屏東縣第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：我來切切看—(3,4,5)直角三角形等分

關 鍵 詞：切補與對稱、畢氏定理、面積切割

編　　號

目　　　錄

壹、摘要

利用課堂學過的畢氏定理與垂直、平分以及線對稱圖形等知識，用來解決所遇到問題中(3,4,5)直角三角形面積切割成兩等分。

貳、研究動機

有一天在學校所訂購的中學生報中，其中一欄數學任意門中看到一道數學題。西元 1957 年數學家柴田直光先生提出『先用十二根火柴棒排成一個直角三角形後，再使用數根(整數根)火柴棒把此三角形面積兩等分，其中火柴棒不可以超出直角三角形邊界。』這個問題該怎麼解?作者先試著利用火柴棒嘗試擺放幾次後；便拿著問題詢問數學老師，希望能解決問題。

叁、研究目的

一、最多(少)能用多少根火柴棒將三角形面積分割成兩等分?

二、如何確認火柴棒是否超出直角三角形邊界?

三、如何有系統的分類歸納答案?

四、是否還有其他解題策略?

肆、研究設備及器材

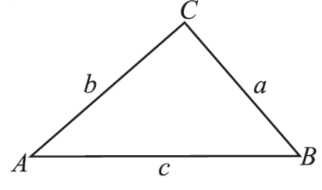
紙、筆、火柴棒、方格紙、GSP 繪圖軟體、計算機。

伍、研究過程或方法

預備知識:三角形面積公式

設$\triangle ABC$中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的對邊長分別為 a，b，c（如右圖），

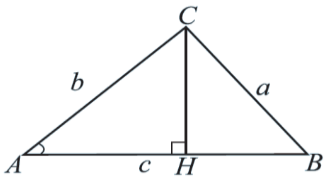
則$\triangle ABC$的面積$=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$.



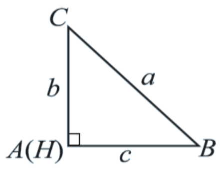
【證明】由於$\triangle ABC$的$\angle A$可能為銳角、直角或鈍角三種情形，

分別作$\overline{AB}$邊的高$\overline{CH}$（如下頁圖）其長度皆為$b\sin A$.

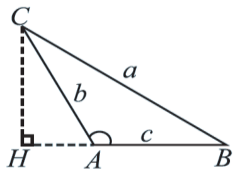
(1) $\angle A$ 為銳角　　(2) $\angle A$ 為直角　　(3) $\angle A$ 為鈍角



$\overline{CH}=\overline{CA}\sin A=b\sin A$



$\overline{CH}=\overline{CA}=b=b\sin A$



$\overline{CH}=\overline{CA}\sin(180°-A)$
$=b\sin(180°-A)$
$=b\sin A$

由以上(1)(2)(3)知$\triangle ABC$的面積$=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{CH}$

$$=\frac{1}{2}c\times(b\sin A)=\frac{1}{2}bc\sin A\ .$$

同理可以得證：

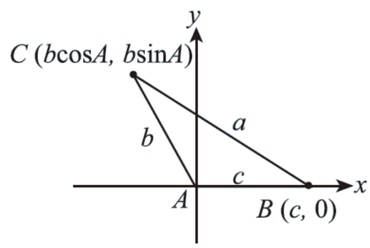
$$\triangle ABC\text{的面積}=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C\ .$$

餘弦定理：$\triangle ABC$ 中，若$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的對邊長分別為 a，b，c，則

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$$

【證明】 將$\triangle ABC$ 置於直角坐標平面上，使得 A 為原點，B 點在 x 軸正向方上，因為 $\overline{AB}=c$，所以 B 的坐標點為$(c, 0)$，C 為$\angle A$ 終邊上的一點且 $\overline{AC}=b$，依標準位置角的定義可以得到 C 的坐標為$(b\cos A, b\sin A)$．

依據兩點距離公式，得



$$\overline{BC}^2=a^2=(b\cos A-c)^2+(b\sin A)^2$$

$$=(b^2\cos^2 A-2bc\cos A+c^2)+b^2\sin^2 A$$

$$=b^2+c^2-2bc\cos A$$

同理，可以證得

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos$$

一、火柴棒若成一直線

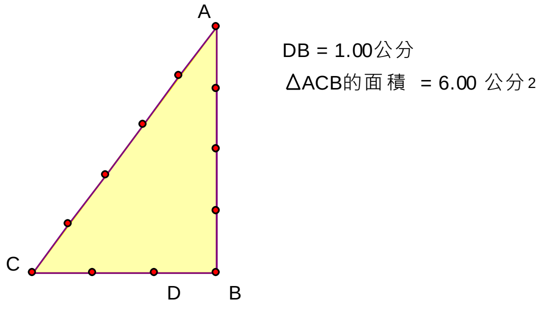


圖 1

※僅利用一根火柴棒並沒有辦法圍出面積為 3 的區域。

※直角三角形 ΔABC 的斜邊為 5 根火柴棒，則火柴棒成一直線有可能的長度僅 2、3、4 根。

(一)以任意一個角為一點將直角三角形分割成兩等分，則此直線為中線。

如下圖 2 中所示，三中線皆非整數，若用整數根火柴棒拼接，則此直線會<u>超出</u>三角形內部。

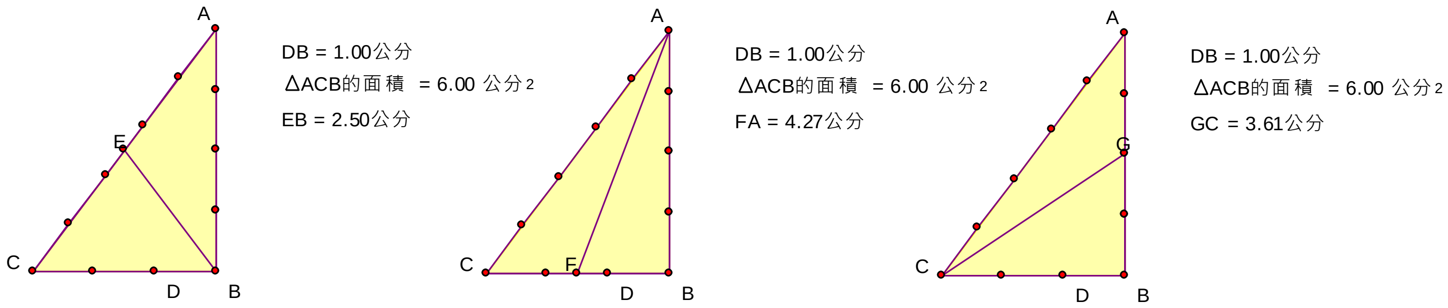


圖 2

(二) 1.以 $\angle A$ 為圍成的三角形其中一個角:

(1)分為在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 取一點 P、Q，使得 $\overline{PQ}=2$， $\overline{AP}=a$ 、 $\overline{AQ}=b$

(其中 $0<a<5$ 、 $0<b<4$)

$\sin A=\dfrac{3}{5}$ ， $\dfrac{1}{2}ab\sin A=3$ ， $ab=10$

又 $\cos A=\dfrac{4}{5}=\dfrac{a^2+b^2-\overline{PQ}^2}{2ab}=\dfrac{a^2+b^2-4}{20}$ ，則 $a^2+b^2=20$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=40$ ，即 $a+b=\sqrt{40}$

令 a 、 b 為 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 方程式兩根，

方程式為 $x^2-\sqrt{40}x+10=0$ 　　　則 $x=\sqrt{10}$ (重根)，取 $a=b=\sqrt{10}$ 。(如下頁圖 3)

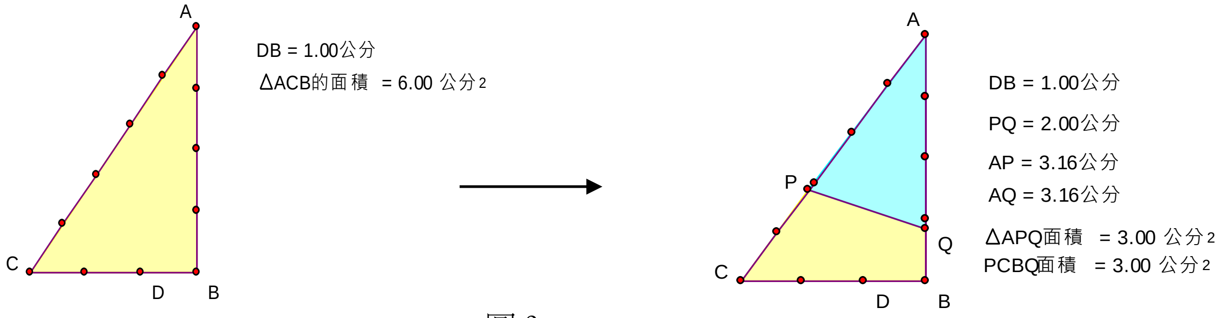


圖 3

(2)分為在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 取一點 P、Q，使得 $\overline{PQ}$=3， $\overline{AP}=a$ 、 $\overline{AQ}=b$

(其 $0<a<5$ 、 $0<b<4$)

$\sin A=\dfrac{3}{5}$ ， $\dfrac{1}{2}ab\sin A=3$ ， $ab=10$

又 $\cos A=\dfrac{4}{5}=\dfrac{a^2+b^2-\overline{PQ}^2}{2ab}=\dfrac{a^2+b^2-9}{20}$ ，則 $a^2+b^2=25$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=45$ ，即 $a+b=\sqrt{45}$

令 a 、 b 為 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 方程式兩根，

方程式為 $x^2-\sqrt{45}x+10=0$ 　　　則 $x=\dfrac{\sqrt{45}\pm\sqrt{5}}{2}$ ，取 $a=2\sqrt{5}$ 、 $b=\sqrt{5}$ 。(如圖 4)

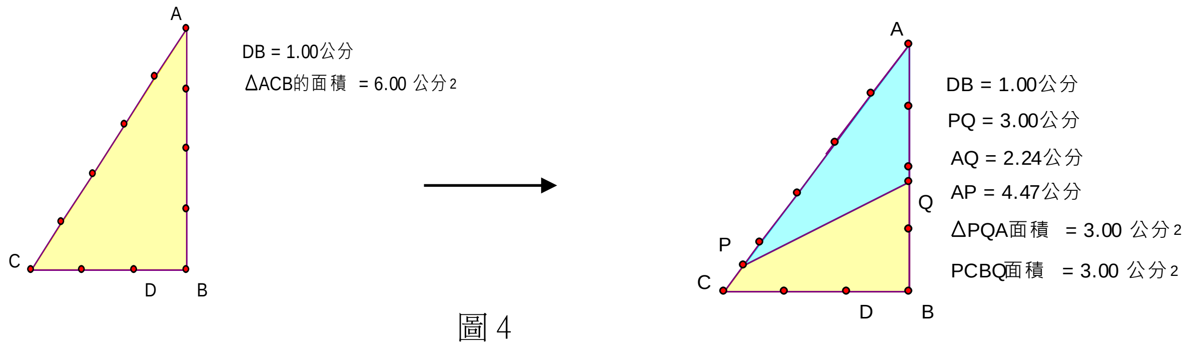


圖 4

(3)分為在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 取一點 P、Q，使得 $\overline{PQ}$=4， $\overline{AP}=a$ 、 $\overline{AQ}=b$

(其中 $0<a<5$ 、 $0<b<4$)

$\sin A=\dfrac{3}{5}$ ， $\dfrac{1}{2}ab\sin A=3$ ， $ab=10$

又 $\cos A=\dfrac{4}{5}=\dfrac{a^2+b^2-\overline{PQ}^2}{2ab}=\dfrac{a^2+b^2-16}{20}$ ，則 $a^2+b^2=32$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=52$ ，即 $a+b=\sqrt{52}$

令 a 、 b 為 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 方程式兩根，

則方程式為 $x^2-\sqrt{52}x+10=0$　　　則 $x=\dfrac{\sqrt{52}\pm\sqrt{12}}{2}$ (不合)。

2.以 $\angle B$ 為圍成的三角形其中一個角:

(1)分為在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 取一點 P、Q，使得 $\overline{PQ}$=2， $\overline{BP}=a$ 、 $\overline{BQ}=b$

(其中 $0<a<4$ 、 $0<b<3$)

