屏東縣第 60 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：世界高塔

關　鍵　詞：河內塔、遞迴

編號：

製作說明：

1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。

2.編號：由承辦學校統一編列。

3.封面編排由參展作者自行設計。

世界高塔

摘要

我們研究四格雙棟大樓交換規律及最少次數，得到雙塔交換為上層-下層-堆疊還原層移動模式、最少移動次數呈現遞迴關係，以及不規則雙棟搬移採樓高分割可得最少移動次數。

壹、　研究動機

這是一個源自於日常生活高樓的觀察得到的創意遊戲。我們發現街道上有許多樓層寬度相同，所以將熟知的河內塔稍加改變，成為新的遊戲，並探究其中的規律。

貳、　研究目的

一、探討四格獨棟移動次數及規律。
二、探討四格規則雙棟移動技巧與最少移動次數規律。
三、探討四格不規則雙棟移動模式、最少移動次數及規律。

參、　研究設備與器材

一、A4 紙張，並在紙張上繪製四個長方形格子。
二、兩種顏色連方塊，用來組合各種寬度樓層。
三、紀錄資料之筆記與電腦。

肆、　遊戲說明

一、名詞解釋

(一)底盤：底盤以四個長方形格子，格子從左至右分別標示 I、II、III、IV，表示第一格、第二格、第三格及第四格。

(二)樓層

1. 獨棟樓層標註：由上至下分別為 A_1、A_2、A_3 ...... A_{n-2}、A_{n-1}、A_n，樓層寬以 n 表示，分層則以 k 表示之。

2. 雙棟規則樓層：
    (1) A 棟位於 I 格上，由上至下分別為 A_1、A_2、... A_{n-1}、A_n。
    (2) B 棟位於 IV 格上，由上至下分別為 B_1、B_2、... B_{n-1}、B_n。
3. 雙棟不規則樓層：
    (1) 位於 I 格上，由上至下分別為 A_1、A_2 ... A_{n-1}、A_n。
    (2) 位於 IV 格上，由上至下分別為 B_2、B_3 ... B_{n-1}、B_n、B_{n+1}。

(三)目標格：遊戲結束後樓層堆放格子。

(四)暫放「讓位」格：起點格和目標格之外的格子。

(五)上盤(Top)：分解樓層上半部。

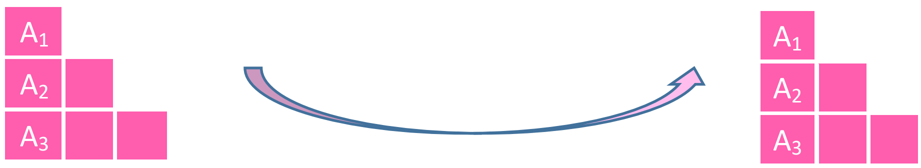
1. 上層(Upper)：底盤上部以利移動的最上層。
2. 底層(Lower)：底盤下部以利移動的最上層。
3. 堆疊層(stack-up)：底盤上部(或「上盤」)還原到底層(或「底盤」)之上堆疊的樓層。

(六)底盤(Down)：分解樓層下半部。

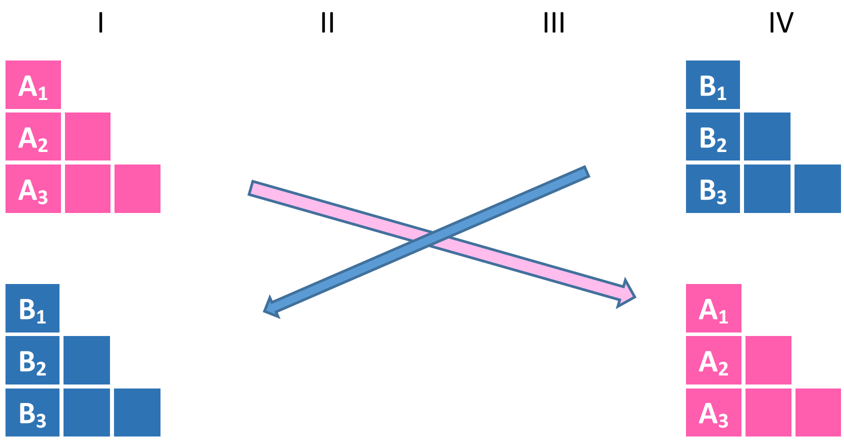
二、規則說明

(一)**獨棟移動**：A 棟在空格 I 上，由上而下由小到大依序排列。以空格 IV 為目標格，一次移動一層樓，目標是將 A 棟完整搬到空格 IV。

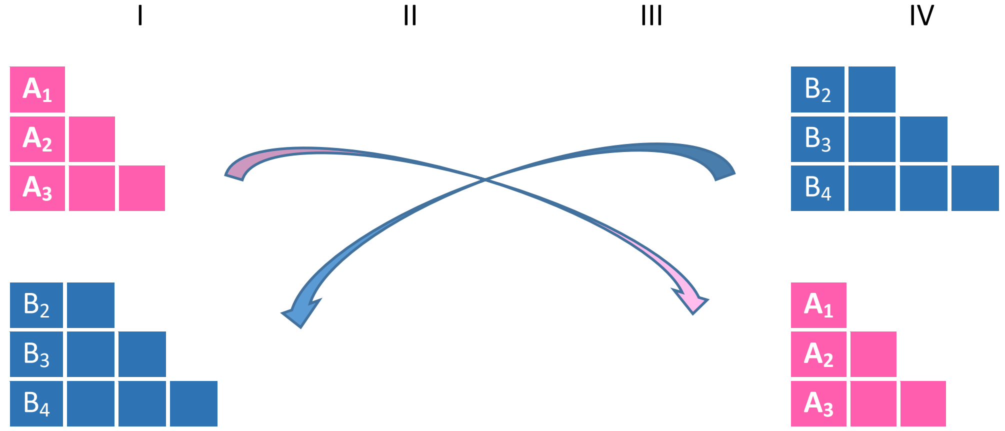
空格 I	空格 II	空格 III	空格 IV



(二)**規則雙棟移動**：雙色樓層分別表示 A、B 兩棟，A 棟位於空格 I，B 棟位於空格 IV，搬移目標是將兩棟交換；搬移時「寬樓層」不能在「窄樓層」之上，同寬樓層可以疊在一起。



