

屏東縣第 60 屆國中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：直角三角形—初探畢氏定理

關 鍵 詞：直角三角形、放大圖、縮小圖（最多三個）

編號：

製作說明：

- 1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
- 2.編號：由承辦學校統一編列。
- 3.封面編排由參展作者自行設計。

摘要

從科普書籍最ㄅㄟㄉ的數學公式，對畢氏定理有初步的認識，另外使用 Excel 軟體找出 100 以內的整數中，直角三角形的邊長共有五十二組，並進行分類，發現部分直角三角形之間，互為放大圖（縮小圖）；部分直角三角形則除了直角，其他對應角不相等，並無放大或縮小的關係。

壹、 研究動機

有一天，在班上的書櫃裡發現一本書——最ㄅㄟㄉ的數學公式，裡面介紹一些數學公式，有些公式我們已經從課本裡學到；有些公式對我們而言太過艱深，讓我和同學很想放下書，逃離教室。在那些陌生的公式中，有一個讓我們印象深刻，那就是「畢氏定理」，雖然我們得等到國中才會認識畢氏定理，但我們想要用自己能理解的方式先學習畢氏定理，於是在老師的協助下，我們先了解 $a^2 + b^2 = c^2$ 的意義，接著進行一場難以想像的挑戰。

貳、 研究目的

- 一、 從梯形圖中，透過計算面積，了解畢氏定理的公式。
- 二、 在 100 以內的整數中，找出直角三角形的三邊長，觀察直角三角形之間的關聯。

參、 研究設備及器材

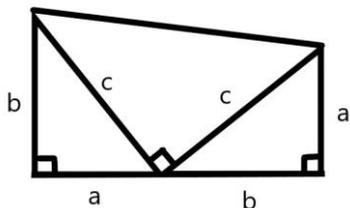
- 三、 電腦（Excel 軟體）
- 四、 紙、筆。

肆、 研究過程或方法

- 一、 使用美國前總統 James Garfield 的證明方法，發現在直角三角形中，三邊長為 a 、 b 和 c ，夾直角的兩邊邊長為 a 和 b ，與直角相對的邊邊長為 c ，那麼 $a \times a + b \times b = c \times c$ （即 $a^2 + b^2 = c^2$ ）。
- 二、 由於時間因素，因此我們只選取 100 以內的整數。在 Excel 軟體中，代入 2 至 100 等整數於 c ，再代入小於 c 的整數於 b （令 $c > b > a$ ），使用 SQRT 函數求得 a 值。
- 三、 從各組資料中找出三邊長皆為整數的數據。

伍、 研究結果

- 一、 從 James Garfield 的梯形圖（圖一）中，我們了解兩個梯形面積（兩底和為 $a+b$ ，高為 $a+b$ ）等於一個邊長為 $a+b$ 的正方形面積，亦等於一個邊長為 c 的正方形面積加上 4 個直角三角形的面積（底為 a 、高為 b ）。



圖一

$$(a+b) \times (a+b) = a \times b \times 2 + c \times c$$

$$a \times a + a \times b \times 2 + b \times b = a \times b \times 2 + c \times c$$

$$a \times a + a \times b \times 2 + b \times b = a \times b \times 2 + c \times c$$

$$a \times a + b \times b = c \times c$$

- 二、 獲得五十二組資料，皆滿足於 $a \times a + b \times b = c \times c$ ，如下表所示：

編號	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬
a	3	6	5	9	8	12	15	7	10	20	18	16	21
b	4	8	12	12	15	16	20	24	24	21	24	30	28
c	5	10	13	15	17	20	25	25	26	29	30	34	35

編號	⑭	⑮	⑯	⑰	⑱	⑳	㉑	㉒	㉓	㉔	㉕	㉖	
a	12	15	24	9	27	30	14	24	20	28	33	40	36
b	35	36	32	40	36	40	48	45	48	45	44	42	48
c	37	39	40	41	45	50	50	51	52	53	55	58	60

編號	⑳	㉑	㉒	㉓	㉔	㉕	㉖	㉗	㉘	㉙	㉚	㉛	㉜
a	11	39	33	25	16	32	42	48	24	45	21	30	48
b	60	52	56	60	63	60	56	55	70	60	72	72	64
c	61	65	65	65	65	68	70	73	74	75	75	78	80

