

屏東縣第 60 屆國中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數 學 科

組 別：國 中 組

作品名稱：四巧板的面積與邊長之研究

關 鍵 詞：三角形、面積、邊長（最多三個）

編號：

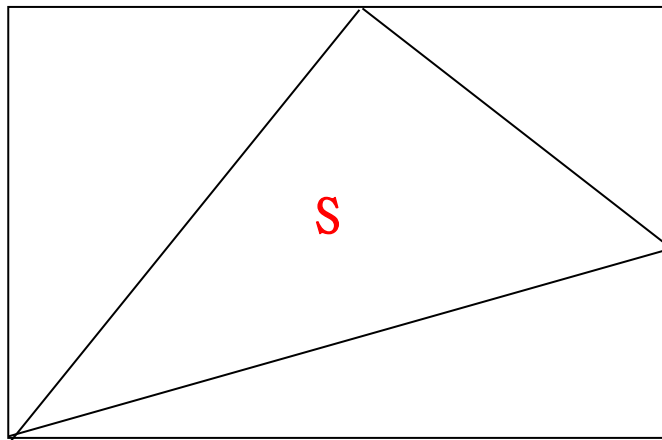
目 次

作品名稱：四巧板 的 面積 與 邊長 之研究

摘要	03
壹、研究動機	04
貳、研究目的	05
參、研究設備及器材	06
肆、研究過程或方法	07
伍、研究結果	08
陸、討論	22
柒、結論	26
捌、參考資料及其他	30

摘要

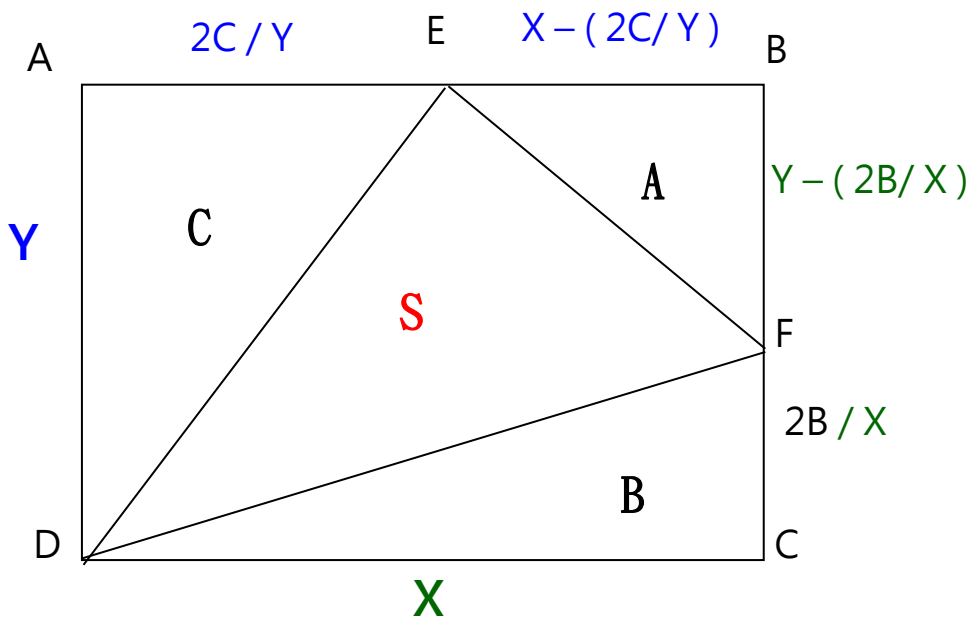
一個矩形由四個三角形所形成，圖形如下：ps. 三角形面積與圖示無比例相關



只知道中間的三角形面積是 S 平方公分，其餘周圍的三角形面積分別為 $4, 7, 9$ 平方公分。

- (1) 試求 S 的面積是多少？ (2) 矩形面積 又是多少？

發現 $(A \cdot B \cdot C \cdot S)$ 有規律性。使用 excel 軟體： $(A \cdot B \cdot C \cdot S)$ 可以求出都是自然數的解。可以從題目給的三角形面積，求出此矩形邊長。也可以從題目給的三角形面積，畫出此矩形面積