$\sin B=1$ ， $\frac{1}{2}ab\sin B=3$ ， $ab=6$

又 $a^2+b^2=4$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=16$，即 $a+b=4$

令 a 、 b 為 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 方程式兩根，

則方程式為 $x^2-4x+6=0$　　　則 x 為無解(不合)。

(2)分為在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 取一點 P、Q，使得 $\overline{PQ}$=3， $\overline{BP}=a$ 、 $\overline{BQ}=b$

(其中 $0<a<4$ 、 $0<b<3$)

$\sin B=1$ ， $\frac{1}{2}ab\sin B=3$ ， $ab=6$

又 $a^2+b^2=9$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=21$，即 $a+b=\sqrt{21}$

令 a 、 b 為 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 方程式兩根，

方程式為 $x^2-\sqrt{21}x+6=0$　　　則 x 為無解(不合)。

(3)分為在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 取一點 P、Q，使得 $\overline{PQ}$=4， $\overline{BP}=a$ 、 $\overline{BQ}=b$

(其中 $0<a<4$ 、 $0<b<3$)

$\sin B=1$ ， $\frac{1}{2}ab\sin B=3$ ， $ab=6$

又 $a^2+b^2=16$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 28$，即 $a+b = \sqrt{28}$

令 a 、 b 為 $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ 方程式兩根，

方程式為 $x^2 - \sqrt{28}x + 6 = 0$　則 $x = \dfrac{2\sqrt{7} \pm 2}{2} = \sqrt{7} \pm 1$，取 $a = \sqrt{7} + 1$ 、 $b = \sqrt{7} - 1$。(如圖 5)

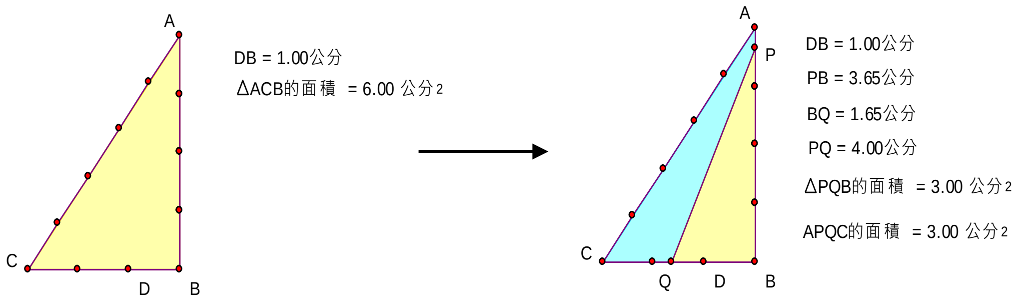


圖 5

3.以 $\angle C$ 為圍成的三角形其中一個角:

(1)分為在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 取一點 P、Q，使得 $\overline{PQ}$=2， $\overline{CP} = a$ 、 $\overline{CQ} = b$

(其中 $0 < a < 5$ 、 $0 < b < 3$)

$\sin C = \dfrac{4}{5}$ ， $\dfrac{1}{2}ab\sin C = 3$ ， $ab = \dfrac{15}{2}$

又 $\cos C = \dfrac{3}{5} = \dfrac{a^2 + b^2 - \overline{PQ}^2}{2ab} = \dfrac{a^2 + b^2 - 4}{15}$ ，則 $a^2 + b^2 = 13$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 28$，即 $a+b = \sqrt{28}$

令 a 、 b 為 $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ 方程式兩根，

方程式為 $x^2 - \sqrt{28}x + \dfrac{15}{2} = 0$　　　　則 x 為無解(不合)。

(2)分為在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 取一點 P、Q，使得 $\overline{PQ}$=3， $\overline{CP} = a$ 、 $\overline{CQ} = b$

(其中 $0 < a < 5$ 、 $0 < b < 3$)

$\sin C = \dfrac{4}{5}$ ， $\dfrac{1}{2}ab\sin C = 3$ ， $ab = \dfrac{15}{2}$

又 $\cos C = \dfrac{3}{5} = \dfrac{a^2 + b^2 - \overline{PQ}^2}{2ab} = \dfrac{a^2 + b^2 - 9}{15}$ ，則 $a^2 + b^2 = 18$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 33$，即 $a+b = \sqrt{33}$

令 a 、 b 為 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 方程式兩根，

方程式為 $x^2-\sqrt{33}x+\frac{15}{2}=0$ 則 $x=\frac{\sqrt{33}\pm\sqrt{3}}{2}$ ，取 $a=\frac{\sqrt{33}+\sqrt{3}}{2}$ 、 $b=\frac{\sqrt{33}-\sqrt{3}}{2}$ 。(如圖 6)

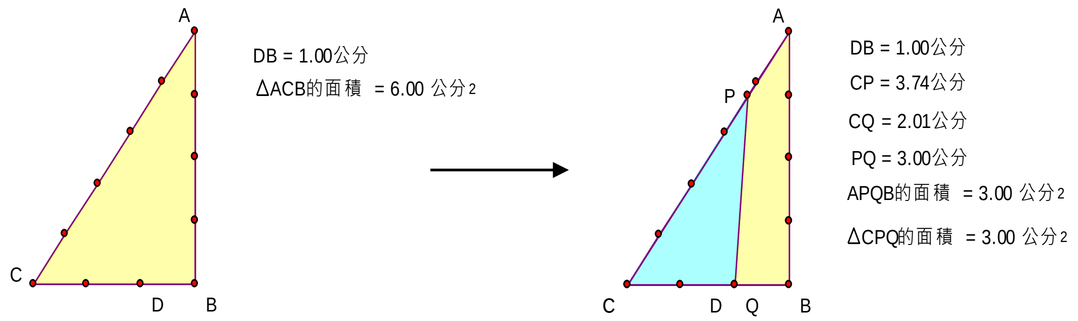


圖 6

(3)分為在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 取一點 P、Q，使得 $\overline{PQ}=4$， $\overline{CP}=a$ 、 $\overline{CQ}=b$

(其中 $0<a<5$ 、 $0<b<3$)

$\sin C=\frac{4}{5}$ ， $\frac{1}{2}ab\sin C=3$ ， $ab=\frac{15}{2}$

又 $\cos C=\frac{3}{5}=\frac{a^2+b^2-\overline{PQ}^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-16}{15}$ ，則 $a^2+b^2=25$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=40$ ，即 $a+b=\sqrt{40}$

令 a 、 b 為 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 方程式兩根，

方程式為 $x^2-\sqrt{40}x+\frac{15}{2}=0$ 　　則 $x=\frac{\sqrt{40}\pm\sqrt{10}}{2}$ ，取 $a=\frac{3\sqrt{10}}{2}$ 、 $b=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 。(如圖 7)

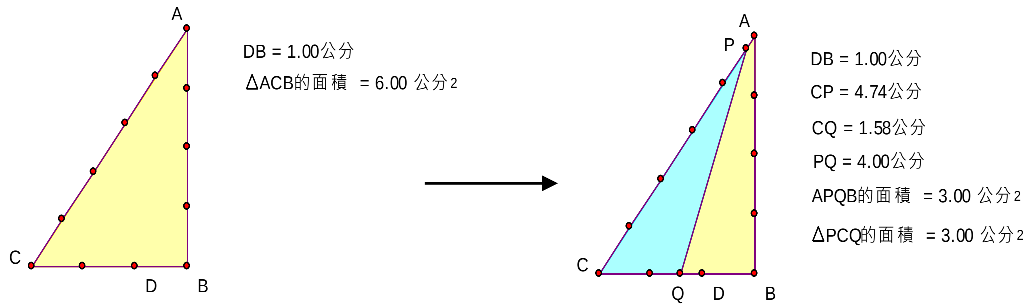


圖 7

二、火柴棒不成一直線

※傳統三角形面積的平分，是利用中線平分，但由第 5 頁圖 2 中可知，若用火柴棒排成一直線時，顯然整數根火柴棒會超出三角形內部。

※我們使用火柴棒來分割面積時，遇到一些困惱。感覺可以將三角形面積切割兩等分時，由

於火柴棒的大小可能不一，有些誤差；感覺能切割，但是往往事與願違(如下圖 8 所示: $\overline{HI}$ 與 $\overline{HG}$ 交點在三角形外部)，此時利用 GSP 繪圖軟體幫助，加以確定火柴棒是否有超出三角形內部。

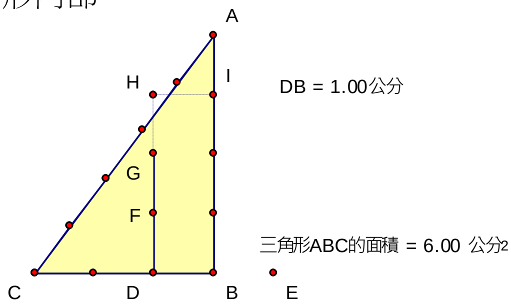


圖 8

(一)作法:1.過 H 點做垂直 $\overline{AB}$ 的垂線並取 $\overline{GH}=1$，又 $\overline{AH}$ 與 $\overline{AF}$ 都為 3，所以 $\overline{AG}$ 為 $\angle A$ 平分線。

2.連接 $\overline{FG}$ ，所以僅需 2 根火柴棒就能將 ΔABC 平分成兩等分。

(如圖 9)