(三)**不規則雙棟移動**：雙色樓層分別表示A_n^1、B_{n+1}^2B 兩棟，A 棟位於空格 I，B 棟位於空格 IV，搬移目標是將兩棟交換；搬移時「寬樓層」不能在「窄樓層」之上，同寬樓層可以疊在一起。



伍、文獻探討

關於河內塔的研究頗多，從三塔到四塔到各種變形版，以下為近年科展獲獎作品擇要列出

屆別	題目	研究主旨
第 44 屆 高中組	柱咒毀滅－探討河內塔柱數增加與搬運次數之關係	1. 四柱以上河內塔並證成遞迴式 2. 探討四柱以上最佳圓片數m值是否有唯一解及其對應組合
第 50 屆 國小組	數學 101~河內塔變身!	增加河內塔的柱數探討並作形狀變化，探討最少步數的規律，歸納推論數學式
第 51 屆 國中組	N 柱河內塔的捷徑建構與通式的尋找	柱數、盤數增加，改變遊戲規則，探討完成形狀之變化
第 52 屆 國小組	三柱鼎立—三柱班盤遊戲最佳移動模式之探討	探討三柱河內塔單塔移動、雙塔互換到三塔輪換，推論不同塔數最佳移動模式與最少次數規律及一般式

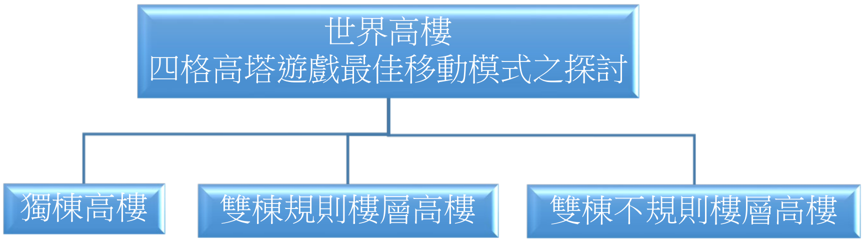
由於規則樓層(相當於河內塔之盤數)研究已經累積相當多資料，我們的研究另闢途徑，根據林淑慧和易庭緯(2014)設計之四種「世界高樓」擇一探究。

觀察世界知名摩天樓如台北 101 有數層同寬樓層壘疊，因此本研究以四柱河內塔為敲門磚，以雙塔交換作為橋接。探討過程中我們發現該作品提出$A_{7}^{1}B_{8}^{2}$「不等寬雙棟」交換之規則為數列$a_n=2n+a_{n-1}$似有斟酌空間，我們認為以四格移動單、雙塔來看最少移動次數有其循環規律，因此動念探討非等寬大樓移動規律，即雙棟不規則樓層高樓移動規則、模式及最少次數之探討。

陸、　研究過程

一、研究架構

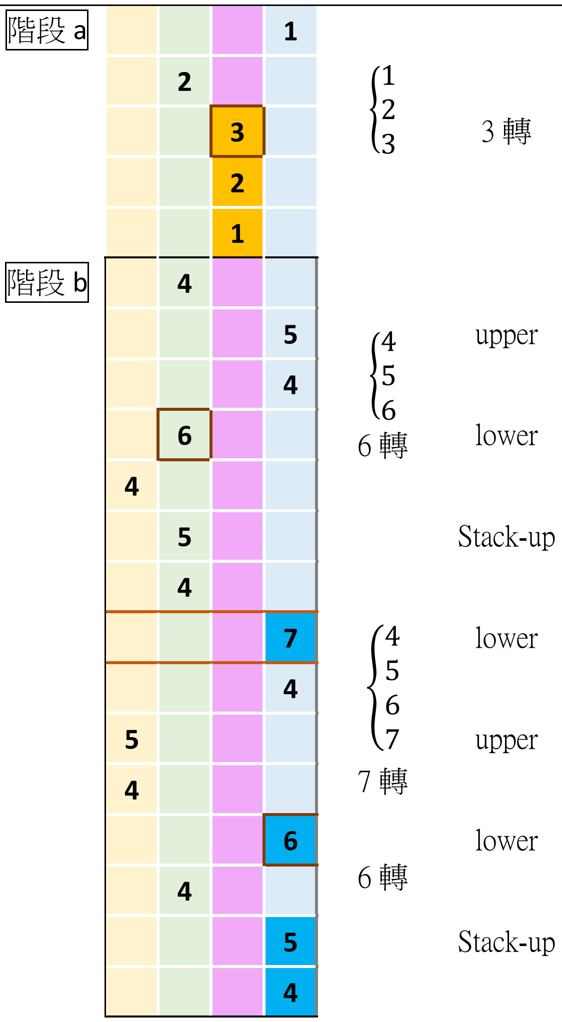
圖 1、「世界高樓」研究架構圖



二、獨棟世界高樓之樓寬與最少移動次數的關係

(一) 移動模式觀察其移動情形，我們把樓層移動次數表列比較，以七層樓為例說明如下：

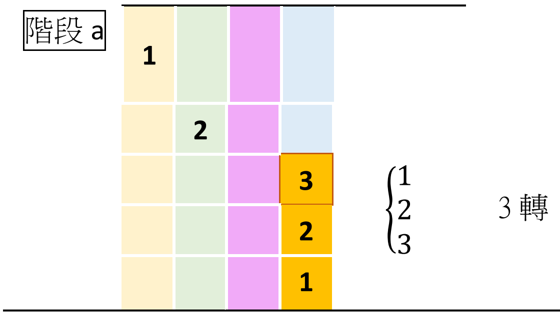
七層樓搬移順序(一)