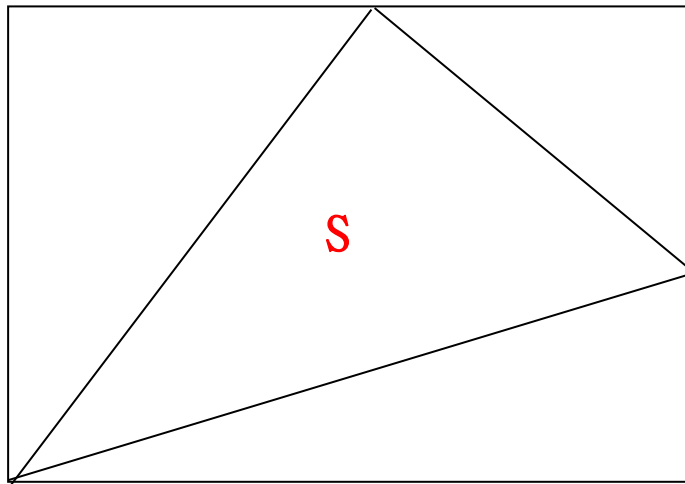
壹、研究動機

有一次翻閱數學資優考題時，發現有一題我解題解了好久都解不出來，於找同學求救。

我們花了一個禮拜的時間終於解出來了，可是卻有三個答案，到底哪一個答案才是正確解答呢？

題目如下：

一個矩形由四個三角形所形成，圖形如下：ps. 三角形面積與圖示無比例相關



只知道中間的三角形面積是 S 平方公分，其餘周圍的三角形面積分別為 4 、 7 、 9 平方公分。

- (1) 試求 S 的面積是多少？
- (2) 矩形面積 又是多少？

貳、研究目的

問題一：4 · 7 · 9 分別是對應哪個三角形面積？題目沒有給。

問題二：好像提示太少了把？

問題三：真的可以求出 S 嗎？ 懷疑。

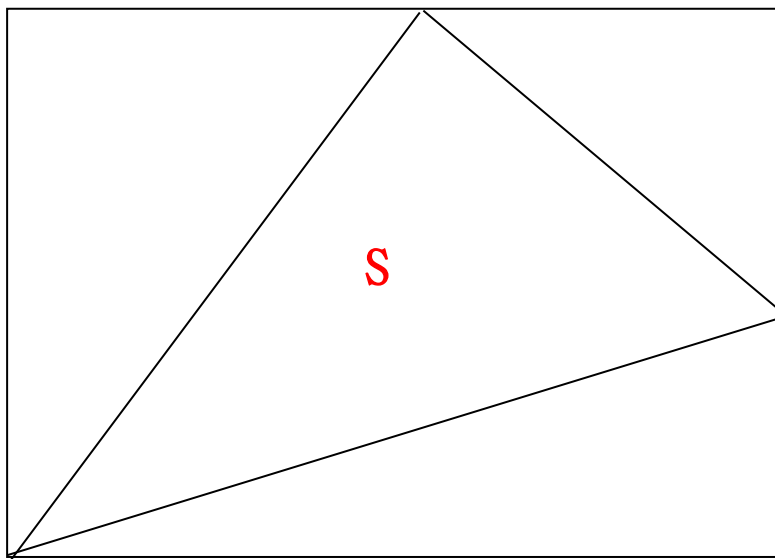
問題四：試著想知道 矩形邊長 會是多少

問題五：(A · B · C · S) 有無規律性？

問題六：(A · B · C · S) 都是自然數的解又是多少？

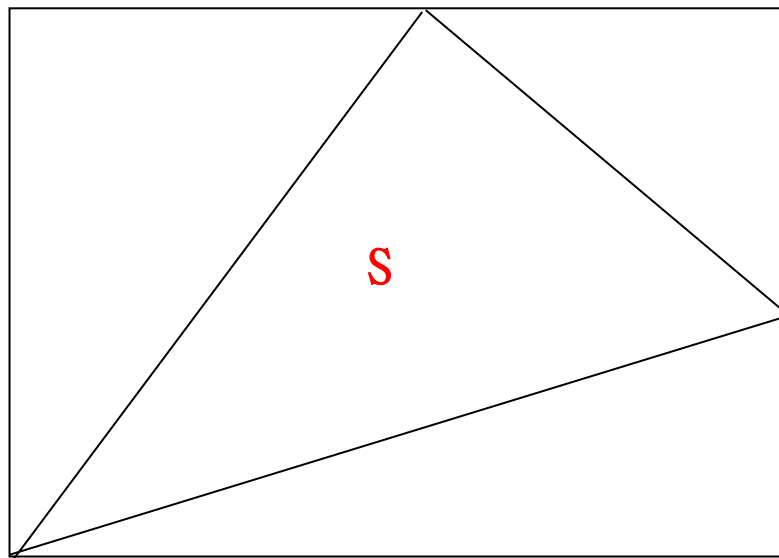
問題七： 可以從題目給的三角形面積，求出此矩形邊長嗎？

問題八：可以從題目給的三角形面積，畫出此矩形面積嗎？



參、研究設備及器材

- 一、 空白紙張一本
- 二、 有刻度的直尺
- 三、 顏色筆數支
- 四、 計算機一台
- 五、 excel 試算軟體
- 六、 其他



肆、研究過程或方法

問題一：4 · 7 · 9 分別是對應哪個三角形面積？題目沒有給。 ⇨ 我們自己假設

問題二：好像提示太少了吧？ ⇨ 我們自己假設

問題三：真的可以求出 S 嗎？ 懷疑。 ⇨ 根據假設做做看

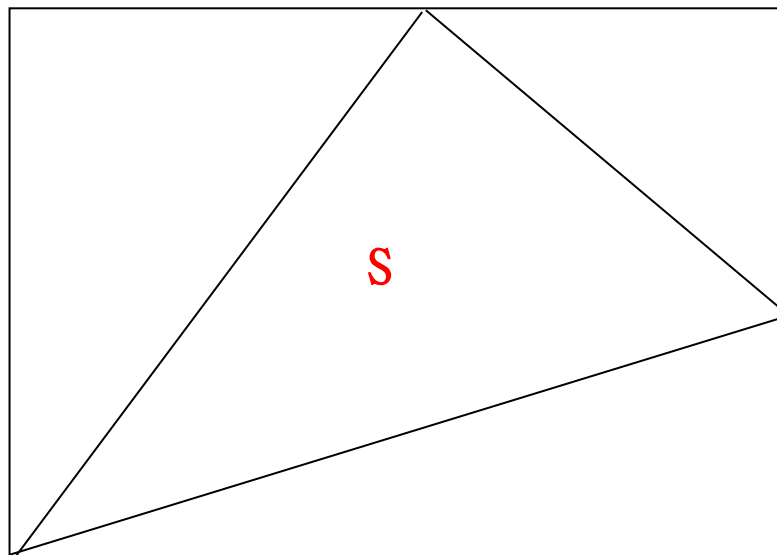
問題四：試著想知道 矩形邊長 會是多少 ⇨ 根據假設做做看

問題五：(A · B · C · S) 有無規律性？ ⇨ 使用 excel 軟體

問題六：(A · B · C · S) 都是自然數的解又是多少？ ⇨ 由問題五找出自然數解

問題七：可以從題目給的三角形面積，求出此矩形邊長嗎？ ⇨ 假設看看

問題八：可以從題目給的三角形面積，畫出此矩形面積嗎？ ⇨ 由問題七畫畫看



伍、研究結果

問題一：4，7，9 分別是對應哪個三角形面積？題目沒有給。 \Rightarrow 我們自己假設

問題二：好像提示太少了吧？ \Rightarrow 我們自己假設

問題三：真的可以求出 S 嗎？ 懷疑。 \Rightarrow 根據假設做做看

只知道中間的三角形面積是 S 平方公分，其餘周圍的三角形面積分別為 4，7，9 平方公分。

假設：

(1) 矩形長 $\overline{CD} = \overline{AB}$ 為 X，寬 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 為 Y。

(2) 由題目給的三角形面積，分別假設 ΔCDF ， ΔADE ， ΔBEF 的面積

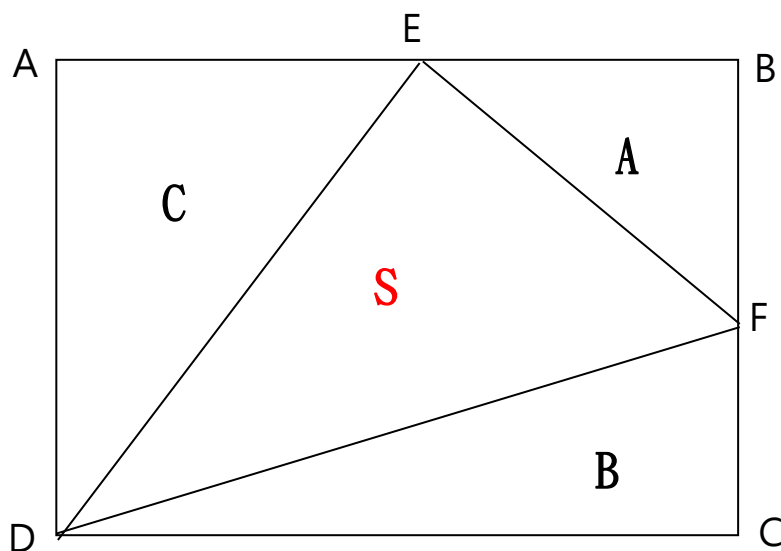
(3) 假設 ΔCDF 面積 B，為第一個三角形。 $X = \overline{CD}$ = 矩形長，再求出 \overline{CF} 長度

(4) 假設 ΔADE 面積 C，為第二個三角形。 $Y = \overline{AD}$ = 矩形寬，再求出 \overline{AE} 長度

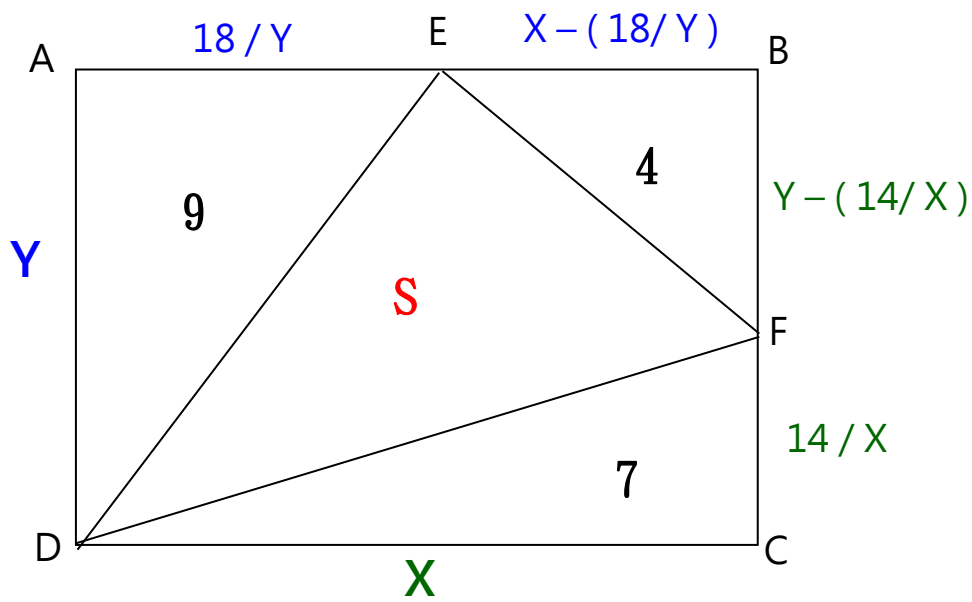
(5) 假設 ΔBEF 面積 A，為第三個三角形。 再求出 \overline{BE} 和 \overline{BF} 長度

(6) 藉由第三個直角三角形面積，算出 $X \cdot Y$ (矩形面積)

(7) $X \cdot Y = A + B + C + S$ ， 求出 S



假設一：矩形長 $\overline{CD} = \overline{AB}$ 為 X ，寬 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 為 Y 。



第一個三角形： $X \cdot \overline{CF} = 7 \times 2 = 14$ ， $\overline{CF} = 14/X$ ， $\overline{BF} = Y - (14/X)$

第二個三角形： $Y \cdot \overline{AE} = 9 \times 2 = 18$ ， $\overline{AE} = 18/Y$ ， $\overline{BE} = X - (18/Y)$

那麼 第三個三角形： $\overline{BE} \times \overline{BF} = 4 \times 2 = 8$

$$\left[X - \left(\frac{18}{Y} \right) \right] \cdot \left[Y - \left(\frac{14}{X} \right) \right] = 8$$

$$XY - 14 - 18 + \left(\frac{18 \cdot 14}{XY} \right) = 8$$

$$XY - 32 + \left(\frac{252}{XY} \right) = 8$$

$$XY - 40 + \left(\frac{252}{XY} \right) = 0$$

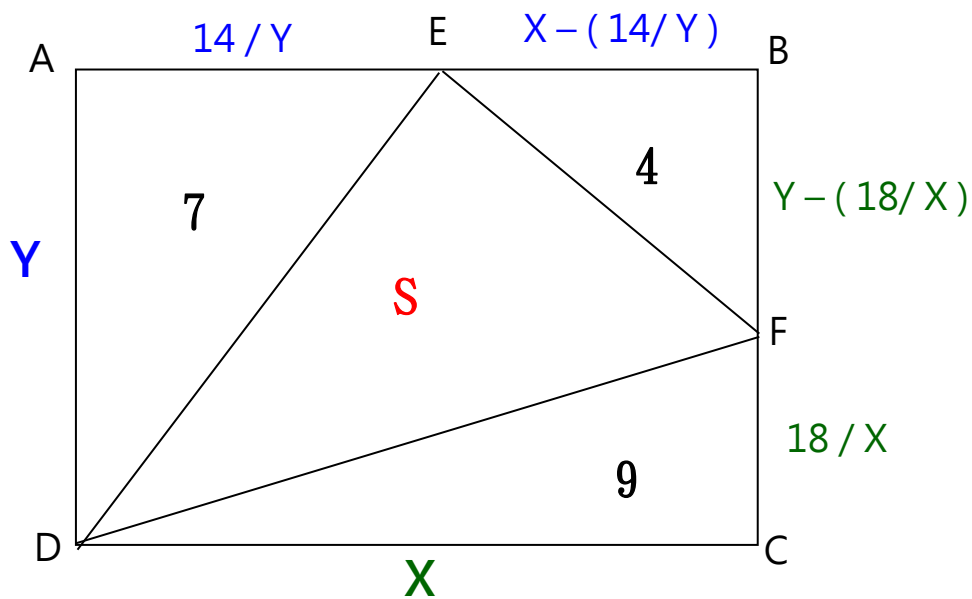
同乘以 XY ： $(XY)^2 - 40XY + 252 = 0$

$$XY = \frac{40 \pm 4\sqrt{37}}{2} = 20 \pm 2\sqrt{37} \quad (\text{負不合})$$

$XY =$ 矩形面積 $= 20 + 2\sqrt{37}$ 的數字不是很漂亮耶！

$$4 + 7 + 9 + S = 20 + 2\sqrt{37} \quad \cdot \quad S = 2\sqrt{37}$$

假設二：矩形長 $\overline{CD} = \overline{AB}$ 為 X ，寬 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 為 Y 。