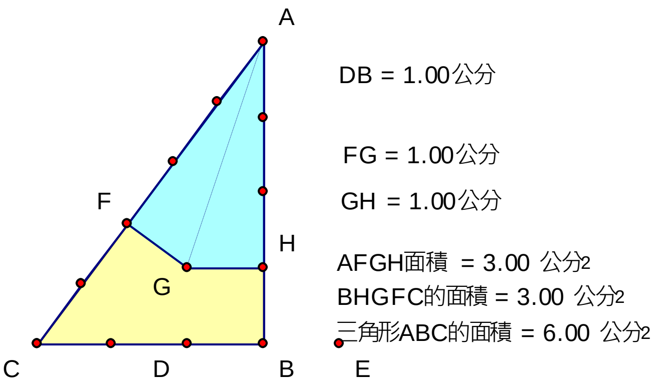


圖 9

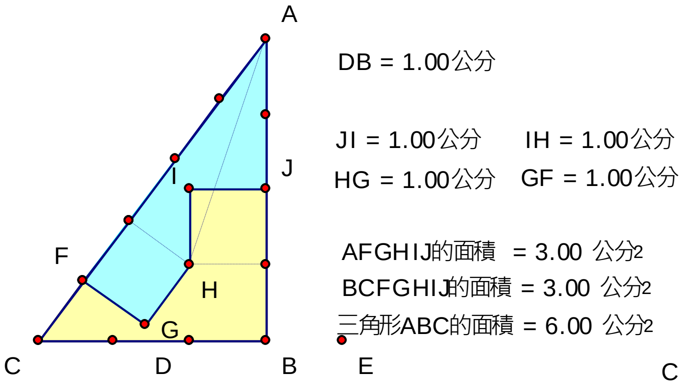


圖 9-1

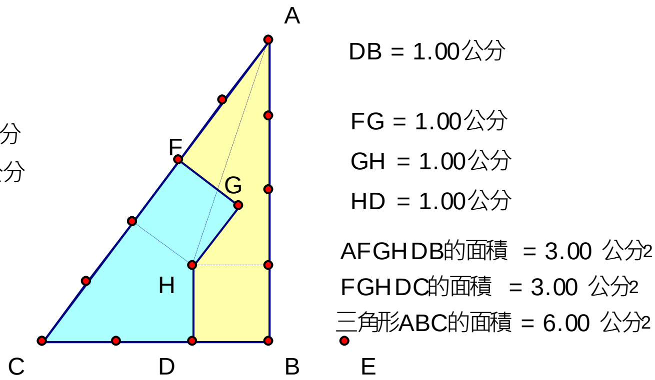


圖 9-2

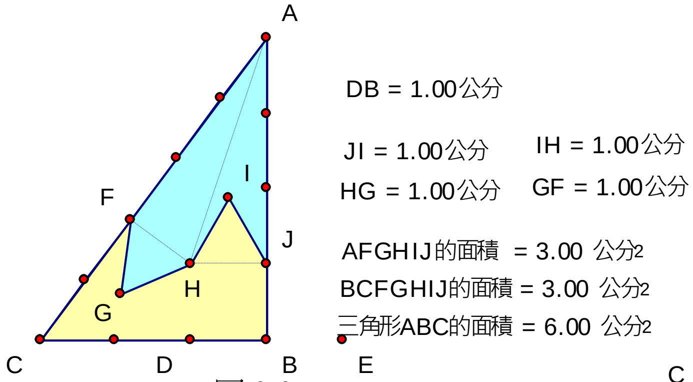


圖 9-3

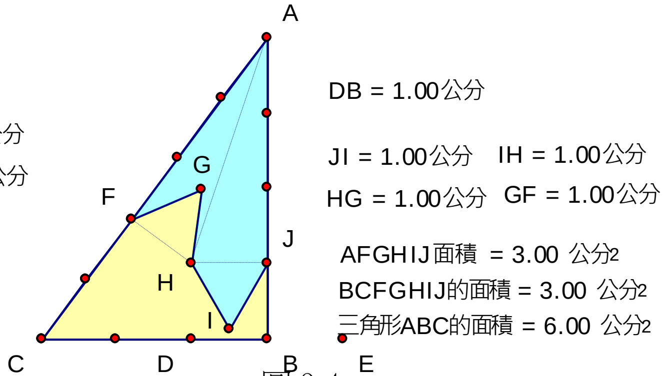


圖 9-4

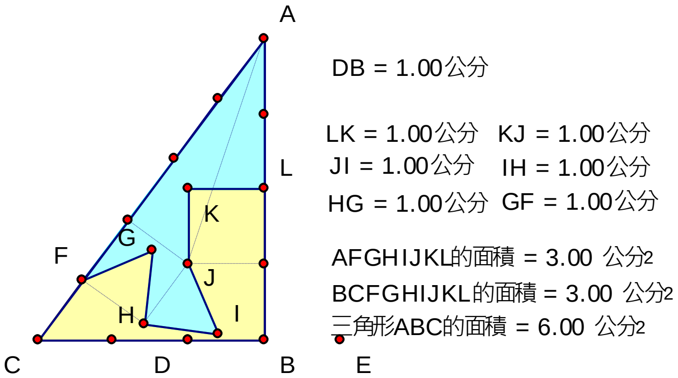


圖 9-1-a

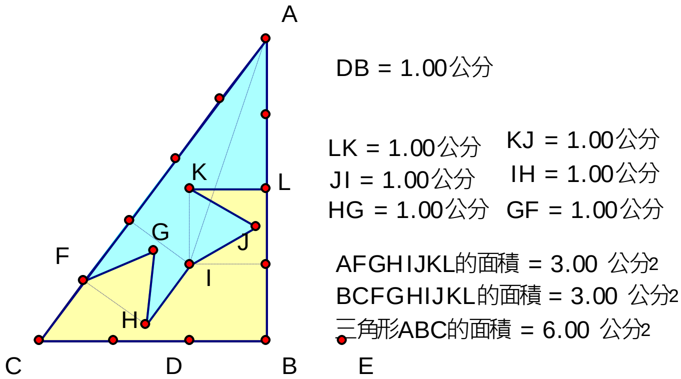


圖 9-1-b

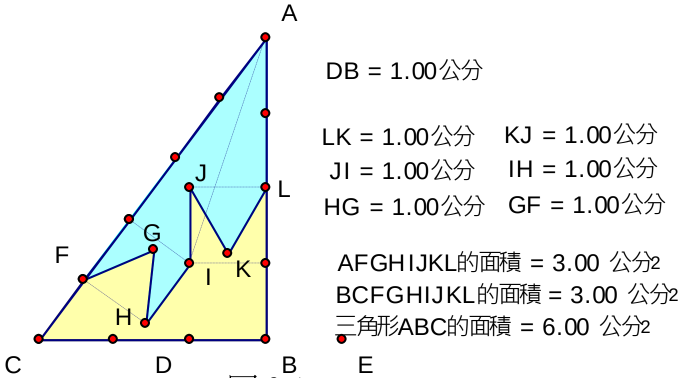


圖 9-1-c

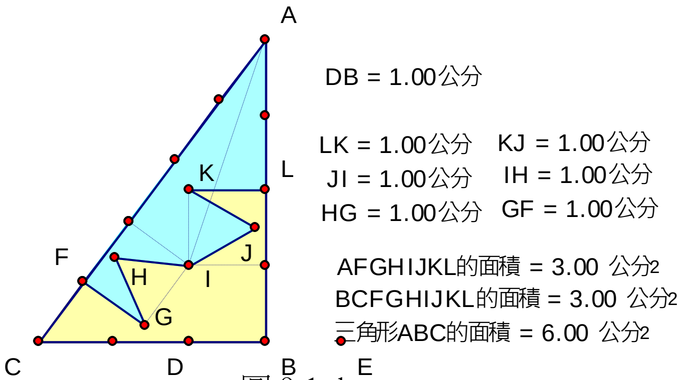


圖 9-1-d

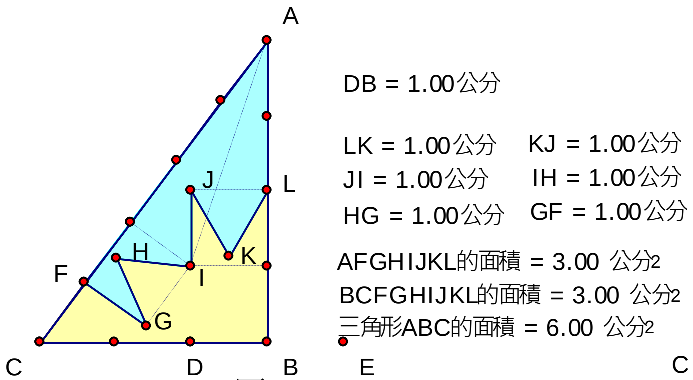


圖 9-1-e

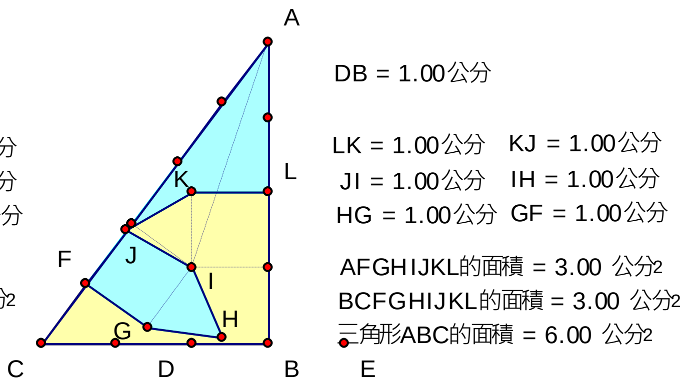


圖 9-1-f

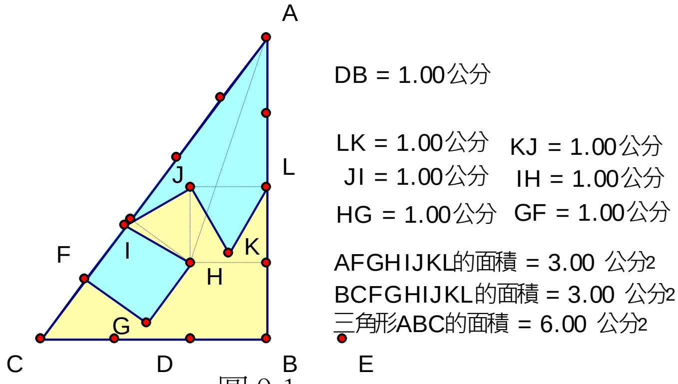


圖 9-1-g

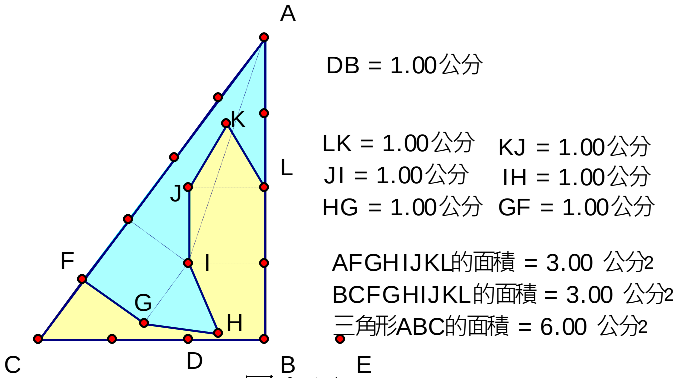


圖 9-1-h

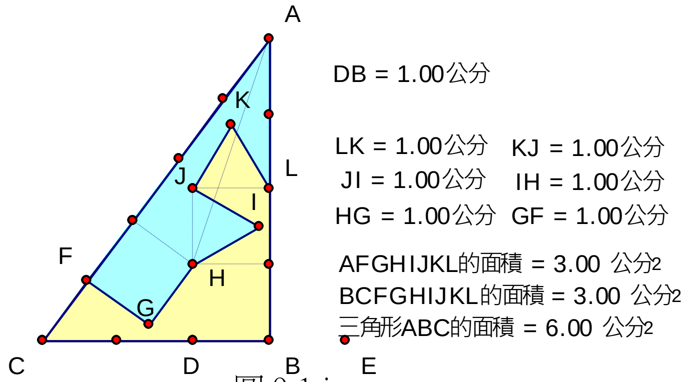


圖 9-1-i

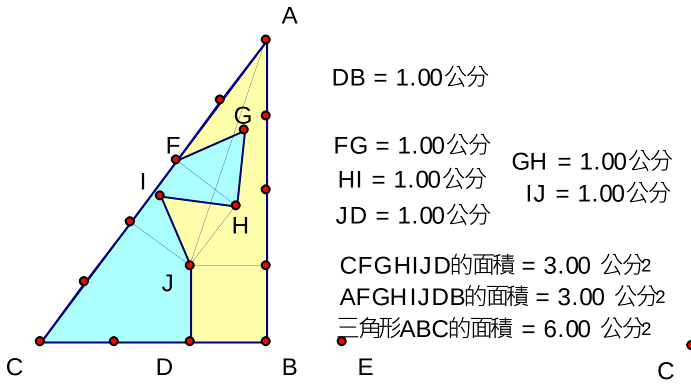


圖 9-2-a

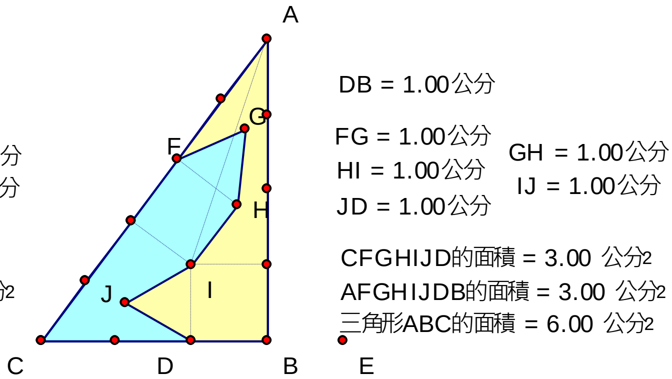


圖 9-2-b

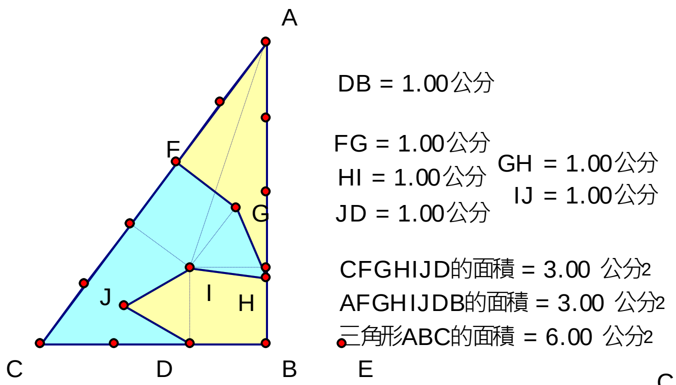


圖 9-2-c

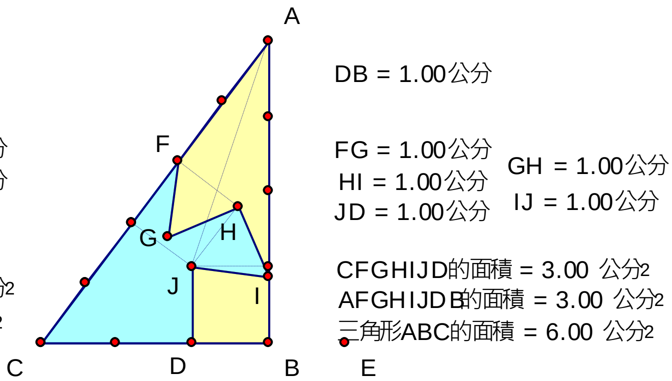


圖 9-2-d

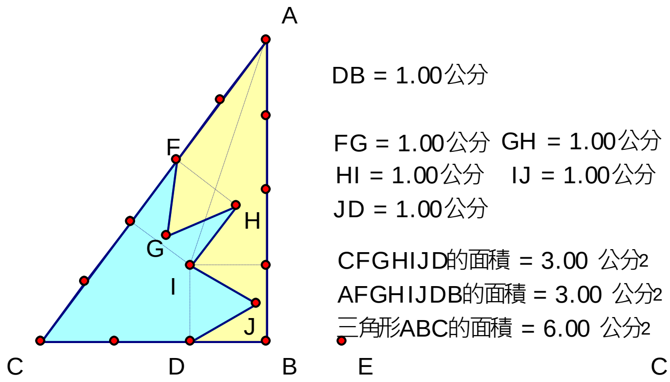