樓層移動次數

floor	1	2	3		
T=3	1st	2nd	3rd		sum
***1=**	**2**	**2**	**1**		**5**
*2=	4	4	2		10

floor	4	5	6	7	
D=4	1st	2nd	3rd	4th	sum
*1=	4	2	1		7
***2=**	**8**	**4**	2		14
***2+1**	**8**	**4**	**2**	**1**	**15**



floor	1	2	3	
T=3	1st	2nd	3rd	sum
*1=	2	2	1	5
***2=**	**4**	**4**	**2**	**10**

第一種搬移順序將樓層分為上下兩部分，分別為上盤及下盤。第一到第三樓為上盤，合計三層樓，標註A_3^1；第四到第七樓為下盤，合計四層樓，標註A_7^4為三階段 a-b-a 移動。

三階段如下圖所示，粗體為 b 階段，整體呈現 a-b-a 為循環模式。

1 2 1 3 4 3 1 2 1 **5 6 5** 1 2 3 2 1 4 5 4 1 2 3 2 1 **6 7 6**

7 **8**

1 2 1 3 4 3 1 2 1 **5 6 5** 1 2 3 2 1 4 5 4 1 2 3 2 1 **6 7 6**

第二種搬移順序以數字表示如下，七層樓(藍色)分上盤四A_4^1下盤三A_7^5，得到最少次數結果同$A_3^1+A_7^4$；八層樓(橘色)$A_4^1+A_8^5$與$A_5^1+A_8^6$，「上四下四」與「上五下三」，結果皆為 33 步，但若改為上盤三層A_3^1下盤五層A_8^4，次數增加為 41，原因是上盤移動時有四個位置可供移動，上盤佔定其中一格後，下盤剩下三盤可選擇，結果與三柱河內塔相同；上盤先佔定一格，下盤從格 I 移至格 IV，上盤再回復，呈 Top-Down-Stackup 三階段模式。我們觀察四格獨棟高樓移動結果得遞迴式 W (x)=$X_k + X_{n-k} + X_k$。

(二) 最少移動次數為 W (n)之探討

【發現一】上盤有四格可移動，最後佔定其中一格，上盤也是堆疊層，於下盤換置後復原完成交換位置。

層數 n	Xk	2 Xk	分解	Xk
1	1	1	2*1	2^0
2	3	6	2*(2+1)	2^1+a_1
3	5	10	2*(2+2+1)	2^1+a_2
4	9	18	2*(4+2+2+1)	2^2+a_3
5	13	26	2*(4+4+2+2+1)	2^2+a_4
6	17	34	2*(4+4+4+2+2+1)	2^2+a_5
7	25	50	2*(8+4+4+4+2+2+1)	2^3+a_6
8	33	66	2*(8+8+4+4+4+2+2+1)	2^3+a_7
9	41	82	2*(8+8+8+4+4+4+2+2+1)	2^3+a_8

10	49	98	2*(8+8+8+8+4+4+4+2+2+1)	2^3+a_9
11	65	130	2*(**16**+8+8+8+8+4+4+4+2+2+1)	2^4+a_{10}
12	81	162	2*(**16**+16+8+8+8+8+4+4+4+2+2+1)	2^4+a_{11}
13	97	194	2*(**16**+16+16+8+8+8+8+4+4+4+2+2+1)	2^4+a_{12}
14	113	26	2*(**16**+16+16+16+8+8+8+8+4+4+4+2+2+1)	2^4+a_{13}
15	129	258	2*(**16**+16+16+16+16+8+8+8+8+4+4+4+2+2+1)	2^4+a_{14}
16	161	322	2*(**32**+16+16+16+16+16+8+8+8+8+4+4+4+2+2+1)	2^5+a_{15}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

上盤包括上層 upper 和堆疊層 Stack-up，以 **2X**k 表示，從 **X**k 規律可以依序往下推斷上移動總次數。

【發現二】下盤有三格可作為移動選擇，階段 b，其結果等於三柱河內塔最少移動次數，n 為樓層寬，也代表樓層數，第一層樓樓寬為 1，依序為 2,3,4⋯

下盤樓層數推估		樓層移動次數統計及模式							
1	$2^1-1=$	1	1	1					
2	$2^2-1=$	3	1+1+1	2	1				
3	$2^3-1=$	7	3+1+3	4	2	1			
4	$2^4-1=$	15	7+1+7	8	4	2	1		
5	$2^5-1=$	31	15+1+15	16	8	4	2	1	
6	$2^6-1=$	63	31+1+31	32	16	8	4	2	1

M (1)= 1 $= 2^0$

M (2)= 1 = M (1)$\times 2+1=2^0\times 2+1=2^1+2^0$

M (3)= 1 = M (2)$\times 2+1=(2^1+2^0)\times 2+1=2^2+2^1+2^0$

M (4)= 1 = M (3)$\times 2+1=(2^2+2^1+2^0)\times 2+1=2^3+2^2+2^1+2^0$

M (5)= 1 = M (4)$\times 2+1=(2^3+2^2+2^1+2^0)\times 2+1=2^4+2^3+2^2+2^1+2^0$

得到下盤移動結果，H(n)= H(n-1)$\times 2+1$遞迴關係，n 層大樓上盤 k 層，遞迴關係 W (x)=$X_k+X_{n-k}+X_k$，下盤 n-k 層樓之移動次數為 $X_{n-k}=2^{n-k}-1$。