第一個三角形： $X \cdot \overline{CF} = 9 \times 2 = 18$ ， $\overline{CF} = 18/X$ ， $\overline{BF} = Y - (18/X)$

第二個三角形： $Y \cdot \overline{AE} = 7 \times 2 = 14$ ， $\overline{AE} = 14/Y$ ， $\overline{BE} = X - (14/Y)$

那麼 第三個三角形： $\overline{BE} \times \overline{BF} = 4 \times 2 = 8$

$$\left[X - \left(\frac{14}{Y} \right) \right] \cdot \left[Y - \left(\frac{18}{X} \right) \right] = 8$$

$$XY - 18 - 14 + \left(\frac{18 \cdot 14}{XY} \right) = 8$$

$$XY - 32 + \left(\frac{252}{XY} \right) = 8$$

$$XY - 40 + \left(\frac{252}{XY} \right) = 0$$

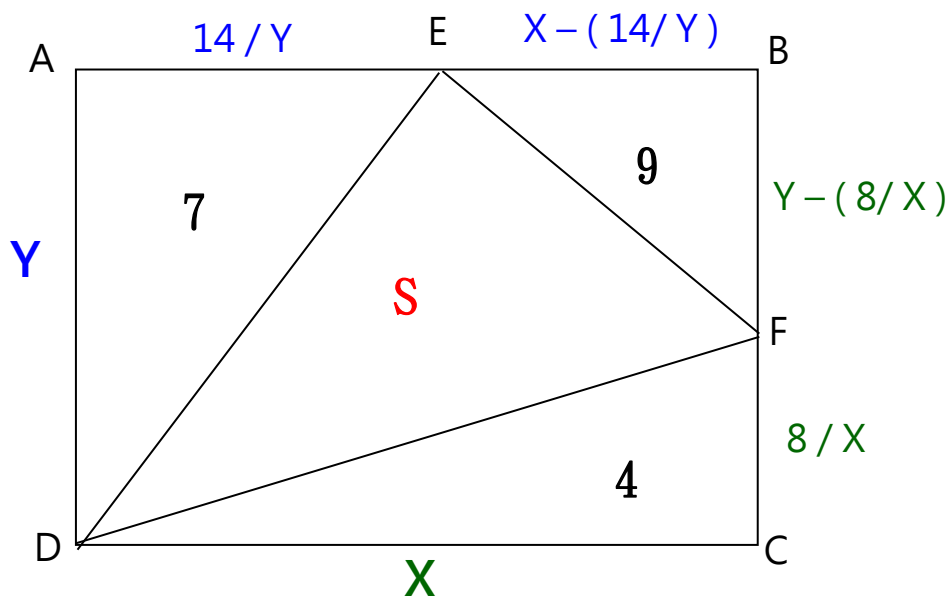
同乘以 XY ： $(XY)^2 - 40XY + 252 = 0$

$$XY = \frac{40 \pm 4\sqrt{37}}{2} = 20 \pm 2\sqrt{37} \quad (\text{負不合})$$

$XY = \text{矩形面積} = 20 + 2\sqrt{37}$ 的數字不是很漂亮耶！

$$4 + 7 + 9 + S = 20 + 2\sqrt{37} \quad \cdot \quad S = 2\sqrt{37}$$

假設三：矩形長 $\overline{CD} = \overline{AB}$ 為 X ，寬 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 為 Y 。



第一個三角形： $X \cdot \overline{CF} = 4 \times 2 = 8$ ， $\overline{CF} = 8/X$ ， $\overline{BF} = Y - (8/X)$

第二個三角形： $Y \cdot \overline{AE} = 7 \times 2 = 14$ ， $\overline{AE} = 14/Y$ ， $\overline{BE} = X - (14/Y)$

那麼 第三個三角形： $\overline{BE} \times \overline{BF} = 9 \times 2 = 18$

$$\left[X - \left(\frac{14}{Y} \right) \right] \cdot \left[Y - \left(\frac{8}{X} \right) \right] = 18$$

$$XY - 8 - 14 + \left(\frac{8 \cdot 14}{XY} \right) = 18$$

$$XY - 22 + \left(\frac{112}{XY} \right) = 18$$

$$XY - 40 + \left(\frac{112}{XY} \right) = 0$$

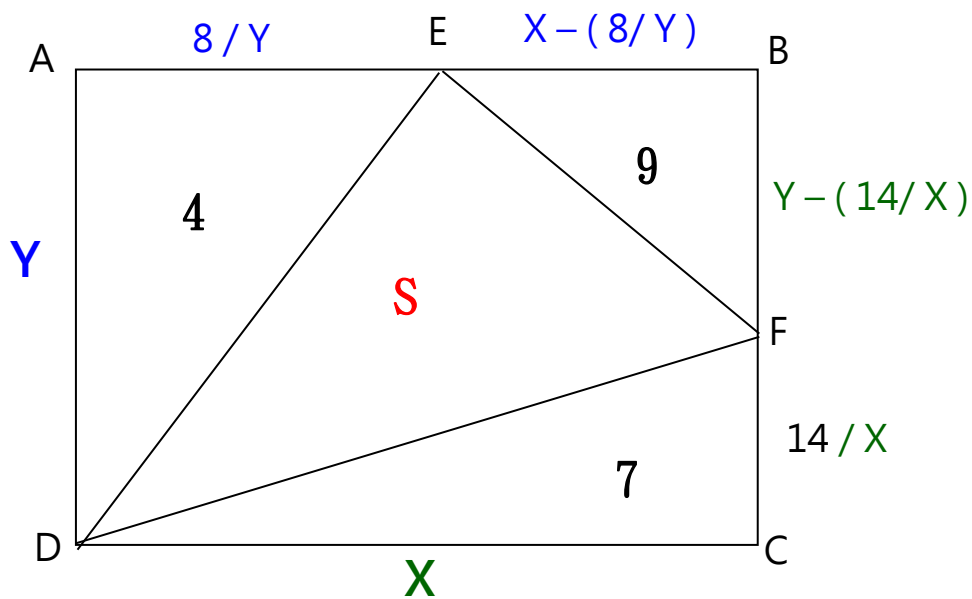
同乘以 XY ： $(XY)^2 - 40XY + 112 = 0$

$$XY = \frac{40 \pm 24\sqrt{2}}{2} = 20 \pm 12\sqrt{2} \quad (\text{負不合})$$

$XY =$ 矩形面積 $= 20 + 12\sqrt{2}$ 的數字不是很漂亮耶！

$$4 + 7 + 9 + S = 20 + 12\sqrt{2} \quad \cdot \quad S = 12\sqrt{2}$$

假設四：矩形長 $\overline{CD} = \overline{AB}$ 為 X ，寬 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 為 Y 。



第一個三角形： $X \cdot \overline{CF} = 7 \times 2 = 14$ ， $\overline{CF} = 14/X$ ， $\overline{BF} = Y - (14/X)$

第二個三角形： $Y \cdot \overline{AE} = 4 \times 2 = 8$ ， $\overline{AE} = 8/Y$ ， $\overline{BE} = X - (8/Y)$

那麼 第三個三角形： $\overline{BE} \times \overline{BF} = 9 \times 2 = 18$

$$\left[X - \left(\frac{8}{Y} \right) \right] \cdot \left[Y - \left(\frac{14}{X} \right) \right] = 18$$

$$XY - 14 - 8 + \left(\frac{8 \cdot 14}{XY} \right) = 18$$

$$XY - 22 + \left(\frac{112}{XY} \right) = 18$$

$$XY - 40 + \left(\frac{112}{XY} \right) = 0$$

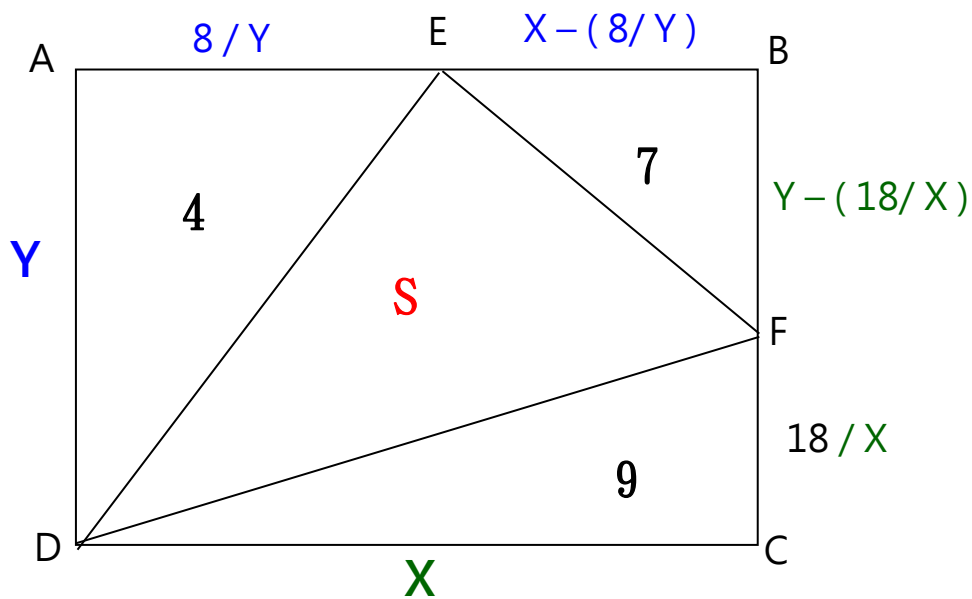
同乘以 XY ： $(XY)^2 - 40XY + 112 = 0$

$$XY = \frac{40 \pm 24\sqrt{2}}{2} = 20 \pm 12\sqrt{2} \quad (\text{負不合})$$

$XY =$ 矩形面積 $= 20 + 12\sqrt{2}$ 的數字不是很漂亮耶！

$$4 + 7 + 9 + S = 20 + 12\sqrt{2} \quad \cdot \quad S = 12\sqrt{2}$$

假設五：矩形長 $\overline{CD} = \overline{AB}$ 為 X ，寬 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 為 Y 。