圖 9-2-e

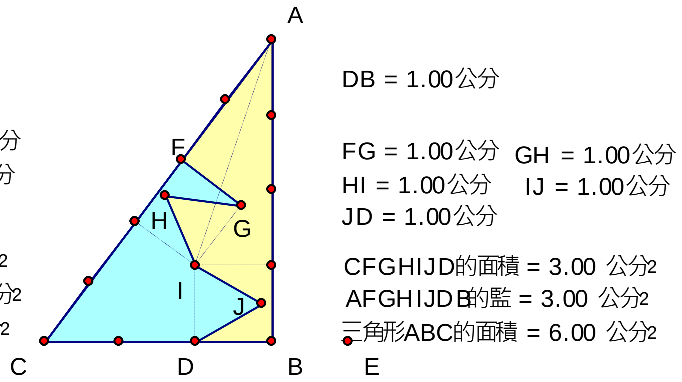


圖 9-2-f

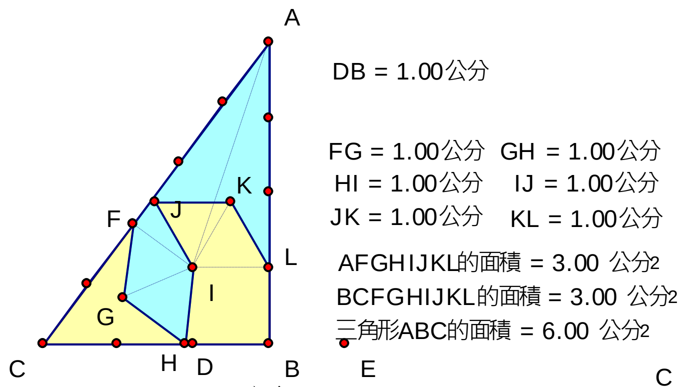


圖 9-3-a

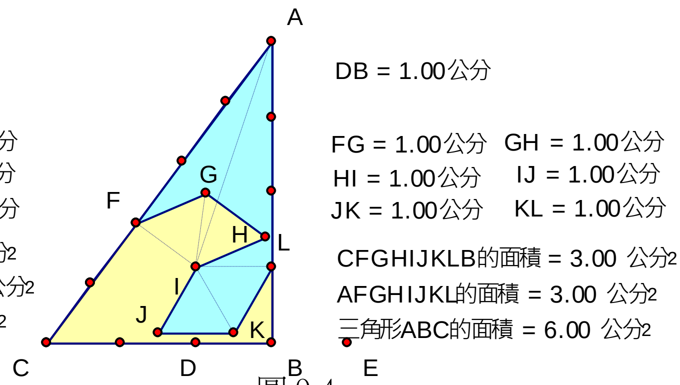


圖 9-4-a

1.第 8 頁圖 9 可知，我們需要 2 根火柴棒就能將 ΔABC 分割成兩等分。

2.(1)第 8、9 頁的圖 9-1 到 9-4 的 4 個圖形中，以圖 9 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形或正方形切補而成。

(2)第 9、10 頁的圖 9-1-a 到 9-1-i 的 9 個圖形中，以圖 9-1 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形切補而成。

(3)第 10、11 頁的圖 9-2-a 到 9-2-f 的 6 個圖形中，以圖 9-2 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形切補而成。

(4)上圖 9-3-a 中，以圖 9-3 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形切補而成。

(5)上圖 9-4-a 中，以圖 9-4 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形切補而成。

3.由圖 9 系列中可知，我們最少需要 2 根火柴棒、最多需要 6 根火柴棒就可將 ΔABC 平分成兩等分。

(二)作法:1.因為 $\angle B$ 直角，利用 $\angle B$ 的兩邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 上的點 J 點與 F 點作成 3 個正方形。

2.連接 $\overline{FG}$ 、 $\overline{GH}$ 、 $\overline{HI}$ 、 $\overline{IJ}$ ，所以需 4 根火柴棒就能將 ΔABC 平分成兩等分。

(如圖 10)