【發現三】將上盤層數與搬移狀況和下盤層數與搬移狀況整理如下，得最少搬移次數組合

上盤 k 層	1	2	3	4	5	6	7	…
搬移次數 M	1	6	10	18	26	34	50	…

下盤 n-k 層	1	2	3	4	5	6	7	…
搬移次數 M	1	3	7	15	31	63	127	…

根據 $W(x)=X_k+X_{n-k}+X_k$ 上盤與下盤組合得到最少移動次數如下

四 格 獨 棟 最佳搬移組合			
樓層數	上盤下盤組合	上下盤移動次數計算	最少移動次數
1	上 **1** 下 **0**	**1**	**1**
2	上 **1** 下 **1**	**2+1**	**3**
3	上 **2** 下 **1**	**4+1**	**5**
4	上 **2** 下 **2**	**6+3**	**9**
5-1	上 **2** 下 **3**	**6+7**	**13**
5-2	上 **3** 下 **2**	**10+3**	
6	上 **3** 下 **3**	**10+7**	**17**
7	上 **3** 下 **4**	**10+15**	**25**
8-1	上 **4** 下 **4**	**18+15**	**33**
8-2	上 **5** 下 **3**	**26+7**	
9	上 **5** 下 **4**	**26+15**	**41**
10	上 **6** 下 **4**	**34+15**	**49**

【小結】

四格搬移即四柱河內塔之單塔移動次數探討，從四層樓開始，發現上盤移動有四格可選擇左右移動，上盤佔格底定之後，下盤只剩下三層樓可移動，因此樓層越高，上盤多下盤少較有利於移動及觀察，且上下盤分別有多次遞迴，為雙塔移動標示參考。

三、雙棟最佳移動模式

(一) 規則雙棟與不規則雙棟移動模式

【假設】規則雙棟與不規則雙棟交換最少次數不一樣

延續獨棟搬移結果，雙棟交換位置也要以最少次數完成，以四層樓為例

規則雙棟移動順序 $A\begin{cases}1\\2\\3\\4\end{cases} \leftrightarrow B\begin{cases}1\\2\\3\\4\end{cases}$						
上盤 2 層樓 下盤 2 層樓						
	STEP	I	II	III	IV	樓層序
Upper	1		A1			1
	2		B1			1
	3			A2		2
	4			B2		2
	5			B1		1
	6			A1		1
Lower	7				A3	3
	8		A4			4
	9		A3			3
	10		B3			3
	11	B4				4
	12	B3				3
	13	A3				3
	14				A4	4
	15				A3	3
Stack-up	16		B1			1
	17		A1			1
	18	B2				2
	19				A2	2
	20				A1	1
	21	B1				1
小計	21	6+9+6=21				

不規則雙棟移動順序 $A\begin{cases}1\\2\\3\\4\end{cases} \leftrightarrow B\begin{cases}2\\3\\4\\5\end{cases}$						
上盤 2 層樓 下盤 2 層樓						
	STEP	I	II	III	IV	樓層序
Upper	1		B2			1
	2			B3		2
	3			B2		1
	4		A1			1
	5			A2		2
	6			A1		1
Lower	7		B4			3
	8				A3	3
	9		A4			4
	10		A3			3
	11	B5				4
	12	A3				3
	13				A4	4
	14				A3	3
	15	B4				3
Stack-up	16		A1			1
	17				A2	2
	18				B2	1
	19	B3				2
	20	B2				1
	21				A1	1
小計	21	6+9+6=21				

(二)變化型—不規則雙棟移動模式

不規則如果不考慮樓寬，以樓層分割上盤 2 層下盤 2 層，結果和規則樓層一樣。如果改以樓寬分割搬移，結果不同。

A123↔B23						A4↔B45						A123↔B23					
STEP	I	II	III	IV	floor	STEP	I	II	III	IV	floor	STEP	I	II	III	IV	floor
1			A1		1	**11**		A4			4	**16**				A1	1
2		B2			1	**12**		B4			3	**17**		B2			1
3		A2			2	**13**	B5				4	**18**		A2			2
4		A1			1	**14**	B4				3	**19**		A1			1
5			B3		2	**15**				A4	4	**20**				A3	3
6			A3		3							**21**	B3				2
7	A1				1							**22**			A1		1
8			A2		2							**23**				A2	2
9			B2		1							**24**				A1	1
10			A1		1							**25**	B2				1
小計		25			10+5+10=25												

【發現一】以樓寬為依據，雖然也符合上盤移動模式 a-b-a，上層-下層-堆疊層模式，但搬移結果不是最少次數。

【發現二】不規則雙棟交換與規則雙棟交換都以樓層為分割單位，不採樓寬分割，才能取得最少移動次數。

(三) 上盤移動規律

上盤有四格空間可供移動，三階段來回，在目的格成一柱，佔用一格，才能讓下盤移動。下例為上盤$k = 4$，有兩個要件需達成才能達到雙棟交換最少次數

【條件一】分成「U(上 2)-L(下 2)-Sn(上 2 回疊)」是組合+分拆+組合，在規則雙棟交換初期為 a-b-a 模式，當上盤樓層數增加，轉為 a-b-a 模式。不規則雙棟交換則較早出現 a-b-c。

【條件二】上盤必須在空格 I 或空格 II 任選佔格成一棟，即上棟佔格。

1. 雙棟交換，以三層樓上盤佔格說明，不規則為輔助說明。規則雙棟上盤佔格前四層樓都是規則的 a-b-a 模式，不規則雙棟出現同樣模式，但樓層交錯讓次數略微增加。

規則	STEP	I	II	III	IV	floor	不規則	STEP	I	II	III	IV	floor
$A_3^1B_3^1$	1		A1			1	$A_3^1B_4^2$	1			A1		1
	2		B1			1		2		A2			2
B2 主 A2 副	3	B2				2		3		B2			1
	4			B3		3		4		A1			1
	5				B2	2		5	B3				2
	6				A2	2		6			B4		3
	7			A3		3		7			B3		2
	8			A2		2		8			A3		3
	9			B2		2		9				A1	1
	10			B1		1		10			B2		1
	11			A1		1		11			A2		2
								12			A1		1