第一個三角形： $X \cdot \overline{CF} = 9 \times 2 = 18$ ， $\overline{CF} = 18/X$ ， $\overline{BF} = Y - (18/X)$

第二個三角形： $Y \cdot \overline{AE} = 4 \times 2 = 8$ ， $\overline{AE} = 8/Y$ ， $\overline{BE} = X - (8/Y)$

那麼 第三個三角形： $\overline{BE} \times \overline{BF} = 7 \times 2 = 14$

$$\left[X - \left(\frac{8}{Y} \right) \right] \cdot \left[Y - \left(\frac{18}{X} \right) \right] = 14$$

$$XY - 18 - 8 + \left(\frac{8 \cdot 18}{XY} \right) = 14$$

$$XY - 26 + \left(\frac{144}{XY} \right) = 14$$

$$XY - 40 + \left(\frac{144}{XY} \right) = 0$$

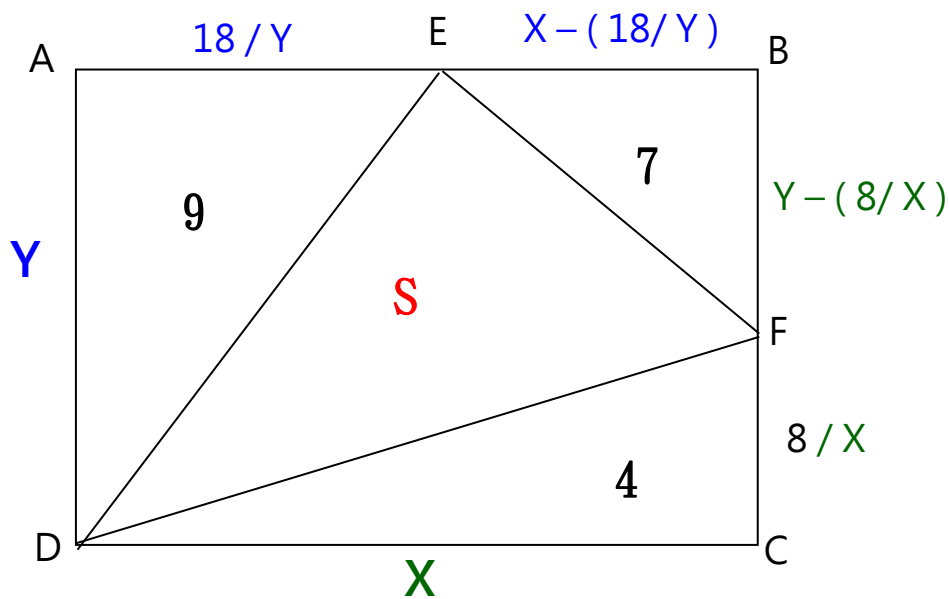
同乘以 XY ： $(XY)^2 - 40XY + 144 = 0$

$$XY = \frac{40 \pm 32}{2} = 20 \pm 16 \quad (\text{負不合})$$

$XY = 36$ 的數字很漂亮耶！ 矩形面積 = 36

$$4 + 7 + 9 + S = 36 \quad \cdot \quad S = 16$$

假設六：矩形長 $\overline{CD} = \overline{AB}$ 為 X ，寬 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 為 Y 。



第一個三角形： $X \cdot \overline{CF} = 4 \times 2 = 8$ ， $\overline{CF} = 8/X$ ， $\overline{BF} = Y - (8/X)$

第二個三角形： $Y \cdot \overline{AE} = 9 \times 2 = 18$ ， $\overline{AE} = 18/Y$ ， $\overline{BE} = X - (18/Y)$

那麼 第三個三角形： $\overline{BE} \times \overline{BF} = 7 \times 2 = 14$

$$\left[X - \left(\frac{18}{Y} \right) \right] \cdot \left[Y - \left(\frac{8}{X} \right) \right] = 14$$

$$XY - 8 - 18 + \left(\frac{8 \cdot 18}{XY} \right) = 14$$

$$XY - 26 + \left(\frac{144}{XY} \right) = 14$$

$$XY - 40 + \left(\frac{144}{XY} \right) = 0$$

同乘以 XY ： $(XY)^2 - 40XY + 144 = 0$

$$XY = \frac{40 \pm 32}{2} = 20 \pm 16 \quad (\text{負不合})$$

$XY = 36$ 的數字很漂亮耶！ 矩形面積 = 36

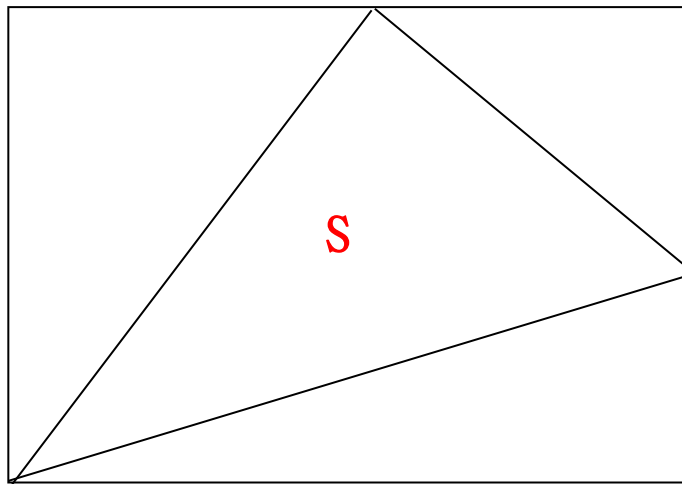
$$4 + 7 + 9 + S = 36 \quad \cdot \quad S = 16$$

問題三：真的可以求出 S 嗎？懷疑。 \Rightarrow 根據假設做做看

問題四：試著想知道 矩形邊長 會是多少 \Rightarrow 根據假設做做看

綜合一到六

一個矩形由四個三角形所形成，圖形如下：ps. 三角形面積與圖示無比例相關



只知道中間的三角形面積是 S 平方公分，其餘周圍的三角形面積分別為 4 、 7 、 9 平方公分。

試求 S 的面積是多少？ 矩形面積又是多少？

問題一： 4 、 7 、 9 分別是對應哪個三角形面積？ 題目沒有給。

問題二：好像提示太少了把？

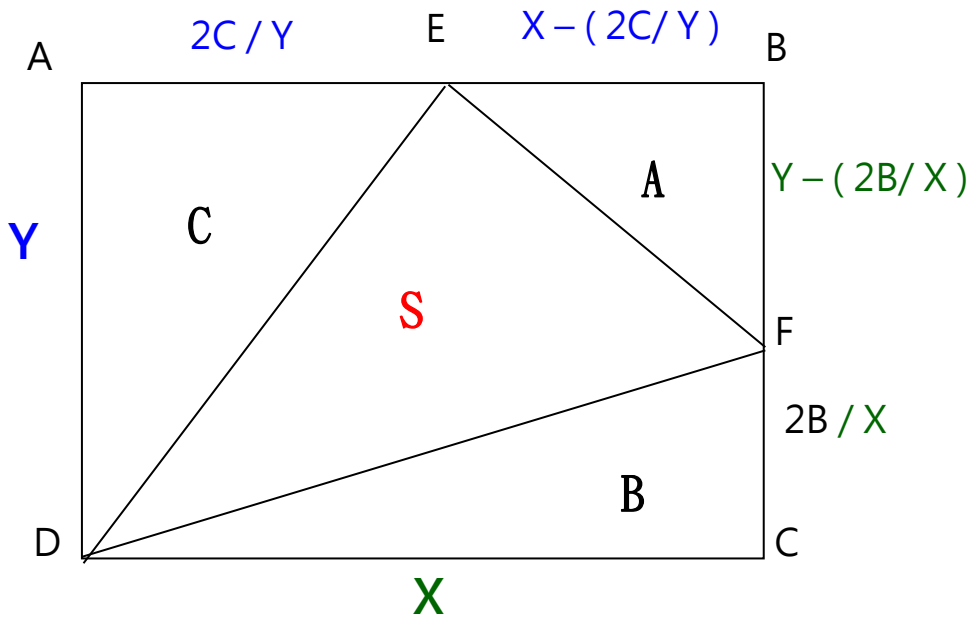
問題三：真的可以求出 S 嗎？ 懷疑。

解題.證明

矩形長 $\overline{CD} = \overline{AB}$ 為 X ，寬 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 為 Y 。將外三角形. 分別固定為 A, B, C

$$(A \cdot B \cdot C) = (4 \cdot 7 \cdot 9) \text{ 或 } (7 \cdot 4 \cdot 9) \text{ 或 } (9 \cdot 4 \cdot 7)$$

$= (4 \cdot 9 \cdot 7) \text{ 或 } (7 \cdot 9 \cdot 4) \text{ 或 } (9 \cdot 7 \cdot 4)$ 以上六種都有可能喔！