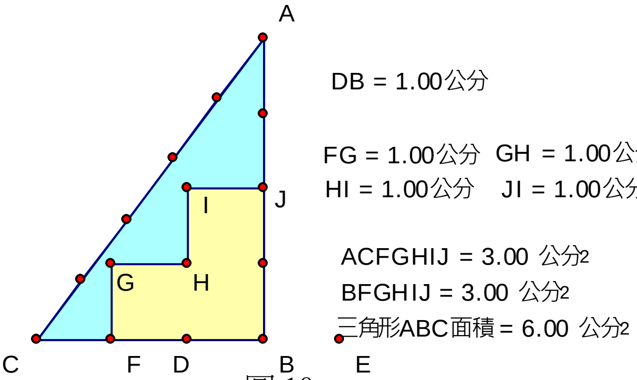


圖 10

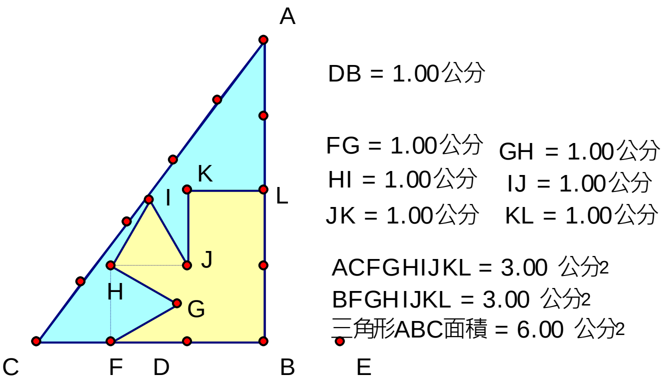


圖 10-1

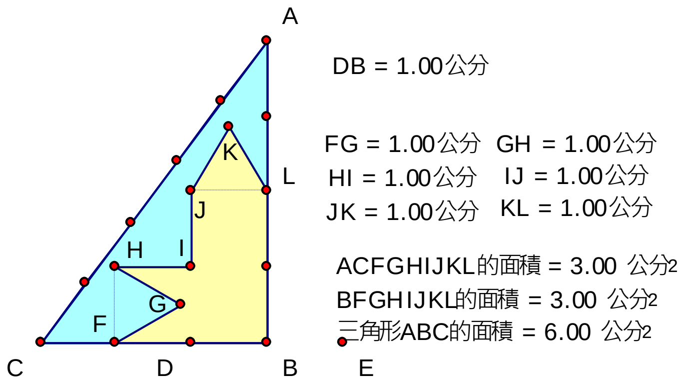


圖 10-2

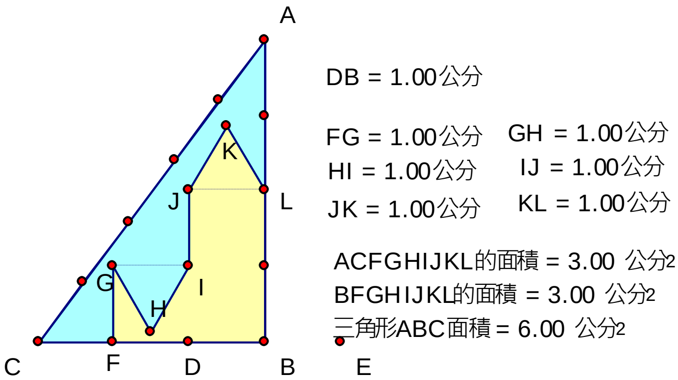


圖 10-3

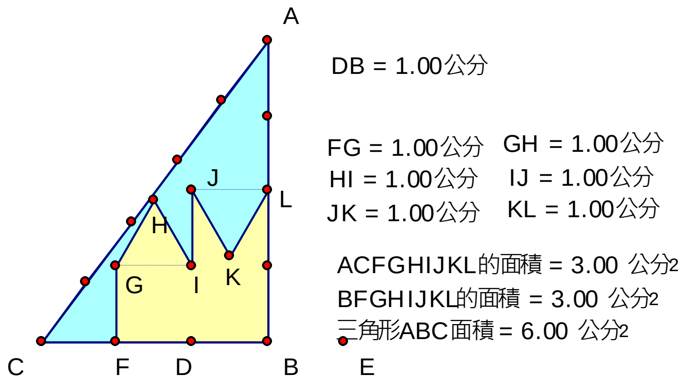


圖 10-4

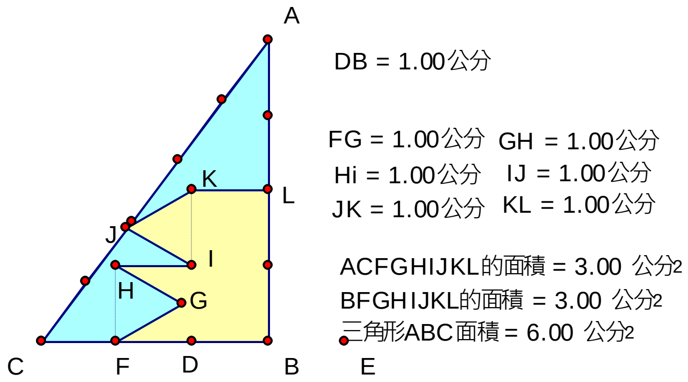


圖 10-5

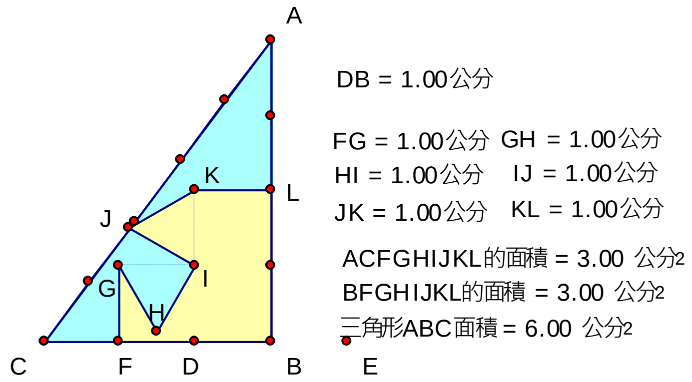


圖 10-6

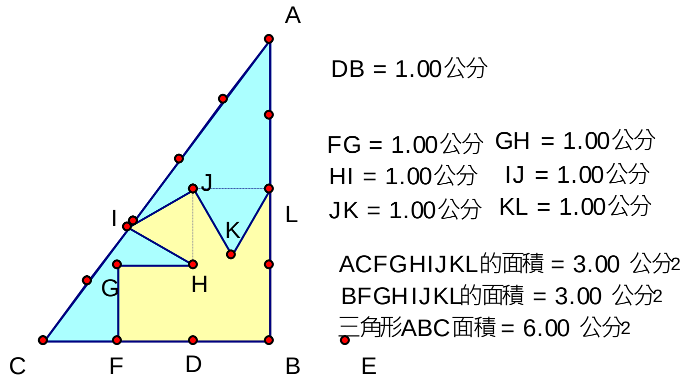


圖 10-7

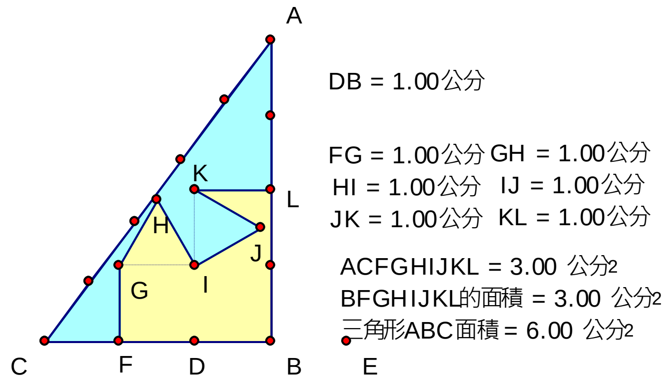


圖 10-8

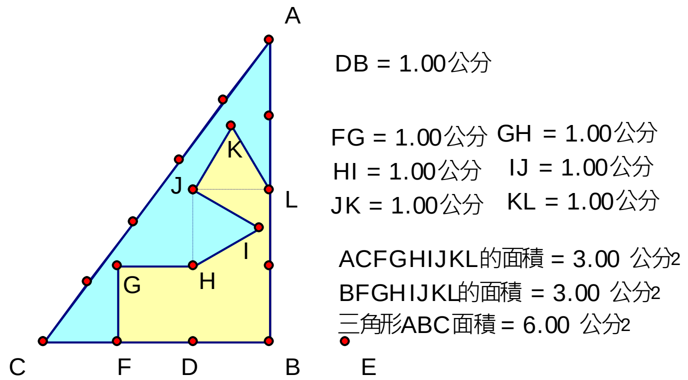


圖 10-9

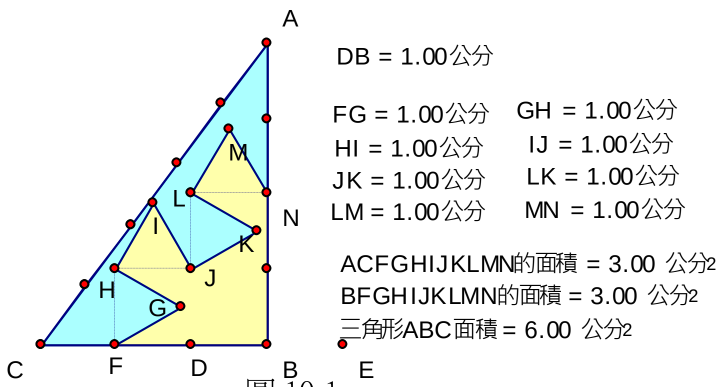


圖 10-1-a

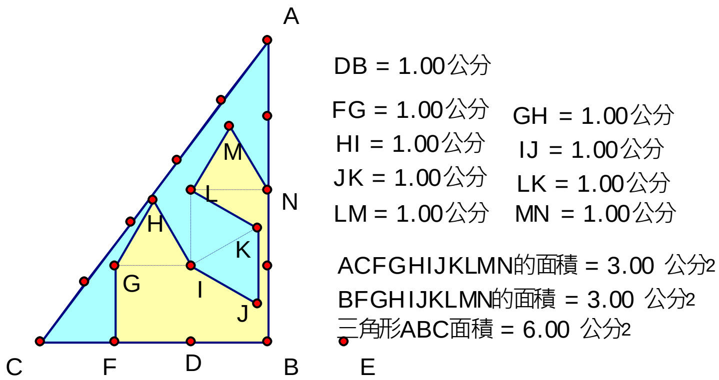


圖 10-1-a-a

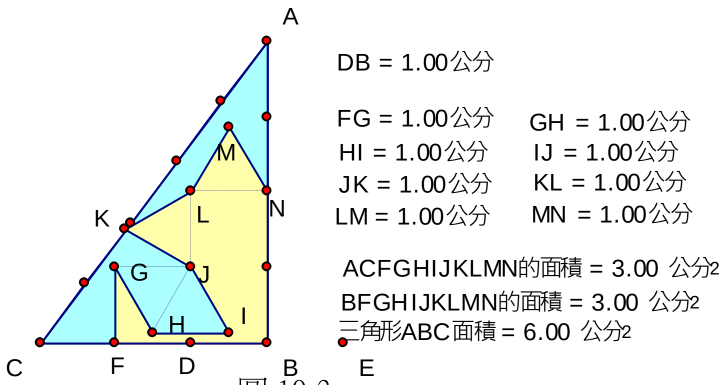


圖 10-3-a

1.第 12 頁圖 10 可知，我們需要 4 根火柴棒就能將 ΔABC 分割成兩等分。

2.(1)第 12、13 頁圖 10-1 到 10-9 的 9 個圖形中，是以圖 10 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形切補而成。

(2)第 13 頁圖 10-1-a 圖形中，以圖 10-1 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形切補而成。

而第 13 頁的圖 10-1-a-a 圖形中，以圖 10-1-a 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形<u>第二次切補而成</u>。

(3)上圖 10-3-a 圖形中，以圖 10-3 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形切補而成。

(4)第 12、13 頁圖 10-2 與 10-6 中，我們試著去做切補，結果新增的圖會與圖 10-1-a 及圖 10-3-a 重複；而第 13 頁圖 10-8 與 10-9 中，結果新增的圖會與圖 10-1-a 及圖 10-1-a-a 重複。

3、由圖 10 系列中可知，我們最少需要 4 根火柴棒、最多需要 8 根火柴棒就可以將 ΔABC 平分成兩等分。

PS.下頁圖 11，其實是利用圖 10 僅將三個正方形區域往左挪一下而已，此時我們必須<u>增加 2 根</u>火柴棒才能將 ΔABC 等分。(而增加的圖 11，回推到圖 10 系列又可以產生數個新的面積分割其中圖 10-5、10-6 等，有個點靠近 $\overline{AC}$ ，有些圖很難描繪)，即最少需要 6 根火柴棒、最多需要 10 根火柴棒。

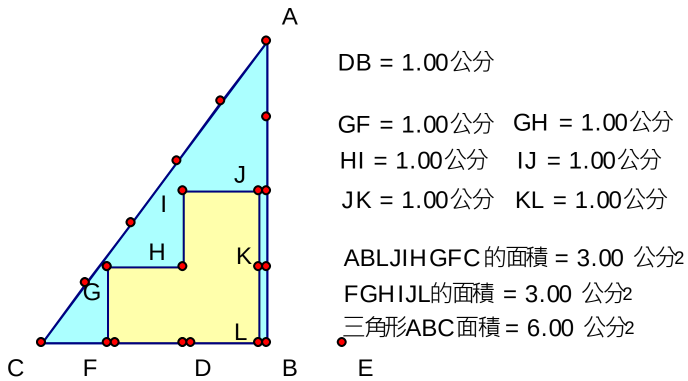


圖 11

(三)作法:1.連接 $\overline{CF}$ ，因為 $\overline{CB}=3$ ， $\angle B$ 為直角，則 $\Delta FBC=1.5$ 。

2.以 $\overline{CF}$ 為對稱軸將 ΔFBC 對稱至上方 ΔFGC ，則 $CBFG$ 的面積=3，所以需 4 根火柴棒就能將 ΔABC 平分成兩等分。

(如圖 12)

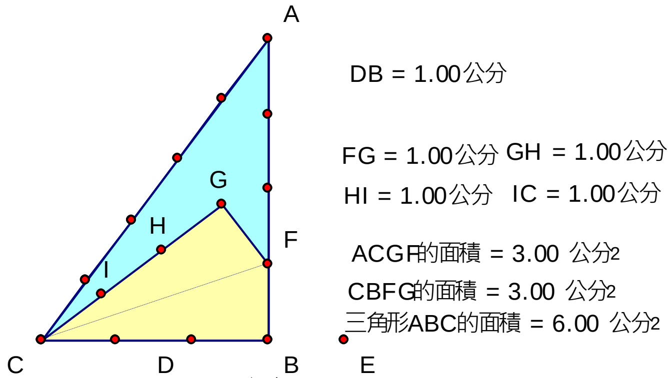


圖 12

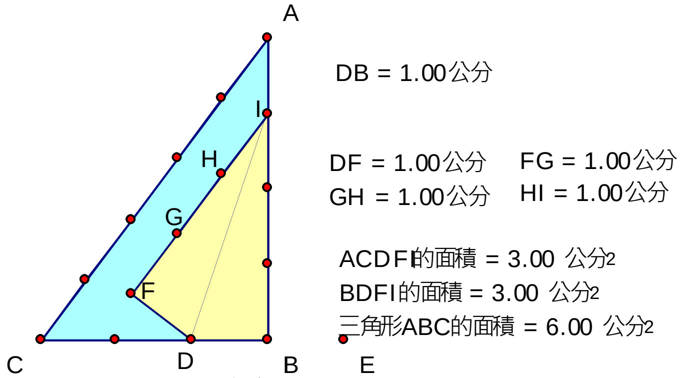


圖 13

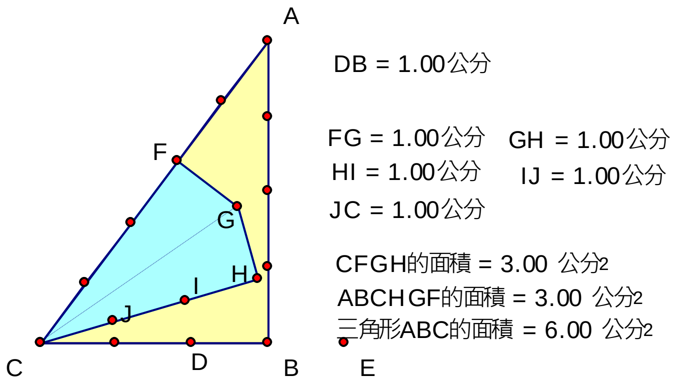


圖 14

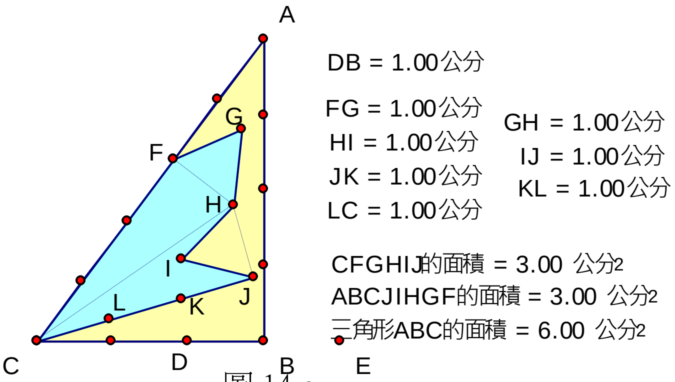


圖 14-a

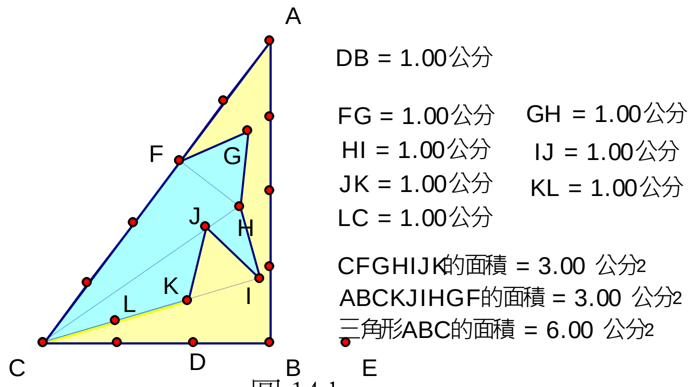


圖 14-b

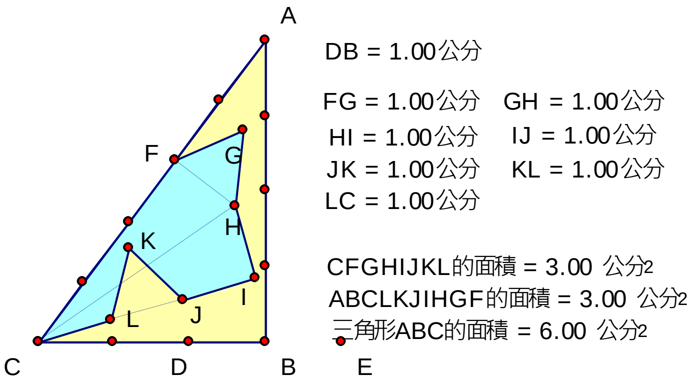


圖 14-c

1.第 15 頁圖 12 可知，我們需要 4 根火柴棒就能將 ΔABC 分割成兩等分。

2.(1) 第 15 頁圖 13、14 中，其實是以圖 12 為基礎，利用三角形其他邊作線對稱產生的區域，而區域面積剛好為 ΔABC 面積的一半。

(2)上面圖 14-a、14-b、14-c 中，其實是以圖 14 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，利用正三角形切補而成。