2. 上盤佔一格先拆後組，大致呈現 a-b-a 型式，上盤分為上層、下層與還原堆疊層，從五層樓起開始有了變化，出現 a-b-c 模式，堆疊層略少於分拆的上層。以規則上盤六層成柱佔格為例，最少次數組合 19-7-18，成棟過程中有多次上層 A123↔B123 暫放「讓位」格。

TOP=6

UPPER						LOWER						STACK-UP					
step	I	II	III	IV	floor	step	I	II	III	IV	floor	step	I	II	III	IV	floor
1		A1			1	1	B5				5	1				A1	1
2		B1			1	2			B6		6	2				B1	1
3			A2		2	3				B5	5	3			A2		2
4			B2		2	4				A5	5	4			B2		2
5			B1		1	5			A6		6	5			A1		1
6			A1		1	6			A5		5	6			B1		1
7				A3	3	7			B5		5	7				A3	3
8		A4			4							8				B3	3
9	A3				3							9			B4		4
10	B3				3							10			A4		4
11		B4			4							11			B3		3
12		B3			3							12			A3		3
13		A4			4							13				B1	1
14				A1	1							14				A1	1
15				B1	1							15			B2		2
16		B2			2							16			A2		2
17		A2			2							17			A1		1
18		B1			1							18			B1		1
19		A1			1												

(二) 下盤移動規律

下盤時機在上盤佔一格之後，必須將<u>下盤樓層交換完畢</u>。由於下盤有三格可彈性選擇，我們推估移動最少次數可能與三柱河內塔變化型之雙塔交換一樣。為了便於說明，下盤編號從 1 ~ k，分別表示下盤第 1 層至第k層

$k = 3$

階段 I

step	I	II	III	IV
1		A1	x	
2		B1	x	
3			x	A2
4			x	B1
5			x	A1
6		A3	x	
A1B1+A2+A1B1 讓 1				
5+1				

階段 II

step	I	II	III	IV
7	A1		x	
8	B1		x	
9		A2	x	
10		B2	x	
11		B1	x	
12		A1	x	
13	B3			
A1B1+A2B2+A1B1 讓 1				
6+1				

階段 III

step	I	II	III	IV
14			x	A1
15			x	B1
16	B2		x	
17	A2		x	
18	B1		x	
19	A1		x	
20				A3
A1B1+A2B2+A1B1 讓 1				
6+1				

階段 IV

step	I	II	III	IV
21		A1	x	
22		B1	x	
23			x	A2
24	B1		x	
25			x	A1
A1B1+A2+A1B1				
5				

$k = 4$

階段 I

step	I	II	III	IV	
1	B1		x		
2		B2	x		
3			x	B1	
4			x	A1	
5		A2	x		
6		A1	x		
7		B1	x		
8			x	A3	
9	B1		x		
10	A1		x		
11			x	A2	
12			x	B2	
13			x	A1	
14			x	B1	
15		A4			14+1
AB12+A3+AB12 讓 1					

階段 II

step	I	II	III	IV	
1		B1	x		
2		A1	x		
3	B2		x		
4	A2		x		
5	A1		x		
6	B1		x		
7		A3	x		
8		B3	x		
9			x	B1	
10			x	A1	
11		A2	x		
12		B2	x		
13		A1	x		
14		B1	x		
15	B4				14+1
AB12+A3B3+AB12 讓 1					

階段 III

step	I	II	III	IV	
1	B1		x		
2	A1		x		
3			x	B2	
4			x	A2	
5			x	A1	
6			x	B1	
7	B3		x		
8	A3		x		
9		B1	x		
10		A1	x		
11	A2		x		
12	B2		x		
13	A1		x		
14	B1		x		
15			x	A4	14+1
AB12+A3B3+AB12 讓 1					

階段 IV

step	I	II	III	IV	
1			x	B1	
2			x	A1	
3		B2	x		
4		A2	x		
5		A1	x		
6		B1	x		
7			x	A3	
8	B1		x		
9	A1		x		
10			x	A2	
11			x	A1	
12			x	B1	
13	B2		x		
14	B1		x		14
AB12+A3+AB12					

【發現一】四階段移動模式，底盤移動三次抽離，成組讓位，A1B1、A2B2、A3B3 多次循環。從 A3B3 讓位型態可歸納兩種型態，階段 I=階段 IV，階段 II=階段 III。
【發現二】規則雙層樓底盤交換總次數=(階段 I+階段 IV)+(階段 II+階段 III)+3。
【討論】限制空格 III 為上盤暫停位置，因此必須先將底盤上層清空，讓其中一柱底盤移到空格 II，是底盤唯一暫時停駐格，以便讓目標格清空達成交換目的。因為選擇有限，堆疊樓層會突然增加，窄樓層暫讓次數變多。

(三)整棟交換上下盤最佳組合及模式

四層樓$A_4^1B_4^1$為例呈現規則雙棟交換，沒有樓層交錯情形，上層兩樓下層兩樓，呈 U-L-S，且為 a-b-a 模式。

U_2						L_2						S_2					
step	I	II	III	IV	floor	step	I	II	III	IV	floor	step	I	II	III	IV	floor
1			A1		1	7				A3	3	14	A1				1
2			B1		1	8			A4		4	15	B1				1
3		A2			2	9	A3				3	16			B2		2
4		B2			2	10	B3				3	17			A2		2
5		B1			1	11			B4		4	18			B1		1
6		A1			1	12			B3		3	19			A1		1
U_2=6 步						13			A3		3	**S_2=6 步**					

四層樓$A_4^1B_5^2$不規則雙棟交換，沒有出現樓層交錯，雖然是 U-L-S，但略有差異， U_2 係拆散兩側上盤之上層，S_2 則是組合成一柱佔格，但因其來回次數不同，歸類為 a-b-c 模式。