第一個三角形： $X \cdot \overline{CF} = B \times 2 = 2B$ ， $\overline{CF} = 2B / X$ ， $\overline{BF} = Y - (2B / X)$

第二個三角形： $Y \cdot \overline{AE} = C \times 2 = 2C$ ， $\overline{AE} = 2C / Y$ ， $\overline{BE} = X - (2C / Y)$

那麼 第三個三角形： $\overline{BE} \times \overline{BF} = A \times 2 = 2A$

$$\left[X - \left(\frac{2C}{Y} \right) \right] \cdot \left[Y - \left(\frac{2B}{X} \right) \right] = 2A$$

$$XY - 2B - 2C + \left(\frac{4BC}{XY} \right) = 2A$$

$$XY - 2(B+C) + \left(\frac{4BC}{XY} \right) = 2A$$

$$XY - 2(A+B+C) + \left(\frac{4BC}{XY} \right) = 0$$

同乘以 XY : $(XY)^2 - 2(A+B+C)XY + 4BC = 0$

$$XY = \frac{2(A+B+C) \pm \sqrt{4(A+B+C)^2 - 4 \times 4BC}}{2}$$

$$XY = \frac{2(A+B+C) \pm \sqrt{16 \left[\frac{(A+B+C)}{2} \right]^2 - 16BC}}{2}$$

$$XY = \frac{2(A+B+C) \pm 4 \sqrt{\left[\frac{(A+B+C)}{2} \right]^2 - BC}}{2} \quad (\text{負不合})$$

$$XY = \text{矩形面積} = (A+B+C) + 2\sqrt{\left[\frac{(A+B+C)}{2} \right]^2 - BC}$$

$$S \text{ 面積} = 2\sqrt{\left[\frac{(A+B+C)}{2} \right]^2 - BC} \quad \text{將此代入六個假設. 答案都對}$$

問題五：(A · B · C · S) 有無規律性？ \Rightarrow 使用 excel 軟體

問題六：(A · B · C · S) 都是自然數的解又是多少？ \Rightarrow 由問題五找出自然數解

(一) 如何讓 S 及 矩形面積 . 都具有意義呢？

$$S \text{ 面積} = 2 \sqrt{[(A+B+C)/2]^2 - BC}$$

$$XY = \text{矩形面積} = (A+B+C) + 2 \sqrt{[(A+B+C)/2]^2 - BC}$$

$$\sqrt{[(A+B+C)/2]^2 - BC} \geq 0$$

$$[(A+B+C)/2]^2 - BC \geq 0$$

$$\left[\frac{A+B+C}{2} \right]^2 \geq BC$$

(二) 那些數字可以讓 S 及 矩形面積 . 都是正整數呢？

假設 $1 \leq A \leq 10$, $1 \leq B \leq 10$, $1 \leq C \leq 10$, 用 EXCEL 找出符合的答案

因為 A.B.C 有假設範圍 , 所以無法列出 (A · B · C) 和 S 的所有答案。

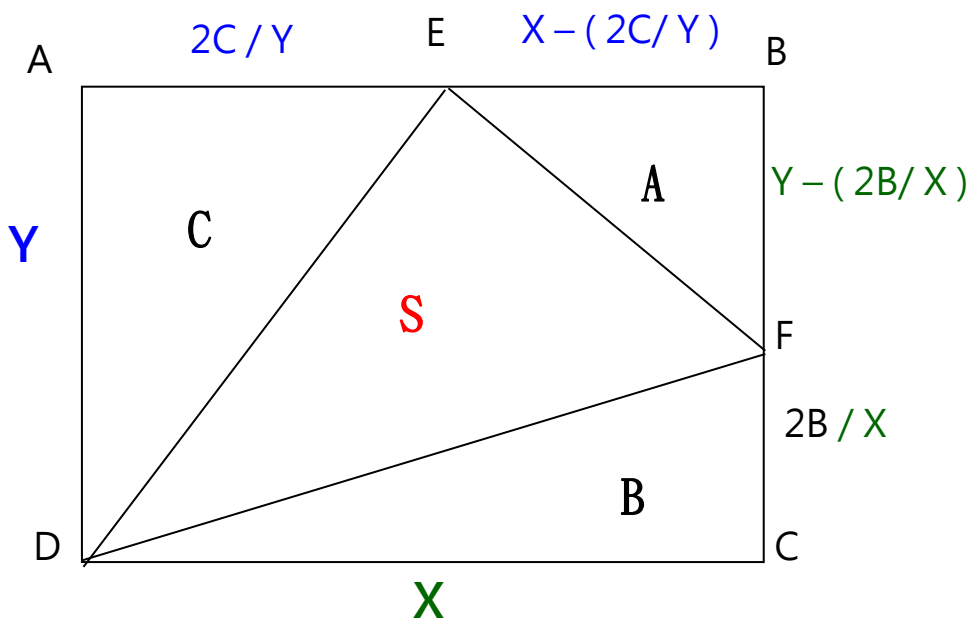
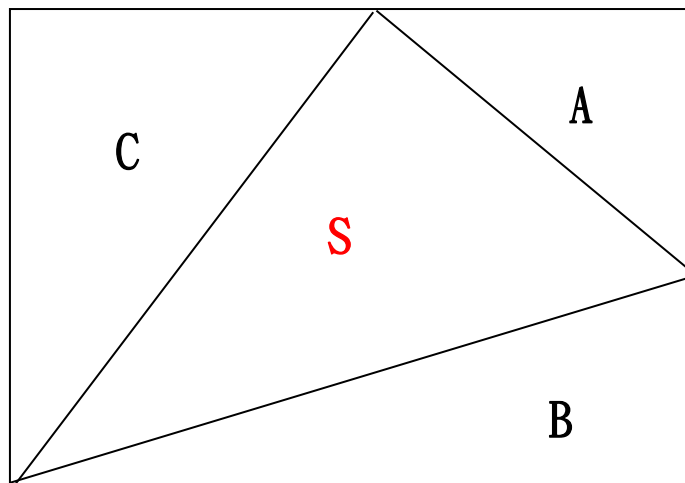
A	B	C	S	面積
1	3	4	4	12
1	4	3	4	12
1	5	8	6	20
1	8	5	6	20
1	8	9	6	24
1	9	8	6	24
2	6	8	8	24
2	8	6	8	24
3	3	8	10	24
3	4	5	8	20
3	5	4	8	20
3	7	8	10	28
3	8	3	10	24

A	B	C	S	面積
3	8	7	10	28
4	3	3	8	18
4	4	6	10	24
4	5	9	12	30
4	6	4	10	24
4	8	8	12	32
4	9	5	12	30
5	4	7	12	28
5	7	4	12	28
5	8	9	14	36
5	9	8	14	36
6	4	8	14	32
6	8	4	14	32

A	B	C	S	面積
6	8	10	16	40
6	10	8	16	40
7	4	9	16	36
7	9	4	16	36
8	3	5	14	30
8	4	10	18	40
8	5	3	14	30
8	6	6	16	36
8	7	9	18	42
8	9	7	18	42
8	10	4	18	40
9	5	8	18	40
9	8	5	18	40

(三) 那些數字可以讓 S 及 矩形面積，都是正整數呢？

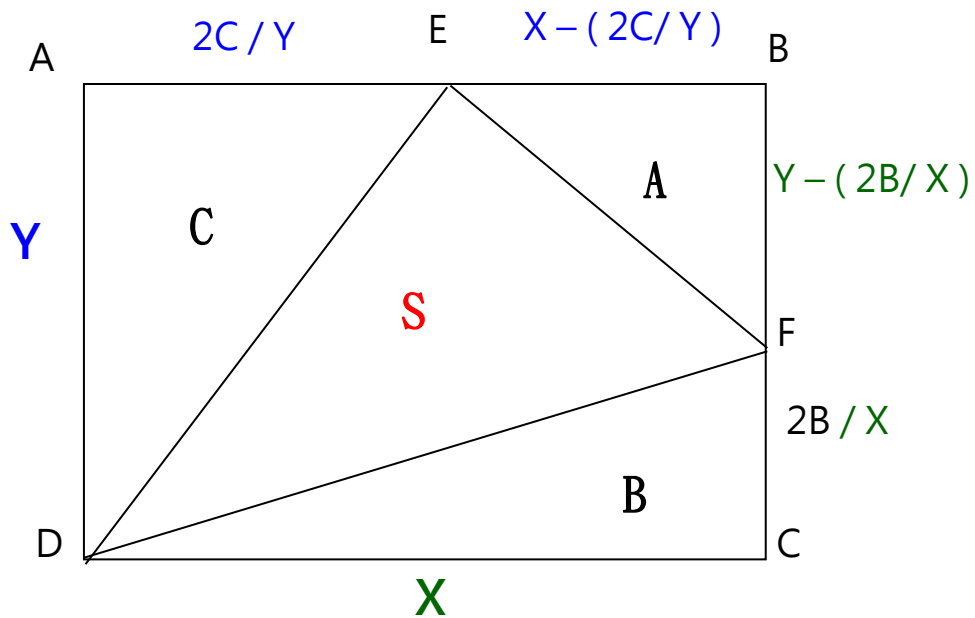
我們可以將上表的 $(A \cdot B \cdot C \cdot S)$ 乘以任何正整數，就能找出更多的 $(A \cdot B \cdot C \cdot S)_n$ 答案
 但是還是無法找出 $(A \cdot B \cdot C)$ 和 S 的所有答案。