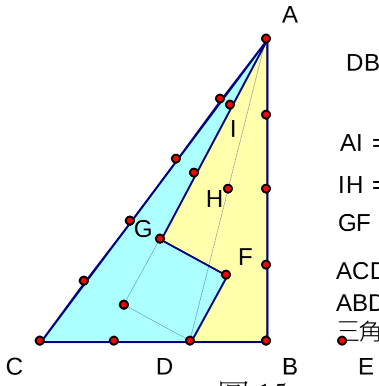
3.由圖 12 到圖 14-c 中可知，我們最少需要 4 根火柴棒、最多需要 7 根火柴棒就可以將 ΔABC 平分成兩等分。

(四)作法:1.連接 $\overline{AD}$，因為 $\overline{AB}=4$， $\angle B$ 為直角，則 $\Delta ABD=2$ 。

2.以 $\overline{AD}$ 為對稱軸將 ΔABD 對稱至左方 ΔAJD ，則 $ABDJ$ 的面積=4。

3.再利用 $ABDJ$ 內部圍成正方形 $GJDF$ ， $GJDF=1$，而剩下的區域面積= ABD 面積-正方形 $GJDF$ =3，所以需 5 根火柴棒就能將 ΔABC 平分成兩等分。

(如下頁圖 15)



DB = 1.00公分

AI = 1.00公分

IH = 1.00公分　GH = 1.00公分

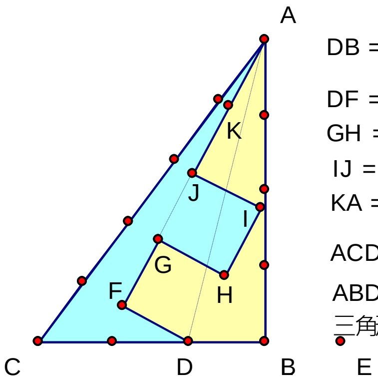
GF = 1.00公分　FD = 1.00公分

ACDFG的面積 = 3.00 公分^2

ABDFG的面積 = 3.00 公分^2

三角形ABC的面積 = 6.00 公分^2

圖 15



DB = 1.00公分

DF = 1.00公分　FG = 1.00公分

GH = 1.00公分　HI = 1.00公分

IJ = 1.00公分　JK = 1.00公分

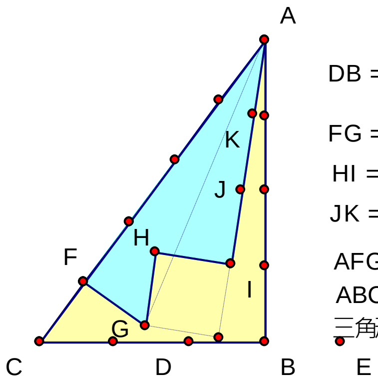
KA = 1.00公分

ACDFGHIJ的面積 = 3.00 公分^2

ABDFGHIJ的面積 = 3.00 公分^2

三角形ABC的面積 = 6.00 公分^2

圖 15-1



DB = 1.00公分

FG = 1.00公分　GH = 1.00公分

HI = 1.00公分　IJ = 1.00公分

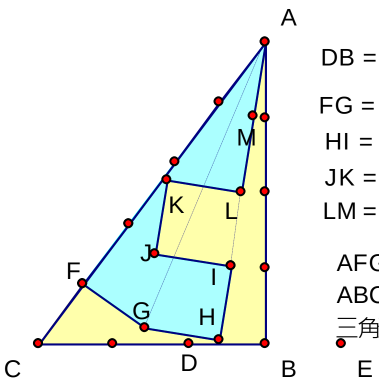
JK = 1.00公分　KA = 1.00公分

AFGHI的面積 = 3.00 公分^2

ABCFGHI的面積 = 3.00 公分^2

三角形ABC的面積 = 6.00 公分^2

圖 15-2



DB = 1.00公分

FG = 1.00公分　GH = 1.00公分

HI = 1.00公分　IJ = 1.00公分

JK = 1.00公分　KL = 1.00公分

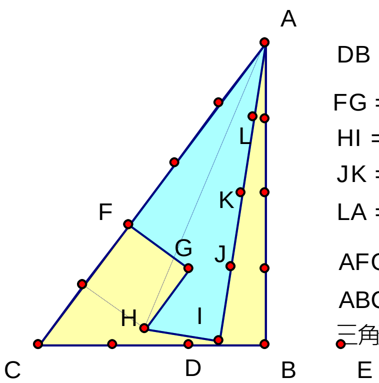
LM = 1.00公分　MA = 1.00公分

AFGHIJKL的面積 = 3.00 公分^2

ABCFGHIJKL的面積 = 3.00 公分^2

