1 次

$$\Rightarrow \text{此時的路徑長}=(m+n)\times 2\div 4\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi+2\pi\times 1\times\frac{1}{4}\times 2+2\pi\times\sqrt{2}\times\frac{1}{4}\times 1$$

$$=\frac{(m+n)(2+\sqrt{2})}{4}\pi+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$$

$$=\frac{(m+n+2)(2+\sqrt{2})}{4}\pi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots[\text{和(1)的路徑長相同}]$$

2. *m* 為偶數，*n* 為偶數時會有以下四種情形：

(1) 設$m=4a$，$n=4b$；其中 a、b 為正整數或 0，

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+1*	*1*	*1*
1+m+n	*4a+4b+1*	*1*	*1*
1+m+2n	*4a+8b+1*	*1*	*1*

(2) 設$m=4a$，$n=4b+2$；其中 a、b 為正整數或 0，

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+3*	*3*	*1*
1+m+n	*4a+4b+3*	*3*	*1*
1+m+2n	*4a+8b+5*	*1*	*1*

(3) 設$m=4a+2$，$n=4b$；其中 a、b 為正整數或 0，

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+1*	*1*	*1*
1+m+n	*4a+4b+3*	*3*	*1*
1+m+2n	*4a+8b+3*	*3*	*1*

(4) 設$m=4a+2$，$n=4b+2$；其中 a、b 為正整數或 0，

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+3*	*3*	*1*
1+m+n	*4a+4b+5*	*1*	*1*
1+m+2n	*4a+8b+7*	*3*	*1*

∴由以上四種情形發現：m 為偶數，n 為偶數時，無論何種情形，在四個頂點所多轉的 90 度都是以半徑 1 進行滾動。

$$\Rightarrow 此時的路徑長=(m+n)\times 2\div 4\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi+2\pi\times 1\times\frac{1}{4}\times 4$$

$$=\frac{(m+n)(2+\sqrt{2})}{4}\pi+2\pi$$

(二)滾動兩圈才回到原對應位置，此時 $m+n$ 為奇數，可能的情形為奇＋偶或偶＋奇；

1. m 為奇數，n 為偶數時會有以下四種情形：

(1) 設$m=4a+1$，$n=4b$；其中 a、b 為正整數或 0，

第一圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+1*	*1*	*1*
1+m+n	*4a+4b+2*	*2*	*0*
1+m+2n	*4a+8b+2*	*2*	*0*

第二圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1+2m+2n	*8a+8b+3*	*3*	*1*
1+2m+3n	*8a+12b+3*	*3*	*1*
1+3m+3n	*12a+12b+4*	*0*	$\sqrt{2}$
1+3m+4n	*12a+16b+4*	*0*	$\sqrt{2}$

∴兩圈合計下來，在頂點部分以半徑 1 滾動 4 次，以半徑$\sqrt{2}$滾動 2 次

(2) 設$m = 4a + 1$，$n = 4b + 2$；其中 a、b 為正整數或 0，

第一圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+3*	*3*	*1*
1+m+n	*4a+4b+4*	*0*	$\sqrt{2}$
1+m+2n	*4a+8b+6*	*2*	*0*

第二圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1+2m+2n	*8a+8b+5*	*1*	*1*
1+2m+3n	*8a+12b+7*	*3*	*1*
1+3m+3n	*12a+12b+8*	*0*	$\sqrt{2}$
1+3m+4n	*12a+16b+10*	*2*	*0*

∴兩圈合計下來，在頂點部分以半徑 1 滾動 4 次，以半徑$\sqrt{2}$滾動 2 次

(3) 設$m = 4a + 3$，$n = 4b$；其中 a、b 為正整數或 0，

第一圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+1*	*1*	*1*
1+m+n	*4a+4b+4*	*0*	$\sqrt{2}$
1+m+2n	*4a+8b+4*	*0*	$\sqrt{2}$

第二圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1+2m+2n	*8a+8b+7*	*3*	*1*
1+2m+3n	*8a+12b+7*	*3*	*1*
1+3m+3n	*12a+12b+10*	*2*	*0*
1+3m+4n	*12a+16b+10*	*2*	*0*

∴兩圈合計下來，在頂點部分以半徑 1 滾動 4 次，以半徑$\sqrt{2}$滾動 2 次

(4) 設$m = 4a + 3$，$n = 4b + 2$；其中 *a*、*b* 為正整數或 0，

第一圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+3*	*3*	*1*
1+m+n	*4a+4b+6*	*2*	*0*
1+m+2n	*4a+8b+8*	*0*	$\sqrt{2}$

第二圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1+2m+2n	*8a+8b+11*	*3*	*1*
1+2m+3n	*8a+12b+13*	*1*	*1*
1+3m+3n	*12a+12b+16*	*0*	$\sqrt{2}$
1+3m+4n	*12a+16b+18*	*2*	*0*

∴兩圈合計下來，在頂點部分以半徑 1 滾動 4 次，以半徑$\sqrt{2}$滾動 2 次

2. *m* 為偶數，*n* 為奇數時會有以下四種情形：

(1) 設$m = 4a$，$n = 4b + 1$；其中 *a*、*b* 為正整數或 0，

第一圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+2*	*2*	*0*
1+m+n	*4a+4b+2*	*2*	*0*
1+m+2n	*4a+8b+3*	*3*	*1*

第二圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1+2m+2n	*8a+8b+3*	*3*	*1*
1+2m+3n	*8a+12b+4*	*0*	$\sqrt{2}$
1+3m+3n	*12a+12b+4*	*0*	$\sqrt{2}$
1+3m+4n	*12a+16b+5*	*1*	*1*