問題七： 可以從題目給的三角形面積， 求出此矩形邊長嗎？ \Rightarrow 假設看看

問題八： 可以從題目給的三角形面積， 畫出此矩形面積嗎？ \Rightarrow 由問題七畫畫看

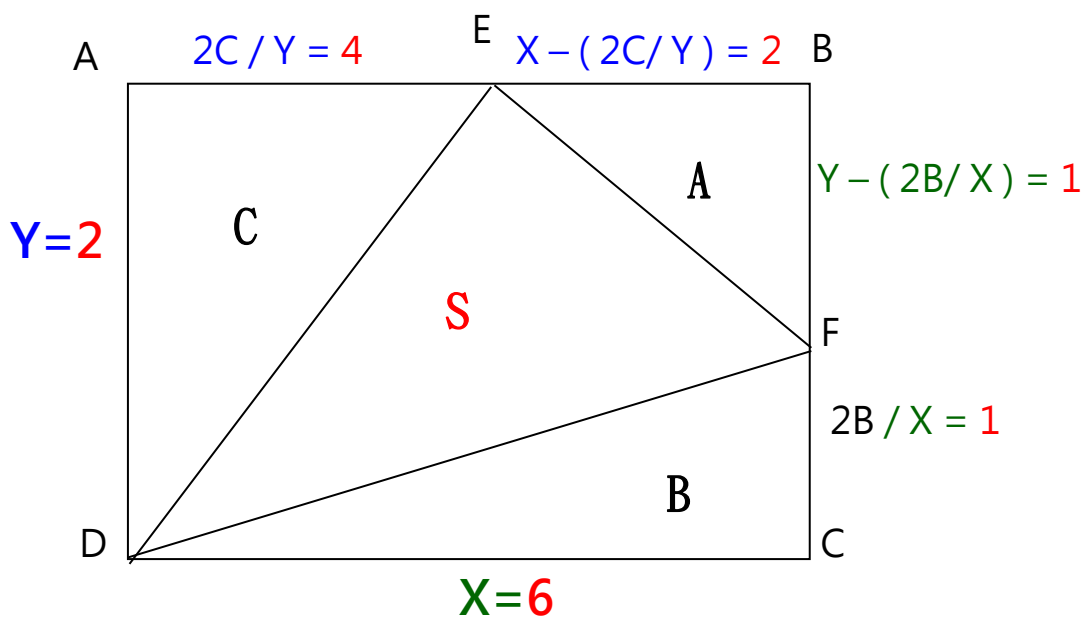
如何畫出 這種【四巧板】的圖形呢？



舉例說明：1A

A	B	C	S	面積
1	3	4	4	12

面積 = $XY = 12$ 。 假設 $X=6 \cdot Y=2$ 。 $S=4$

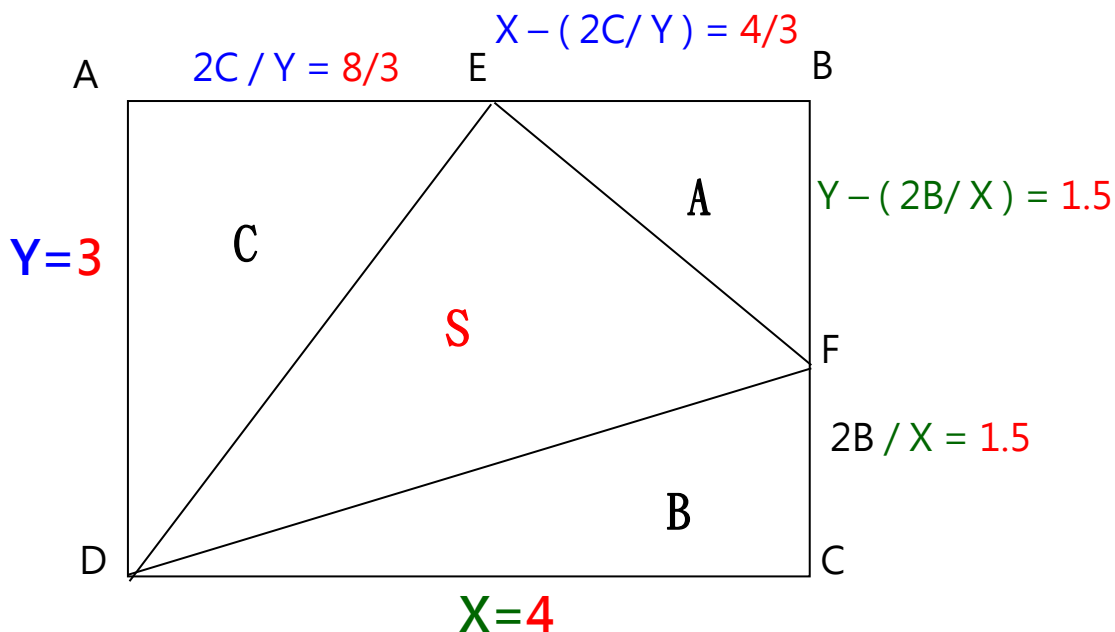


圖形 正解 耶

舉例說明：1B 與 1A 同一組數據

A	B	C	S	面積
1	3	4	4	12

面積 = $XY = 12$ 。改 假設 $X=4$, $Y=3$ 。 $S=4$



圖形 正解 耶

所以說：同一組數據

A	B	C	S	面積
1	3	4	4	12

面積 = $XY = 12$ 。改 假設 $X = 6$, $Y = 2$ 。 $S = 4$

面積 = $XY = 12$ 。改 假設 $X = 4$, $Y = 3$ 。 $S = 4$

面積 = $XY = 12$ 。改 假設 $X = 3$, $Y = 4$ 。 $S = 4$

面積 = $XY = 12$ 。改 假設 $X = ?$, $Y = ?$ 。 $S = 4$

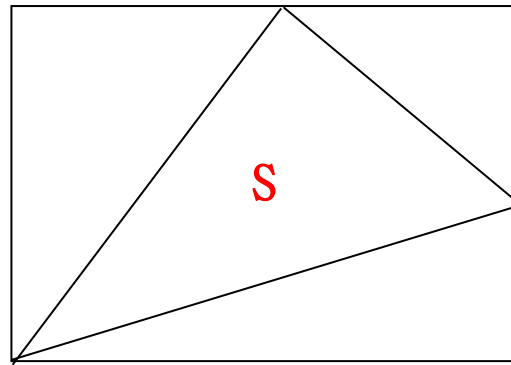
可以畫出 好多好多不同的 四巧板

陸、討論

只知道中間的三角形面積是 S 平方公分，其餘周圍的三角形面積分別為 $4, 7, 9$ 平方公分。

試求 S 的面積是多少？

矩形面積 又是多少？



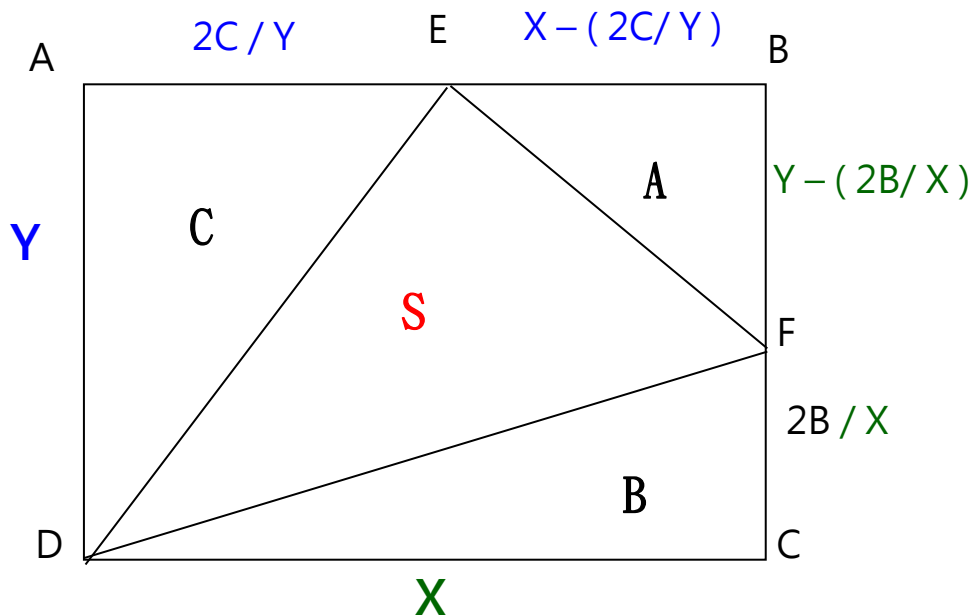
問題一：4, 7, 9 分別是對應哪個三角形面積？題目沒有給。 \Rightarrow 我們自己假設

問題二：好像提示太少了吧？ \Rightarrow 我們自己假設

矩形長 $\overline{CD} = \overline{AB}$ 為 X ，寬 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 為 Y 。將外三角形，分別固定為 A, B, C

$$(A \cdot B \cdot C) = (4 \cdot 7 \cdot 9) \text{ 或 } (7 \cdot 4 \cdot 9) \text{ 或 } (9 \cdot 4 \cdot 7)$$

$$= (4 \cdot 9 \cdot 7) \text{ 或 } (7 \cdot 9 \cdot 4) \text{ 或 } (9 \cdot 7 \cdot 4) \text{ 以上 六種 都有可能喔！}$$



問題三：真的可以求出 S 嗎？ 懷疑。 \Rightarrow 根據假設做做看

問題四：試著想知道 矩形邊長 會是多少 \Rightarrow 根據假設做做看

第一個三角形： $X \cdot \overline{CF} = B \times 2 = 2B$ ， $\overline{CF} = 2B/X$ ， $\overline{BF} = Y - (2B/X)$