U_2						L_2						S_2					
step	I	II	III	IV	floor	step	I	II	III	IV	floor	step	I	II	III	IV	floor
1			B2		1	1			A3		3	1				A1	1
2		B3			2	2	B4				3	2	A2				2
3		B2			1	3	A3				3	3	B2				1
4			A1		1	4			B5		4	4			B3		2
5		A2			2	5				A3	3	5			B2		1
6		A1			1	6			B4		3	6			A2		2
						7			A4		4	**7**			A1		1
小計 **U_2=6 步**						**8**			A3		3	小計 **S_2=7 步**					

五層樓$A_5^1B_6^2$不規則雙棟交換為例，上盤 3 層下盤 2 層。上盤搬移有 1、2，2、3 樓層交錯，下盤有遞迴關係，兩棟交換出現遞迴關係。

U2

step	I	II	III	IV	floor
1			A1		1
2		A2			1
3		B2			1
4		A1			1
5	B3				2
6			B4		3
7			B3		2
8			A3		3
9	A1				1
10			B2		2
11			A2		2
12			A1		1

$U_2 = 4+4+4=12$

L2

step	I	II	III	IV	floor
13		B5			4
14				A4	4
15		A5			5
16		A4			4
17	B6				5
18	A4				4
19				A5	5
20				A4	4
21	B5				4

$L_2 = 4+1+4=9$

S2

step	I	II	III	IV	floor
22	A1				1
23		A2			2
24		B2			1
25		A1			1
26				A3	3
27				B3	2
28	B4				3
29	B3				2
30			A1		1
31	B2				1
32				A2	2
33				A1	1

$S_2 = 4+4+4=12$

【討論一】規則雙棟交換在上盤移動時有四格可作為選擇，最後要獨立於格 II 或格 III 形成一棟，才能讓下盤移動。上盤移動規則符合 a-b-a 模式。
那麼不規則移動的差別在哪裡呢?我們發現 B 棟第 1 層樓的樓寬會限制移動格的選擇，所以 A1 依然有四種選擇，包括留在原地、格 II、格 III、格 IV，但是只有移動到格 II、格 III 才是有意義的移動，不過對最少移動次數沒有貢獻。如果讓 B2 先移動，雖然選擇只有格 II、格 III，卻有機會讓雙棟中最寬樓層，也就是 B3 先出來佔格，才有利於成一柱。換言之，先成一柱的條件是讓 Lower 的樓層先佔格才能找到最少次數。
【討論二】上盤回疊差異：規則雙棟回疊層與不規則雙棟回疊層有差異，在盤數較少時，規則雙棟顯現較規律，但從五層樓開始就與不規則雙棟相同，為 a-b-c 模式。

【小結】規則雙棟與不規則雙棟交換都有遞迴關係，在不規則雙棟移動模式限制較多，B 棟樓層較寬，移動順序需較 A 棟早。規則雙棟交換樓層變化呈現規律，例如上 1 下 2 分割，逐層搬移，其中讓位越多的樓層次數越多。但不規則基數樓層呈現$A_2^1\ B_1$、$B_3^2\ A_3$，1↭2 樓、2↭3 樓、3↭4 樓等「樓層交錯」，是以樓寬為主的分割搬移情形。

柒、　研究結果與討論

一、雙棟大樓移動最少移動次數探討

(一)規則雙棟大樓移動模式與統計

假設雙棟規則大樓皆為n層大樓，將其分為上盤與下盤，上盤 TOP 為k層，上盤須經由上層-下層-還原模式形成一柱佔格，其次移動下盤 DOWN 為雙棟底$n-k$層交換，將樓層交換完畢方可將上盤還原，以此得到雙棟交換最少移動次數。

【上盤】移動成柱佔格次數統計

上盤總樓層數 k，分為上層 U 與下層 L，移動次數由上層、底層和回原層組成(階段 a)，上盤在底盤交換完畢(階段 b)之後，拆分回到所屬 AB 棟大樓(階段 c)。上盤必須集中成一棟佔格 II 或格 III，依據拆解方式組合得到最少次數

1. 上層：空格 II 或 III 選一佔格，但移動空間彈性大，移動空間 4 格。
2. 底層：佔剩餘格，移動空間為 3 格，剩餘空間為目的格。
3. 還原層：上層拆解到底層，兩兩成組疊至底層成一棟。
4. 上層狀態是四柱雙塔集中一棟為 U(x)
5. 底層狀態是三柱河內塔的上盤，將兩棟底層集中一棟，與河內塔三柱雙塔不同之處在於，河內塔有四階段移動，四柱雙塔「上盤-底層」較三柱雙塔少交換序列，底盤移動少 1 次，也少分散回疊的階段四。
6. 設四柱「上盤-底層」為為 L(x)，三柱雙塔為 H(x)

河內塔三柱雙棟交換四階段及搬移次數

樓層數	階段 1	階段 2	階段 3	階段 4	H(x)
2	1+1	2+1	2+1	1	9
3	5+1	6+1	6+1	5	25
4	14+1	14+1	14+1	14	59
5	34+1	30+1	30+1	34	131
6	75+1	62+1	62+1	75	277

A1-B1-A2-B1-A1⇒**A3**⇒A1-B1-A2-B2-B1-A1⇒**B3**⇒A1-B1-B2-A2-B1-A1⇒**A3**⇒A1-B1-A2-B1-A1　　3 樓交換需搬移 25 次

A1-B1-A2-B1-A1⇒**A3**⇒A1-B1-A2-B2-B1-A1⇒**B3**⇒A1-B1-B2-A2-B1-A1

3 樓成疊僅需 19 次

樓層數	階段 1	階段 2	階段 3	L(x)	底盤成柱 移動次數
2	1+1	2+1	2	7	2
3	5+1	6+1	6	19	2
4	14+1	14+1	14	44	2
5	34+1	30+1	30	131	2
6	75+1	62+1	62	201	2