三角形ABC的面積 = 6.00 公分^2

圖 15-3



DB = 1.00公分

FG = 1.00公分　GH = 1.00公分

HI = 1.00公分　IJ = 1.00公分

JK = 1.00公分　KL = 1.00公分

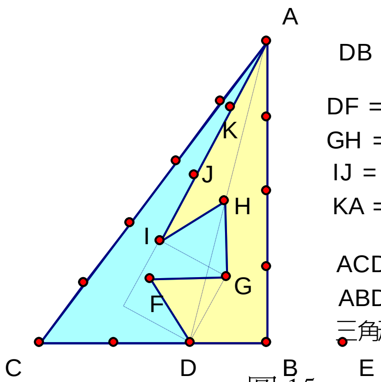
LA = 1.00公分

AFGHI的面積 = 3.00 公分^2

ABCFGHI的面積 = 3.00 公分^2

三角形ABC的面積 = 6.00 公分^2

圖 15-4



DB = 1.00公分

DF = 1.00公分　FG = 1.00公分

GH = 1.00公分　HI = 1.00公分

IJ = 1.00公分　JK = 1.00公分

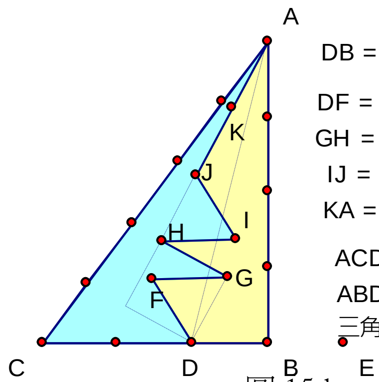
KA = 1.00公分

ACDFGHI的面積 = 3.00 公分^2

ABDFGHI的面積 = 3.00 公分^2

三角形ABC的面積 = 6.00 公分^2

圖 15-a



DB = 1.00公分

DF = 1.00公分　FG = 1.00公分

GH = 1.00公分　HI = 1.00公分

IJ = 1.00公分　JK = 1.00公分

KA = 1.00公分

ACDFGHIJ的面積 = 3.00 公分^2

ABDFGHIJ的面積 = 3.00 公分^2

三角形ABC的面積 = 6.00 公分^2

圖 15-b

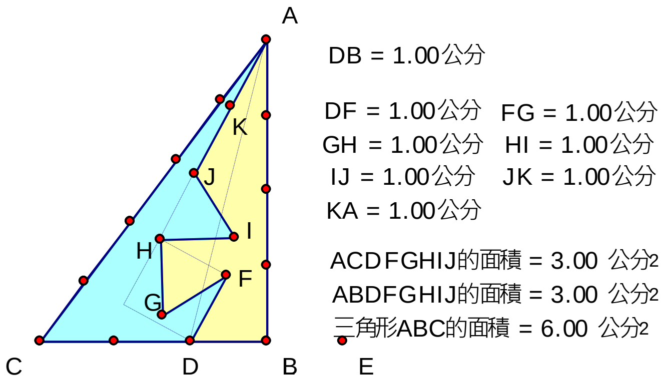


圖 15-c

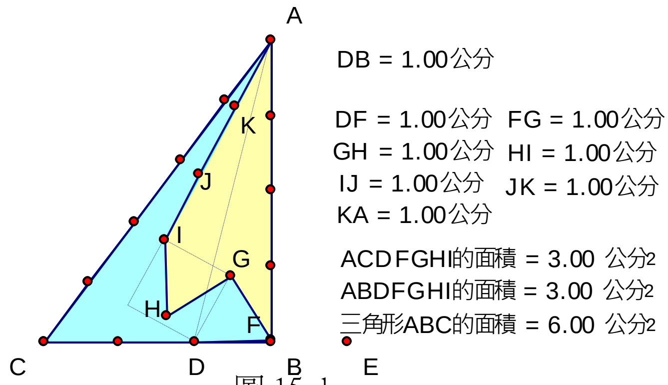


圖 15-d

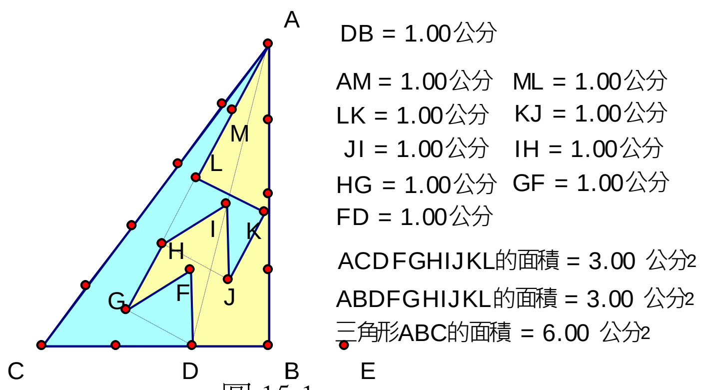


圖 15-1-a

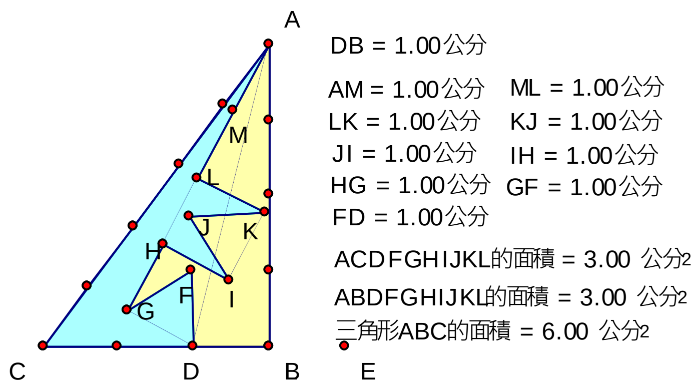


圖 15-1-b

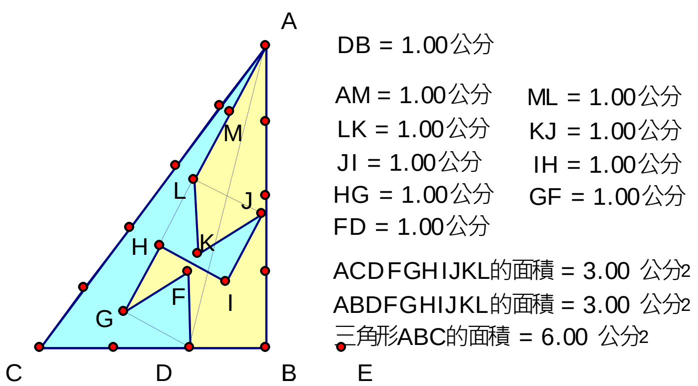


圖 15−1−c

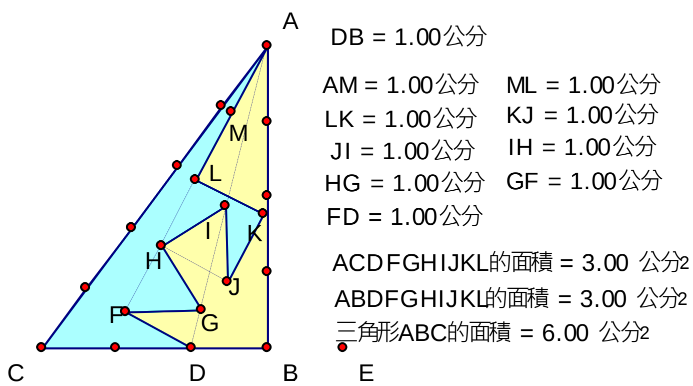


圖 15−1−d

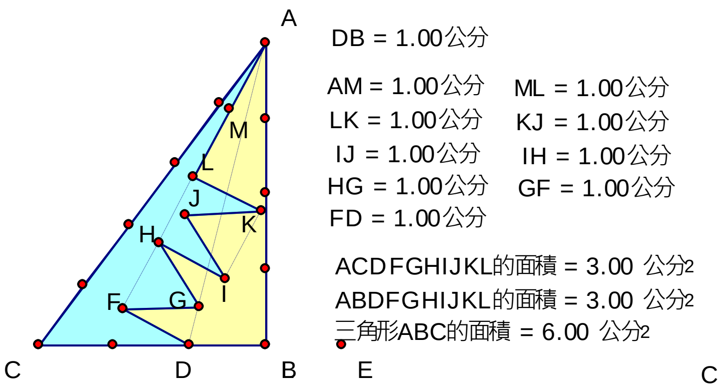


圖 15-1-e

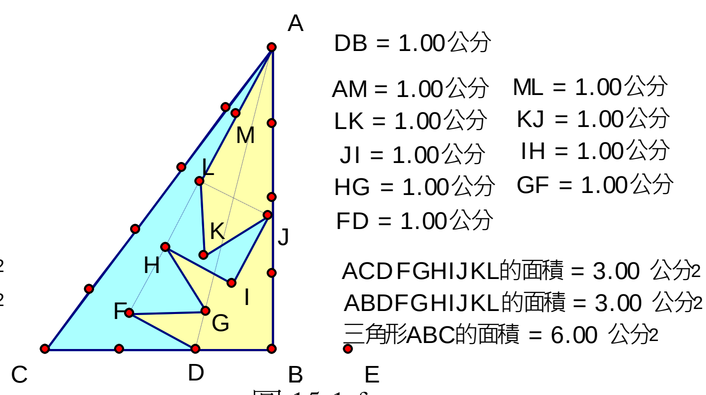


圖 15-1-f

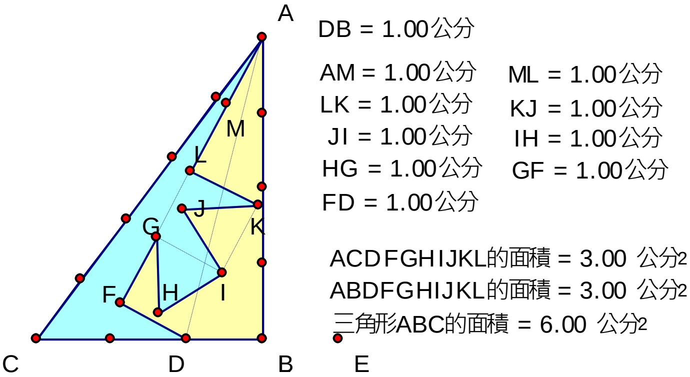


圖 15-1-g

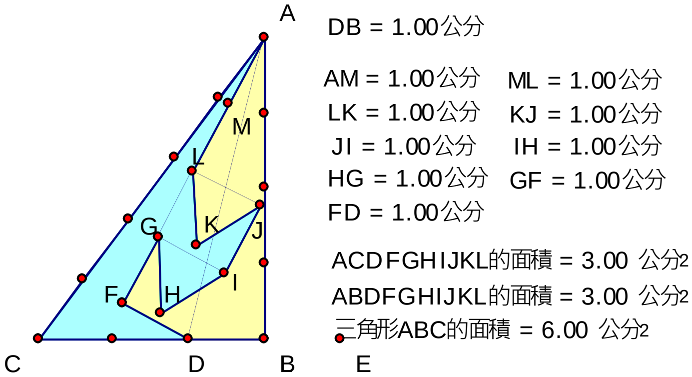