第二個三角形： $Y \cdot \overline{AE} = C \times 2 = 2C$ ， $\overline{AE} = 2C/Y$ ， $\overline{BE} = X - (2C/Y)$

那麼 第三個三角形： $\overline{BE} \times \overline{BF} = A \times 2 = 2A$

$$\left[X - \left(\frac{2C}{Y} \right) \right] \cdot \left[Y - \left(\frac{2B}{X} \right) \right] = 2A$$

$$XY - 2B - 2C + \left(\frac{4BC}{XY} \right) = 2A$$

$$XY - 2(B+C) + \left(\frac{4BC}{XY} \right) = 2A$$

$$XY - 2(A+B+C) + \left(\frac{4BC}{XY} \right) = 0$$

同乘以 XY： $(XY)^2 - 2(A+B+C)XY + 4BC = 0$

$$XY = \frac{2(A+B+C) \pm \sqrt{4(A+B+C)^2 - 4 \times 4BC}}{2}$$

$$XY = \frac{2(A+B+C) \pm \sqrt{16 \left[\left(\frac{A+B+C}{2} \right)^2 - 16BC \right]}}{2}$$

$$XY = \frac{2(A+B+C) \pm 4 \sqrt{\left[\left(\frac{A+B+C}{2} \right)^2 - BC \right]}}{2} \quad (\text{負不合})$$

$$XY = \text{矩形面積} = (A+B+C) + 2 \sqrt{\left[\left(\frac{A+B+C}{2} \right)^2 - BC \right]}$$

$S \text{ 面積} = 2 \sqrt{\left[\left(\frac{A+B+C}{2} \right)^2 - BC \right]}$ 將此代入六個假設. 答案都對

問題五：(A · B · C · S) 有無規律性？ ⇒ 使用 excel 軟體

問題六：(A · B · C · S) 都是自然數的解又是多少？ ⇒ 由問題五找出自然數解

(一) 如何讓 S 及 矩形面積 . 都具有意義呢？

$$S \text{ 面積} = 2 \sqrt{[(A+B+C)/2]^2 - BC}$$

$$XY = \text{矩形面積} = (A+B+C) + 2 \sqrt{[(A+B+C)/2]^2 - BC}$$

$$\sqrt{[(A+B+C)/2]^2 - BC} \geq 0$$

$$[(A+B+C)/2]^2 - BC \geq 0$$

$$\left[\frac{A+B+C}{2} \right]^2 \geq BC$$

(二) 那些數字可以讓 S 及 矩形面積 . 都是正整數呢？

假設 $1 \leq A \leq 10$, $1 \leq B \leq 10$, $1 \leq C \leq 10$, 用 EXCEL 找出符合的答案
因為 A.B.C 有假設範圍 , 所以無法列出 (A · B · C) 和 S 的所有答案。

(三) 那些數字可以讓 S 及 矩形面積 . 都是正整數呢？

我們可以將上表的 (A · B · C · S) 乘以任何正整數 , 就能找出更多的 (A · B · C · S)_n 答案
但是還是無法找出 (A · B · C) 和 S 的所有答案。

A	B	C	S	面積
1	3	4	4	12
1	4	3	4	12
1	5	8	6	20
1	8	5	6	20
1	8	9	6	24
1	9	8	6	24
2	6	8	8	24
2	8	6	8	24
3	3	8	10	24
3	4	5	8	20
3	5	4	8	20
3	7	8	10	28
3	8	3	10	24

A	B	C	S	面積
3	8	7	10	28
4	3	3	8	18
4	4	6	10	24
4	5	9	12	30
4	6	4	10	24
4	8	8	12	32
4	9	5	12	30
5	4	7	12	28
5	7	4	12	28
5	8	9	14	36
5	9	8	14	36
6	4	8	14	32
6	8	4	14	32

A	B	C	S	面積
6	8	10	16	40
6	10	8	16	40
7	4	9	16	36
7	9	4	16	36
8	3	5	14	30
8	4	10	18	40
8	5	3	14	30
8	6	6	16	36
8	7	9	18	42
8	9	7	18	42
8	10	4	18	40
9	5	8	18	40
9	8	5	18	40

問題七： 可以從題目給的三角形面積， 求出此矩形邊長嗎？ \Rightarrow 假設看看

問題八： 可以從題目給的三角形面積， 畫出此矩形面積嗎？ \Rightarrow 由問題七畫畫看

同一組數據

A	B	C	S	面積
1	3	4	4	12

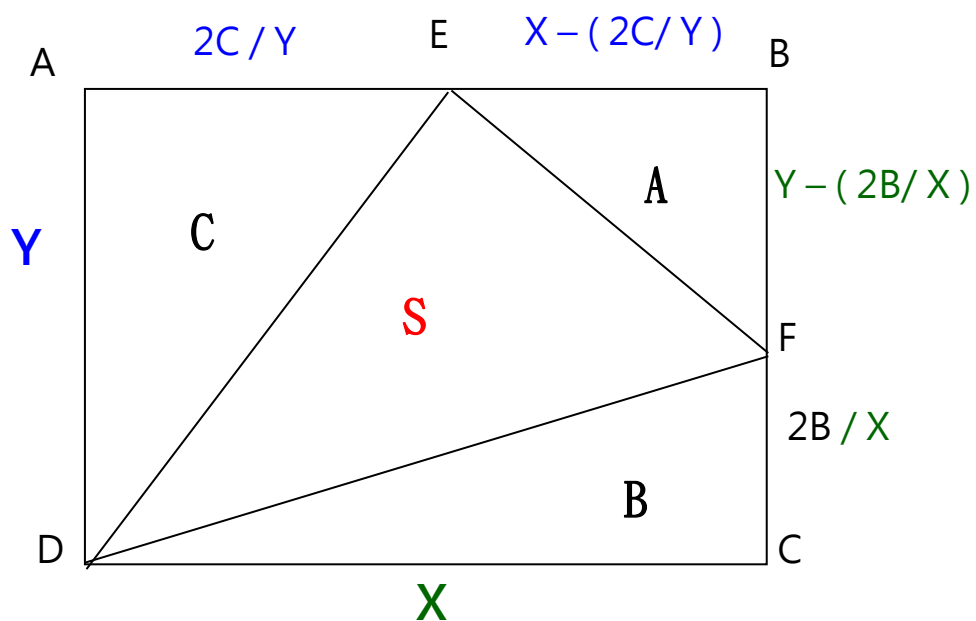
面積 = $XY = 12$ 。 改 假設 $X = 6, Y = 2$ 。 $S = 4$

面積 = $XY = 12$ 。 改 假設 $X = 4, Y = 3$ 。 $S = 4$

面積 = $XY = 12$ 。 改 假設 $X = 3, Y = 4$ 。 $S = 4$

面積 = $XY = 12$ 。 改 假設 $X = ?, Y = ?$ 。 $S = 4$

可以畫出 好多好多不同的 四巧板

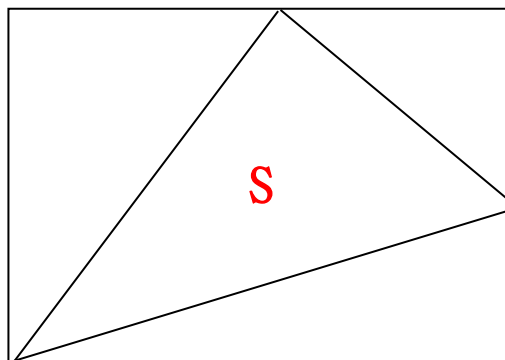


柒、結論

只知道中間的三角形面積是 S 平方公分，其餘周圍的三角形面積分別為 $4 \cdot 7 \cdot 9$ 平方公分。

試求 S 的面積是多少？

矩形面積 又是多少？



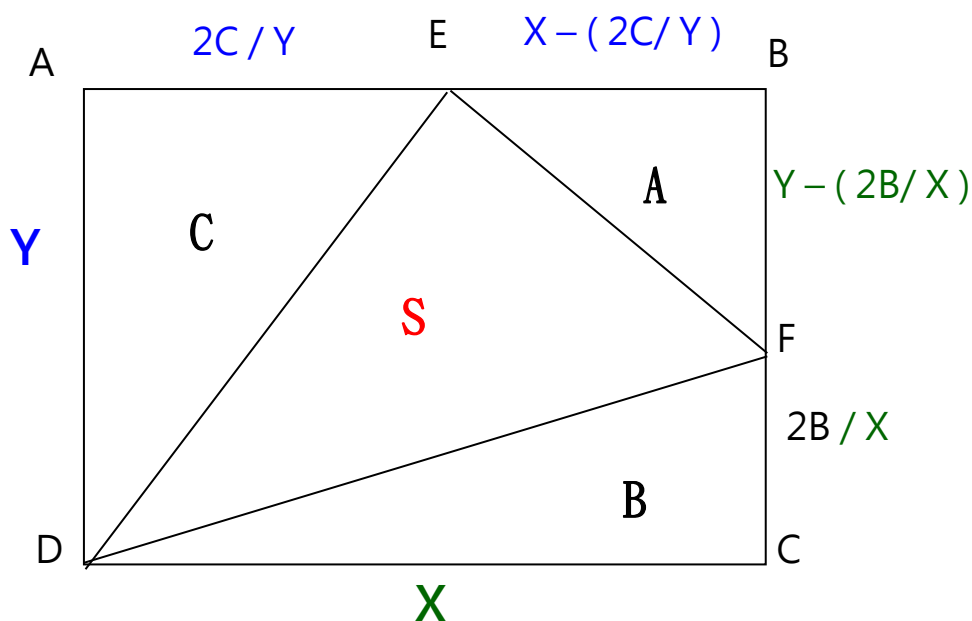
問題一：4 · 7 · 9 分別是對應哪個三角形面積？題目沒有給。 \Rightarrow 我們自己假設