編號	㉝	㉞	㉟	㊱	㊲	㊳	㊴	㊵	㊶	㊷	㊸	㊹	㊺
a	18	51	40	36	13	60	39	54	35	57	65	60	28
b	80	68	75	77	84	63	80	72	84	76	72	80	96
c	82	85	85	85	85	87	89	90	91	95	97	100	100

陸、 討論

一、 將五十二組資料重新分類，可以分成以下十六種類型：

(一) 編號①的直角三角形與它的放大圖

編號	①	②	④	⑥	⑦	⑪	⑬	⑯	⑱	⑲
倍數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
b	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
c	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

編號	㉔	㉖	㉘	㉛	㉞	㉟	㊱	㊲	㊴	㊶
倍數	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
b	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
c	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100

(二) 編號③的直角三角形與它的放大圖

編號	③	⑨	⑮	⑳	㉓	㉗	㉛
倍數	1	2	3	4	5	6	7
a	5	10	15	20	25	30	35
b	12	24	36	48	60	72	84
c	13	26	39	52	65	78	91

(三) 編號⑤的直角三角形與它的放大圖

編號	⑤	⑫	⑳	㉓	㉗
倍數	1	2	3	4	5
a	8	16	24	32	40
b	15	30	45	60	75
c	17	34	51	68	85

(四) 編號⑧的直角三角形與它的放大圖

編號	⑧	⑳	㉓	㉗
倍數	1	2	3	4
a	7	14	21	28
b	24	48	72	96
c	25	50	75	100

(五) 編號⑩的直角三角形與它的放大圖

編號	⑩	②⑤	④⑤
倍數	1	2	3
a	20	40	60
b	21	42	63
c	29	58	87

(六) 編號⑭的直角三角形與它的 2 倍放大圖

編號	⑭	③⑤
a	12	24
b	35	70
c	37	74

(七) 編號⑰的直角三角形與它的 2 倍放大圖

編號	⑰	④⑩
a	9	18
b	40	80
c	41	82

(八) 編號⑳：邊長為 28、45、53 的直角三角形

(九) 編號㉑：邊長為 11、60、61 的直角三角形

(十) 編號㉓：邊長為 33、56、65 的直角三角形

(十一) 編號㉕：邊長為 16、63、65 的直角三角形

(十二) 編號㉗：邊長為 48、55、73 的直角三角形

(十三) 編號㉙：邊長為 36、77、85 的直角三角形

(十四) 編號④④：邊長為 13、84、85 的直角三角形

(十五) 編號④⑥：邊長為 39、80、89 的直角三角形

(十六) 編號⑤⑦：邊長為 65、72、97 的直角三角形

二、 將直角三角形的邊長同時乘以(或是除以)一個數字，仍為直角三角形的邊長。

(一) 將 3、4、5 同時乘以 100：

$$300 \times 300 + 400 \times 400 = 500 \times 500$$

(二) 將 3、4、5 同時除以 10：

$$0.3 \times 0.3 + 0.4 \times 0.4 = 0.5 \times 0.5$$

柒、 結論

一、 在直角三角形中，夾直角的兩邊邊長為 a 和 b ，與直角相對的邊邊長為 c ，那麼 $a \times a + b \times b = c \times c$ 。

二、 將直角三角形的三邊長同時乘以或是除以大於 1 的數字後，則所得的另外一組數字亦為直角三角形的三邊長，且對應角角度相等，代表新的直角三角形是原直角三角形的放大圖或是縮小圖。

三、 直角三角形之間，因為對應角角度不相等，不一定為對方的放大圖或是縮小圖。

四、 以往只知道直角三角形的定義，透過這次研究，發現邊長間的有趣關係，對於身為初學者的我們而言，是非常寶貴的經驗，讓我們不禁期待國中的數學課程，還有哪些挑戰在等待我們。

捌、 參考資料及其他

一、 里翁賴爾·薩利姆(2006)·最ㄅ一ㄅ的數學公式·臺北市：五南。