本例為雙棟研究，底盤只有兩棟各一棟，只移動兩次。

7. 堆疊層是將上層還原至底層加疊為一柱，與上層略有差異，自成規律，雙棟同樓層兩兩一組回疊，設為 S(x)
8. $T(x)=X_U+X_L+X_S=U(x)+L(x)+S(x)$

上盤成一棟 TOP	上層 Upper	底層 Lower	堆疊層 Stack-up	合計	理想拆組模式	
1	2	0	0	2	1 上 1 上	A_1+B_1
2	2	2	2	6	1 上 1 下	$A_1B_1+A_2B_2+A_1B_1$
3	2	7	2	11	1 上 2 下	$A_1B_1+A_3^2B_3^2+A_1B_1$
4	6	7	6	19	2 上 2 下	$A_2^1B_2^1+A_4^3B_4^3+A_2^1B_2^1$
5	11	7	10	28	3 上 2 下	⋮
6	19	7	18	44	4 上 2 下	⋮
7	19	19	18	56	4 上 3 下	⋮
8	28	19	26	73	5 上 3 下	⋮
9	28	44	26	98	5 上 4 下	$A_5^1B_5^1+A_9^6B_9^6+A_5^1B_5^1$
9	44	19	42	105	6 上 3 下	

【下盤】移動方式與上盤下層不同之處在於交換完畢，為免混淆，可以將下盤視為三柱雙塔河內塔，有三次底盤搬移

【組合】得到最少移動次數

$$W(x)=2T+D=X_k+X_{n-k}+X_k$$

層數	1	2	3	4	5	6
T(x)	2	6	11	19	28	44
2T(x)	4	12	22	38	56	88
H(x)	3	9	25	59	131	277
偶數樓層合計	7	21	47	~~97~~	~~187~~	~~365~~

雙塔上下盤組合，得到最少移動次數配置為 2 上盤配 1 下盤，例如八樓有 4-4，3-5，5-3 三種組合，以 5-3 所得移動次數最少。

樓層數 n	上盤 k	下盤 $n-k$	TOP=2X_k	DOWN= X_{n-k}	最少次數
一層樓	0	1	2*0=0	3	3
二層樓	1	1	2*2=4	3	7
三層樓	1	2	2*2=4	9	13
四層樓	2	2	2*6=12	9	21
五層樓	3	2	2*11=22	9	31

六層樓	4	2	2*19=38	9	47
七層樓	4	3	2*19=38	25	63
八層樓	5	3	2*28=56	25	81
九層樓	5	4	2*28=56	59	115

(二) 不規則雙棟大樓交換模式與統計—第一型—以樓高分割

【上盤】移動次數統計

與規則雙棟最大不同在於樓寬為 1 只有 A 棟，最上兩層 1 窄兩寬，除了記錄樓層之外，要將樓寬還原至樓層序才能比較模式差異。

(1) 上層 U_{ir}： 4 格移動空間，目的格只有兩個，必需於 II 或 III 佔格。
(2) 底層 L_{ir}：移動空間為 3 格，目的格於上層選完剩下之 III 或 II 佔格。
(3) 還原層 S_{ir}：上層拆解到底層，再次疊成一棟，目標是疊至底層之上。
(4) 上層狀態是四柱不規則雙塔集中一棟為 $U_{ir}(x)$
(5) 由於上層已經佔格，只剩下三格可供移動，可視為三柱雙棟不規則河內塔的上盤。因此底層作為上盤基礎，先將兩棟上盤之底層集中。
(6) 不規則移動從樓層序可看出規則。
(7) 設「上盤-底層」為為 $L_{ir}(x)$

河內塔三柱不規則雙棟交換分別討論上層與還原層以及下層

1. 上層 U_{ir} 佔格 II 或 III 集中成棟，有四格彈性移動空間

樓層數	1	2	3	4
上層成棟	2	6	13	20
堆疊還原層成棟	3	7	13	21

2. 下層 L_{ir} 有三格彈性移動空間，目的在佔格 III 或 II 集中成棟，以利上層拆分回疊形成上盤棟

樓層數	1	2		3
次數	2	8		20
移動序	B2A1	A1B2A1B3A1B2A2A1		B2A1A2A1B3A1A2B2A1B4A1B2A2A1B3A3A1A2B2A1
樓層序	11	1112	1121	1121 ⇒2⇒ 1211⇒ 3⇒ 1121⇒ 2⇒3⇒ 1211

$U_{ir}(x)$=1, 8, 20, 47

上盤成一棟 TOP		上層 Upper	底層 Lower	堆疊層 Stack-up	次數合計	
2	1 上 1 下	2	2	3	7	V
3	1 上 2 下	2	8	3	13	V
	2 上 1 下	6	2	7	15	
4	2 上 2 下	6	8	7	21	V
5	3 上 2 下	13	8	13	34	
	2 上 3 下	6	20	7	33	V
6	4 上 2 下	20	8	21	49	V
	2 上 4 下	6	47	7	60	
7	4 上 3 下	20	20	21	61	V
	3 上 4 下	13	47	13	73	

x =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7　　T (x) =2, 7, 13, 21, 33, 49, 61

【下盤】移動次數統計

移動方式與上盤下層不同之處在於交換完畢，為免混淆，可以將下盤視為三柱不規則雙塔河內塔，是 a-b-a 模式。以 A3456↭B4567 為例，設上層已用掉空格 III，底層 4 層交換或底盤四層交換皆為移動模式 b，合計移動 65 次