問題二：好像提示太少了吧？ \Rightarrow 我們自己假設

矩形長 $\overline{CD} = \overline{AB}$ 為 X ，寬 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 為 Y 。將外三角形，分別固定為 $A \cdot B \cdot C$

$(A \cdot B \cdot C) = (4 \cdot 7 \cdot 9)$ 或 $(7 \cdot 4 \cdot 9)$ 或 $(9 \cdot 4 \cdot 7)$

$= (4 \cdot 9 \cdot 7)$ 或 $(7 \cdot 9 \cdot 4)$ 或 $(9 \cdot 7 \cdot 4)$ 以上 **六種** 都有可能喔！



問題三：真的可以求出 S 嗎？ 懷疑。 \Rightarrow 根據假設做做看

問題四：試著想知道 矩形邊長 會是多少 \Rightarrow 根據假設做做看

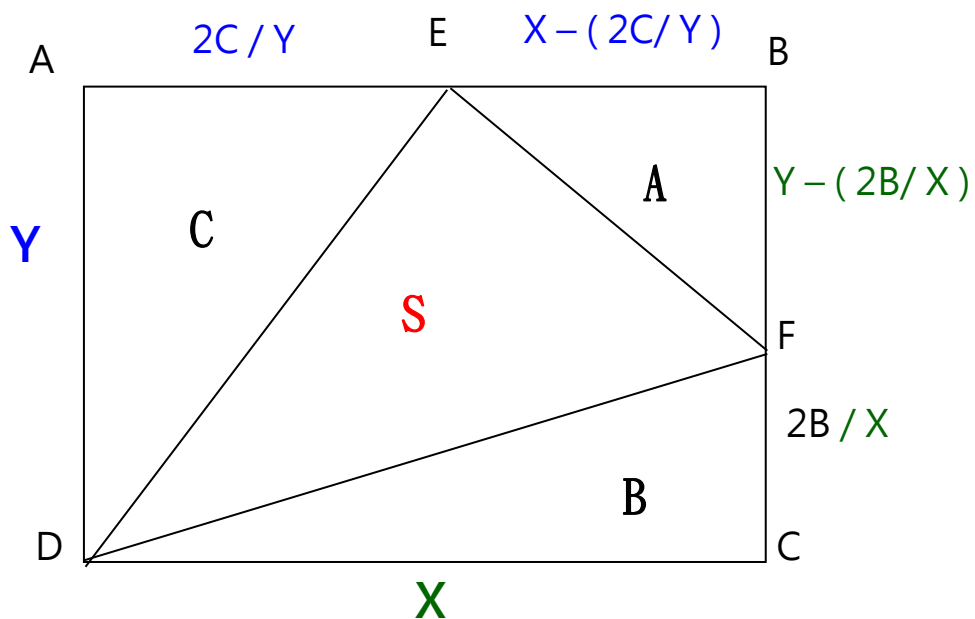
第一個三角形： $X \cdot \overline{CF} = B \times 2 = 2B$ ， $\overline{CF} = 2B/X$ ， $\overline{BF} = Y - (2B/X)$

第二個三角形： $Y \cdot \overline{AE} = C \times 2 = 2C$ ， $\overline{AE} = 2C/Y$ ， $\overline{BE} = X - (2C/Y)$

那麼 第三個三角形： $\overline{BE} \times \overline{BF} = A \times 2 = 2A$

$$XY = \text{矩形面積} = (A+B+C) + 2\sqrt{\left[\frac{(A+B+C)}{2}\right]^2 - BC}$$

$$S \text{ 面積} = 2\sqrt{\left[\frac{(A+B+C)}{2}\right]^2 - BC} \quad \text{將此代入六個假設. 答案都對}$$



問題五：(A · B · C · S) 有無規律性？ → 使用 excel 軟體

問題六：(A · B · C · S) 都是自然數的解又是多少？ → 由問題五找出自然數解

(一) 如何讓 S 及 矩形面積，都具有意義呢？

$$S \text{ 面積} = 2 \sqrt{[(A+B+C)/2]^2 - BC}$$

$$XY = \text{矩形面積} = (A+B+C) + 2 \sqrt{[(A+B+C)/2]^2 - BC}$$

$$\sqrt{[(A+B+C)/2]^2 - BC} \geq 0$$

$$[(A+B+C)/2]^2 - BC \geq 0$$

$$\left[\frac{A+B+C}{2} \right]^2 \geq BC$$

(二) 那些數字可以讓 S 及 矩形面積，都是正整數呢？

假設 $1 \leq A \leq 10$ ， $1 \leq B \leq 10$ ， $1 \leq C \leq 10$ ，用 EXCEL 找出符合的答案
因為 A.B.C 有假設範圍，所以無法列出 (A · B · C) 和 S 的所有答案。

A	B	C	S	面積
1	3	4	4	12
1	4	3	4	12
1	5	8	6	20
1	8	5	6	20
1	8	9	6	24
1	9	8	6	24
2	6	8	8	24
2	8	6	8	24
3	3	8	10	24
3	4	5	8	20
3	5	4	8	20
3	7	8	10	28
3	8	3	10	24

A	B	C	S	面積
3	8	7	10	28
4	3	3	8	18
4	4	6	10	24
4	5	9	12	30
4	6	4	10	24
4	8	8	12	32
4	9	5	12	30
5	4	7	12	28
5	7	4	12	28
5	8	9	14	36
5	9	8	14	36
6	4	8	14	32
6	8	4	14	32

A	B	C	S	面積
6	8	10	16	40
6	10	8	16	40
7	4	9	16	36
7	9	4	16	36
8	3	5	14	30
8	4	10	18	40
8	5	3	14	30
8	6	6	16	36
8	7	9	18	42
8	9	7	18	42
8	10	4	18	40
9	5	8	18	40
9	8	5	18	40

(三) 那些數字可以讓 S 及 矩形面積 . 都是正整數呢 ?

我們可以將上表的 (A · B · C · S) 乘以任何正整數 , 就能找出更多的 (A · B · C · S)n 答案
但是還是無法找出 (A · B · C) 和 S 的所有答案 。

問題七 : 可以從題目給的三角形面積 , 求出此矩形邊長嗎 ? ⇨ 假設看看

問題八 : 可以從題目給的三角形面積 , 畫出此矩形面積嗎 ? ⇨ 由問題七畫畫看

同一組數據

A	B	C	S	面積
1	3	4	4	12

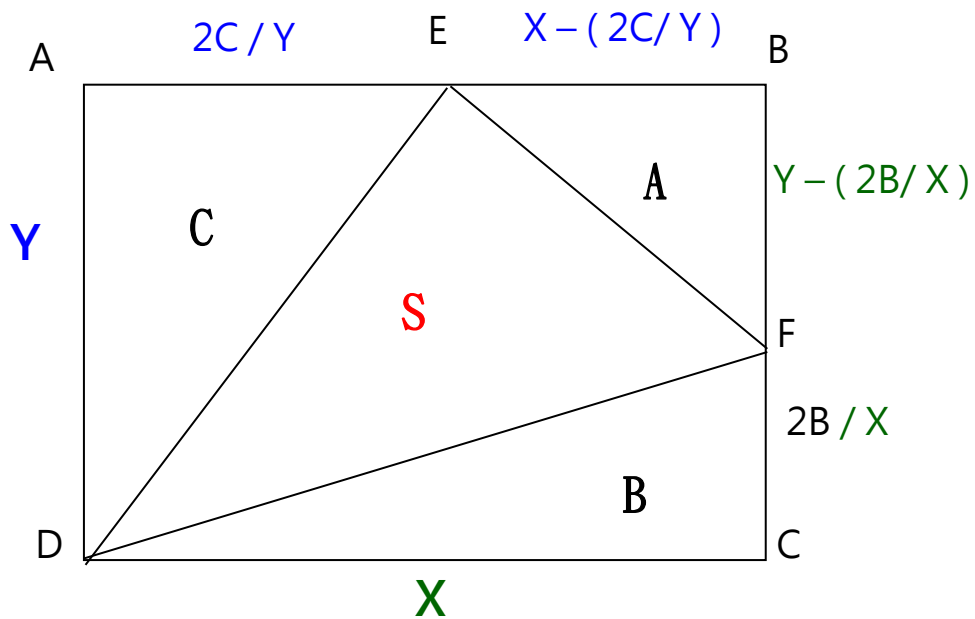
面積 = $XY = 12$ 。改 假設 $X = 6$, $Y = 2$ 。 $S = 4$

面積 = $XY = 12$ 。改 假設 $X = 4$, $Y = 3$ 。 $S = 4$

面積 = $XY = 12$ 。改 假設 $X = 3$, $Y = 4$ 。 $S = 4$

面積 = $XY = 12$ 。改 假設 $X = ?$, $Y = ?$ 。 $S = 4$

可以畫出 好多好多不同的 四巧板



捌、參考資料 及 其他

- 一、國民中學 數學課本 八年級 下學期 第一章 一元二次方程式
- 二、國民中學 數學習作 八年級 下學期 第一章 一元二次程式
- 三、國民中學 數學課本 八年級 下學期 3-1 因式分解 翰林版
- 四、國民中學 數學習作 八年級 下學期 3-1 因式分解 翰林版
- 五、如何思考 (建國中學 學生群 合著)