∴兩圈合計下來，在頂點部分以半徑 1 滾動 4 次，以半徑$\sqrt{2}$滾動 2 次

(2) 設$m = 4a$，$n = 4b + 3$；其中 *a*、*b* 為正整數或 0，

第一圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+4*	*0*	$\sqrt{2}$
1+m+n	*4a+4b+4*	*0*	$\sqrt{2}$
1+m+2n	*4a+8b+7*	*3*	*1*

第二圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1+2m+2n	*8a+8b+7*	*3*	*1*
1+2m+3n	*8a+12b+10*	*2*	*0*
1+3m+3n	*12a+12b+10*	*2*	*0*
1+3m+4n	*12a+16b+13*	*1*	*1*

∴兩圈合計下來，在頂點部分以半徑 1 滾動 4 次，以半徑$\sqrt{2}$滾動 2 次

(3) 設$m = 4a + 2$，$n = 4b + 1$；其中 *a*、*b* 為正整數或 0，

第一圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+2*	*2*	*0*
1+m+n	*4a+4b+4*	*0*	$\sqrt{2}$
1+m+2n	*4a+8b+5*	*1*	*1*

第二圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1+2m+2n	*8a+8b+7*	*3*	*1*
1+2m+3n	*8a+12b+8*	*0*	$\sqrt{2}$
1+3m+3n	*12a+12b+10*	*2*	*0*
1+3m+4n	*12a+16b+11*	*3*	*1*

∴兩圈合計下來，在頂點部分以半徑 1 滾動 4 次，以半徑$\sqrt{2}$滾動 2 次

(4) 設$m = 4a + 2$，$n = 4b + 3$；其中 a、b 為正整數或 0，

第一圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1	*1*	*1*	*1*
1+n	*4b+4*	*0*	$\sqrt{2}$
1+m+n	*4a+4b+6*	*2*	*0*
1+m+2n	*4a+8b+9*	*1*	*1*

第二圈：

	代入	除以 4 之餘數	滾動半徑
1+2m+2n	*8a+8b+11*	*3*	*1*
1+2m+3n	*8a+12b+14*	*2*	*0*
1+3m+3n	*12a+12b+16*	*0*	$\sqrt{2}$
1+3m+4n	*12a+16b+17*	*1*	*1*

∴兩圈合計下來，在頂點部分以半徑 1 滾動 4 次，以半徑$\sqrt{2}$滾動 2 次

⇒滾動兩圈才回到原對應位置的狀況，無論為奇＋偶或偶＋奇；兩圈合計下來，在頂點部分全都是以半徑 1 滾動 4 次，以半徑$\sqrt{2}$滾動 2 次，另外 2 次剛好觀察點為圓心，⇒

此時的路徑長$=(m+n)\times 2\div 4\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi\times 2+2\pi\times 1\times\frac{1}{4}\times 4+2\pi\times\sqrt{2}\times\frac{1}{4}\times 2$

$$=\frac{(m+n)\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}\pi+\left(2+\sqrt{2}\right)\pi$$

$$=\frac{(m+n+2)\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}\pi$$

陸、　結論　：

一、將正方形繞著任意矩形的邊長轉動，並將正方形四個頂點都轉回到原出發點時所走的路徑長算出，並且我們整理出正方形圍繞著矩形轉動的一般化結果：

假設正方形的邊長為 1 單位長，矩形的長為 m 單位長，寬為 n 單位長，其中 m、n 皆為正整數，大致上可以分成以下兩大類：

1. m 為奇數，n 為奇數時

$$\Rightarrow \text{此時的路徑長} = \frac{(m+n)\left(2+\sqrt{2}\right)}{4}\pi \begin{cases} +\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi & m=4a+1，n=4b+1\text{或}\ m=4a+3，n=4b+3； \\ +\left(1+\sqrt{2}\right)\pi & m=4a+1，n=4b+3； \\ +\pi & m=4a+3，n=4b+1； \\ +2\pi & m\text{ 為偶數，}n\text{ 為偶數時} \end{cases}$$

；其中 a、b 為正整數或 0

2. m、n 有一個為奇數，另一個為偶數時 $\Rightarrow$ 路徑長 $=\dfrac{(m+n)\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}\pi+\left(2+\sqrt{2}\right)\pi$

二、在做這次科展以前，我們原本以為沿著矩形的邊長進行滾動是很單純的情形，應該很容易就可以演算的出來並找出相關的規則，但從這一次做科展的過程中，我們才發現真正的情形並不如我們所想像的那麼容易，除了運用算術的方式去尋求答案，也利用了相關工具包括電腦軟體去協助我們探索研究圖形的規則，過程中遇到許多的疑問，但是在大家的共同腦力激盪下，終於完成了這件作品。

三、我們本著研究推廣的精神, 將上述問題做各方向的推廣, 分述如下:

1. 本題組只涉及長寬為正方形整數倍的不同比例的長方形, 事實上, 也可以考慮非整數倍的矩形或非凸的多邊形, 但在這裡, 為了讓正方形永遠可以轉動, 我們才將它放到多邊形外頭。
2. 將小正方形變化為各種正多邊形. 本題組只涉及正方形, 但其實可以有其他正多邊形在外圍進行滾動。
3. 亦可以考慮正方形區域中任一點所走的路徑長來進行討論或掃出來區域的面積等其他相關問題.。

柒、 參考資料：

一、國中數學，翰林書局，第四冊第三章－三角形的內、外角

二、國中數學，康軒書局，第五冊圓

三、國中數學，康軒書局，第四冊－第二張平面幾何圖形

四、國中數學，康軒書局，第四冊—乘法公式與多項式

五、2002 年 TRML 思考賽

http://w3.yfms.tyc.edu.tw/mather/html/event-jyoho.html#TRML