A3A4A3B4　A3A5A3B4　A4A3A6A3　A4B4A3A5　B5A3B4A4　A3B6A3A4　B4A3B5A5　A3B4A4A3

B7

A3A4A3B4　A3A5A3B4　A4A3A6A3　A4B4A3A5　B5A3B4A4　A3B6A3A4　B4A3B5A5　A3B4A4A3

下盤	a-b-a 模式	上層搬移型態分解				上層	下層	合計次數
1	1+1+1	1	1	1	0	3	0	3
2	4+1+4	1	2	2	1	6	3	9
3	13+1+13	5	6	6	5	22	3	27
4	32+1+32	14	14	14	14	56	3	65
5	73+1+73	34	30	30	34	128	3	147

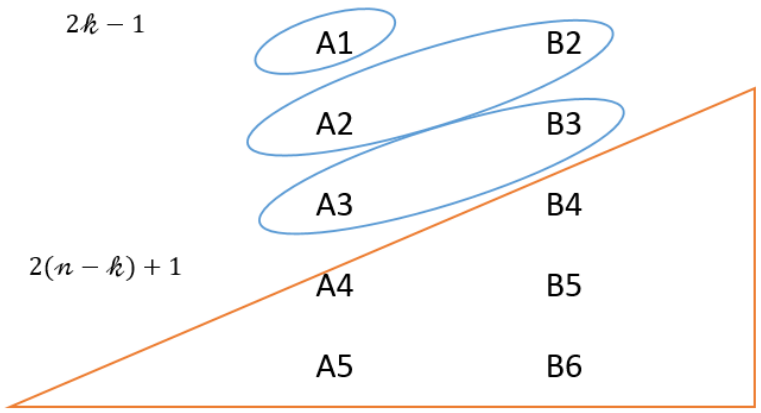
層數	1	2	3	4	5
T(x)	2	6	12	21	33
2T(x)	4	12	24	42	66
D(x)	3	9	27	65	147

【組合】得到最少移動次數

樓層數n	上盤k	下盤$n-k$	TOP=2X_k	DOWN= X_{n-k}	最少次數
一層樓	0	1	2*1=1	0	3
二層樓	1	1	2*1=1	3	7
三層樓	1	2	2*2=4	9	13
四層樓	2	2	2*6=12	9	21
五層樓	3	2	2*12=24	9	33
六層樓	4	2	2*21=42	9	51
七層樓	4	3	2*21=42	27	69
八層樓	5	3	2*33=66	27	93
九層樓	5	4	2*33=66	65	131

(二) 不規則雙棟大樓交換模式與統計—第二型—以樓寬分割

第二型不規則雙棟交換模式與第一型的差別在於以樓寬為準，$k=3$表示 A 棟 1~3 層樓和 B2~B_{k+1}成組搬移，以上 3 下 2 為例



不規則樓層搬移次數也和樓層分割有關，五層樓為例可分上 1 下 4、上 2 下 3、上 3 下 2、上 4 下 1。

層數	1	2	3	4	5	…
上層 Upper	1	4	8	15	23	
下層 Lower	4	12	29	55	144	
堆疊層 Stack-up	1	4	8	14	22	
上層與堆疊層合計	2	8	16	29	45	

上盤統計次數—不規則第二型

上盤成一棟 TOP		上層 Upper	底層 Lower	堆疊層 Stack-up	次數合計
1	1 上				1
2	1 上 1 下	1	4	1	6
3	2 上 1 下	4	4	4	12
4	2 上 2 下	4	12	4	20
5	3 上 2 下	8	12	8	28
6	4 上 2 下	15	12	14	41
7	5 上 2 下	23	12	22	57

上盤集中成棟次數比較

樓層數	1	2	3	4	5	6	7
不規則雙棟第一型	1	7	13	21	33	49	61
不規則雙棟第二型	**1**	**6**	**12**	**20**	**28**	**41**	**57**

上盤次數較第一型少，但進一步分析下盤交換之後，發現整體組合次數較第一型多。下盤交換次數依樓寬表示，當$n-k=1,2,3,\cdots$依序為 5, 15, 39, 89⋯，進一步組合結果如下

層數	**2**	**3**	**4**	**5**	⋯
規則雙棟交換	**7**	**13**	**21**	**31**	⋯
不規則雙棟交換 1	**5**	**13**	**23**	**35**	⋯
不規則雙棟交換 2	**7**	**17**	**27**	**39**	⋯

兩型比較之下，我們發現以樓寬為準的第二型在上盤移動時因為一開始有四格空間可以運用，好像比較有利，但是下盤交換和第一型一樣有三格空間，但多了一個樓層 B_{k+1}，次數自然增加。因此不規則樓層最少移動次數要以第一型為主，未免漏失，可以再參考第二型比較。

規則與布規則雙棟移動都符合上盤加下盤分割，搬移模式為 a-b-a，移動次數為 $W(x) = 2T+D=X_k+X_{n-k}+X_k$ 。上盤 $T(x)=X_U+X_L+X_S= U(x)+L(x)+S(x)$模式明顯分為上層-下層-堆疊還原層，分批集中成棟、堆疊再拆分堆疊，符合 a-b-c 模式。

捌、　研究結論

一、四格雙棟大樓交換為上層-下層-堆疊還原層移動模式。

二、最少移動次數呈現遞迴關係，$W(x) = 2T+D=X_k + X_{n-k} + X_k$。

三、不規則雙棟搬移採樓高分割可得最少移動次數。

參考文獻

1　柱咒毀滅－探討河內塔柱數增加與搬運次數之關係。全國中小學科學展覽作品

2　數學 101~河內塔變身!　。全國中小學科學展覽作品

3　N 柱河內塔的捷徑建構與通式的尋找。全國中小學科學展覽作品

4　三柱鼎立—三柱班盤遊戲最佳移動模式之探討。全國中小學科學展覽作品

5　Bousch, T. (2014). La quatri`eme tour de Hano¨,　retrieved from https://pdfs.semanticscholar.org/fb87/0a772baf96a2e11901122a2b04c3dd25596d.pdf