圖 15-1-h

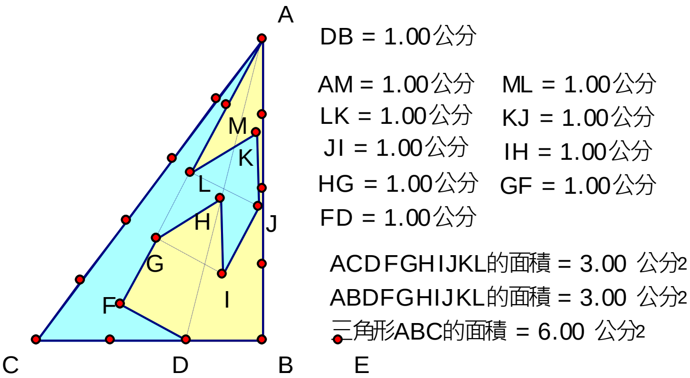


圖 15-1-i

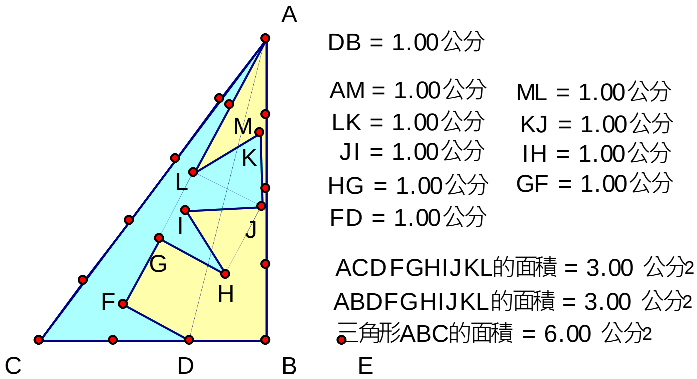


圖 15-1-j

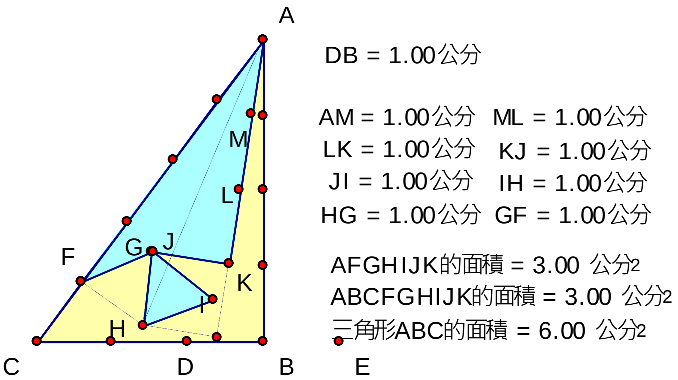


圖 15-2-a

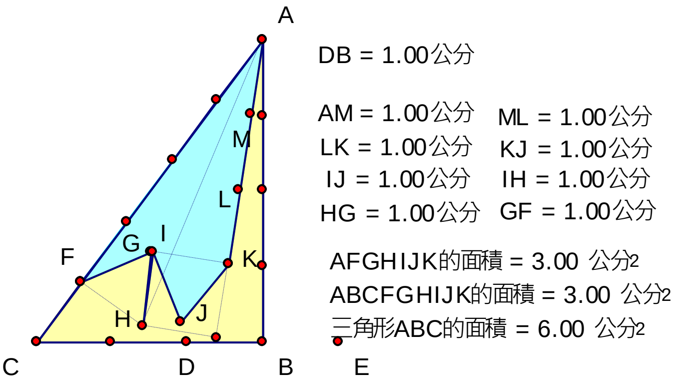


圖 15-2-b

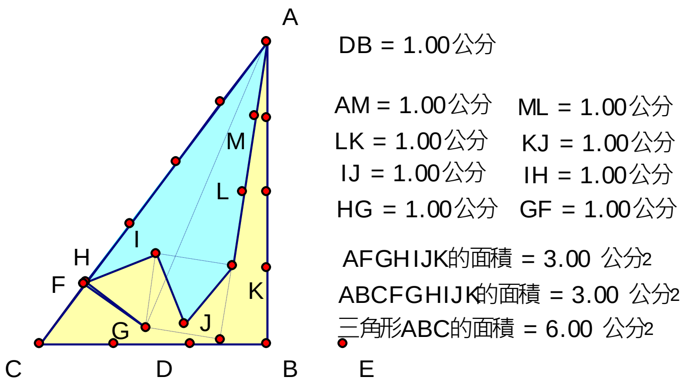


圖 15-2-c

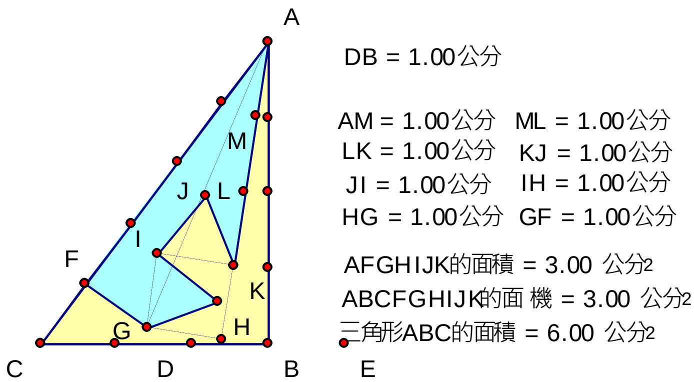


圖 15-2-d

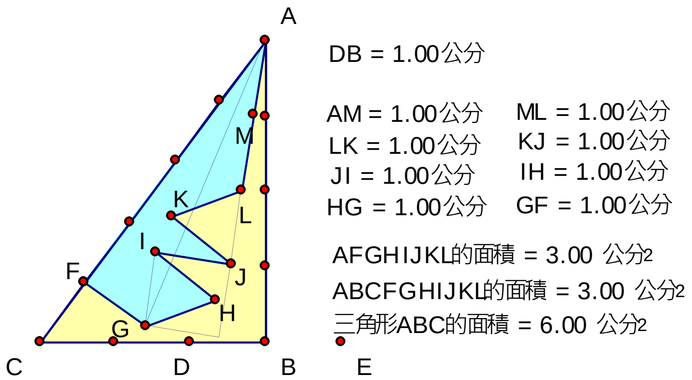


圖 15-2-e

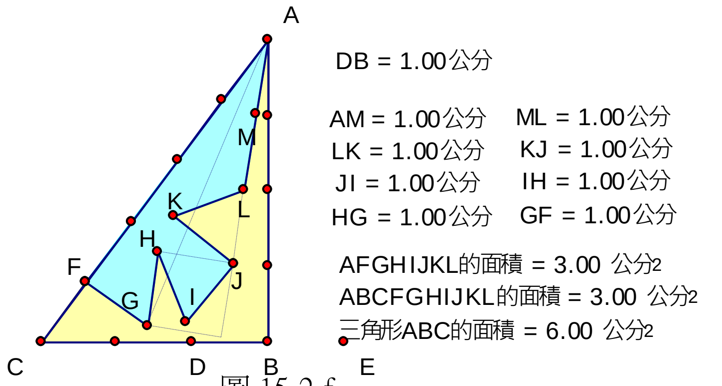


圖 15-2-f

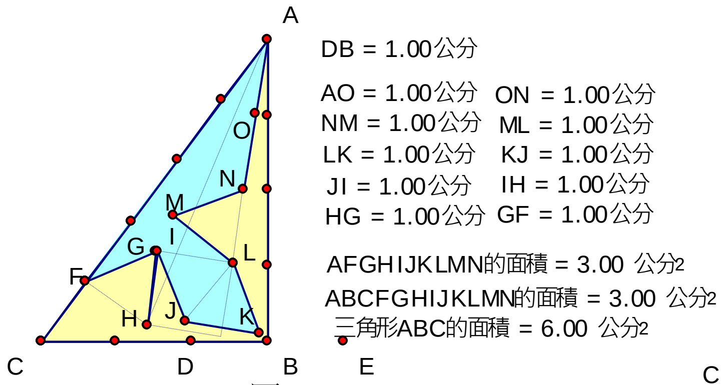


圖 15-b-a

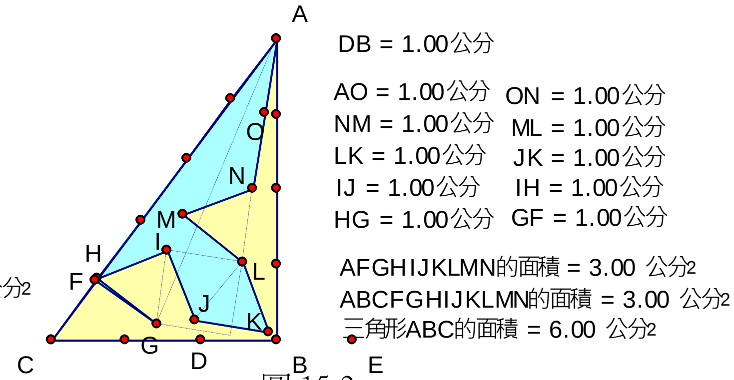


圖 15-2-c-a

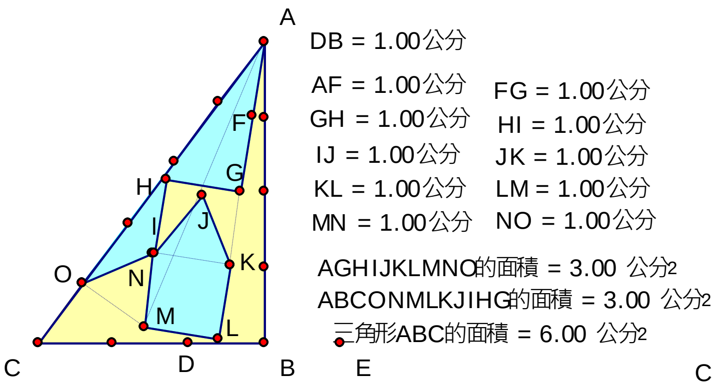


圖 15-3-a

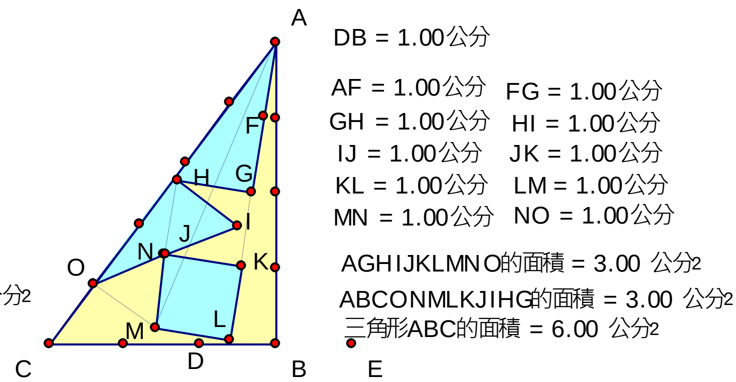


圖 15-3-b

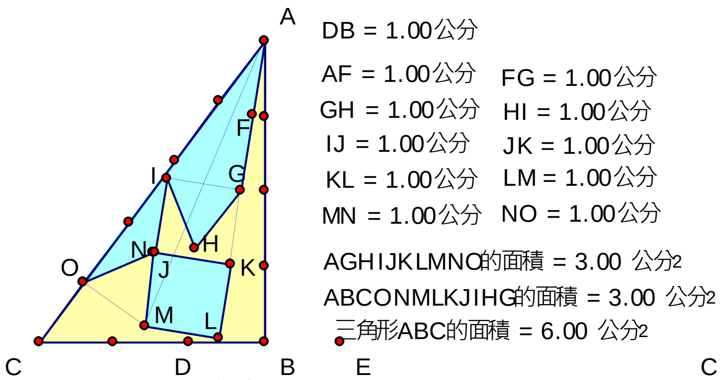


圖 15-3-c

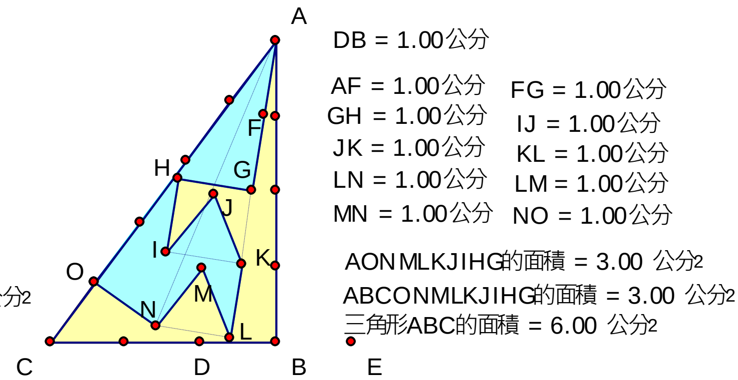


圖 15-3-d

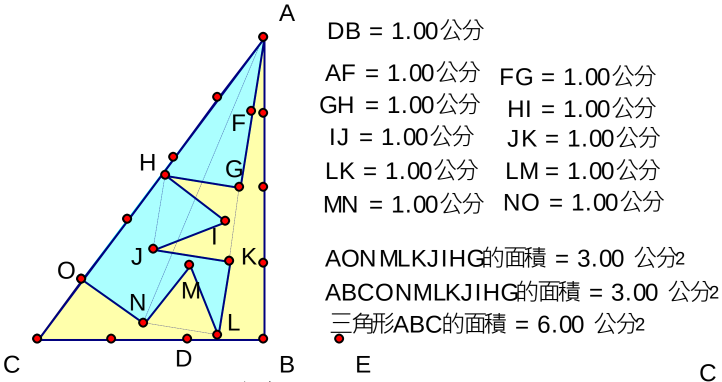


圖 15-3-e

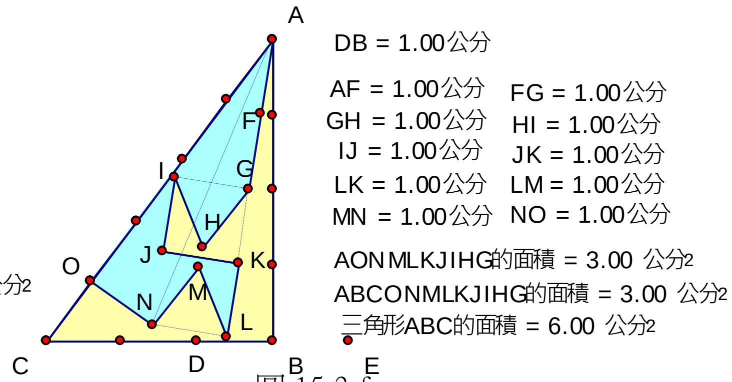


圖 15-3-f

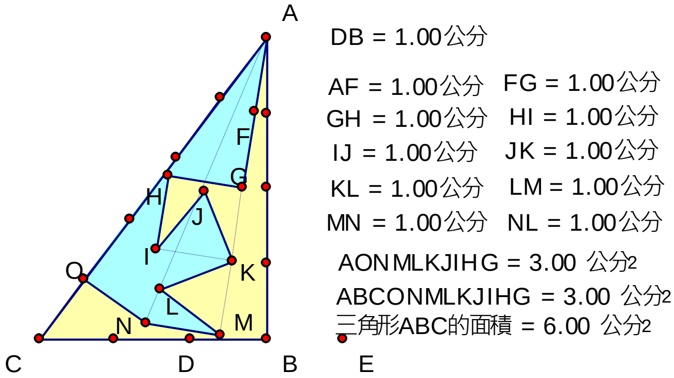


圖 15-3-g

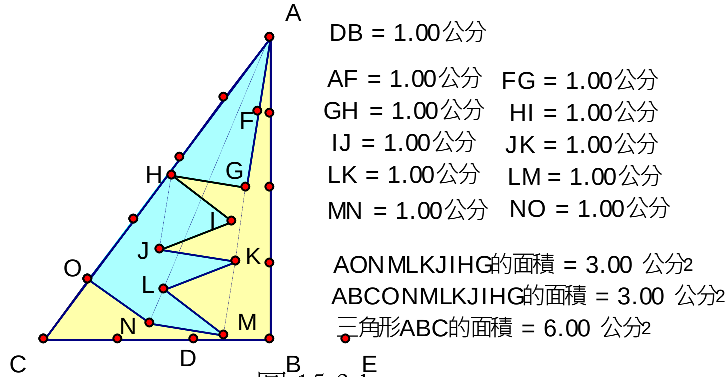


圖 15-3-h

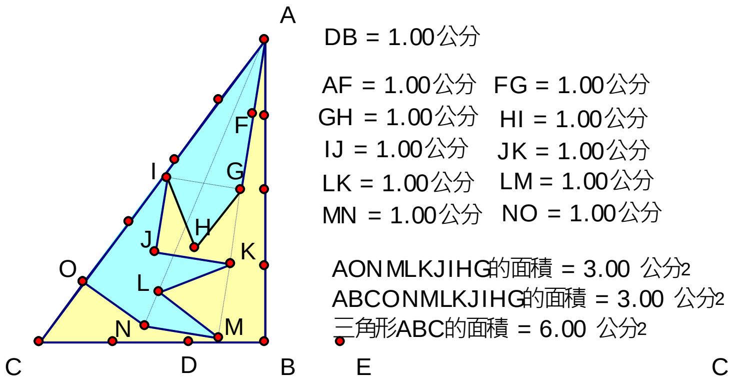


圖 15-3-i

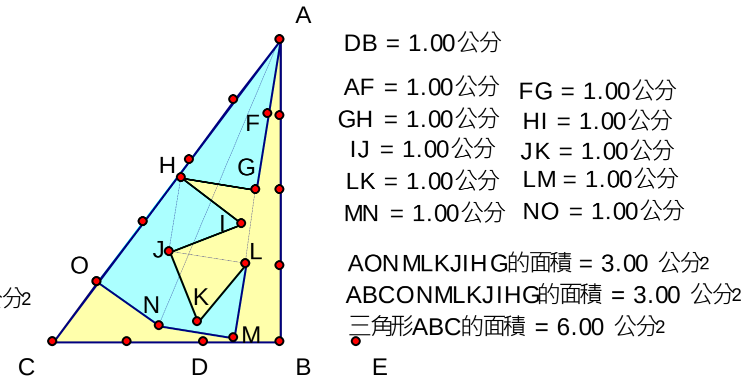


圖 15-3-j

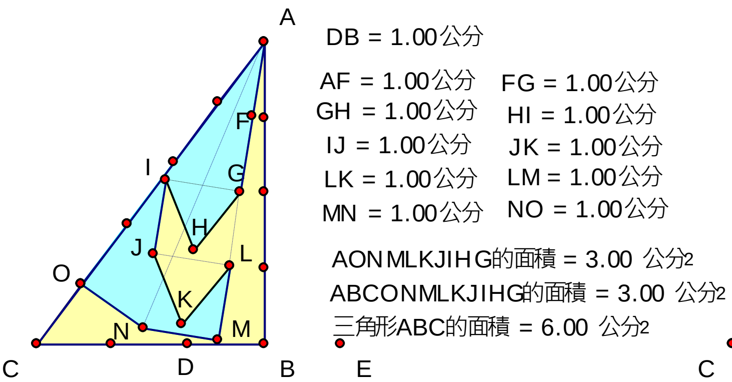


圖 15-3-k

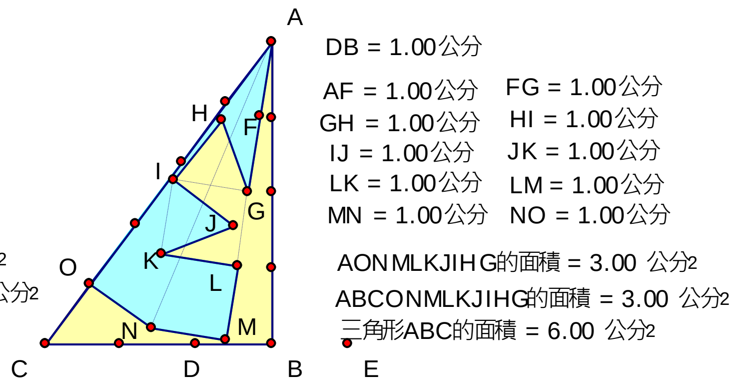


圖 15-3-l

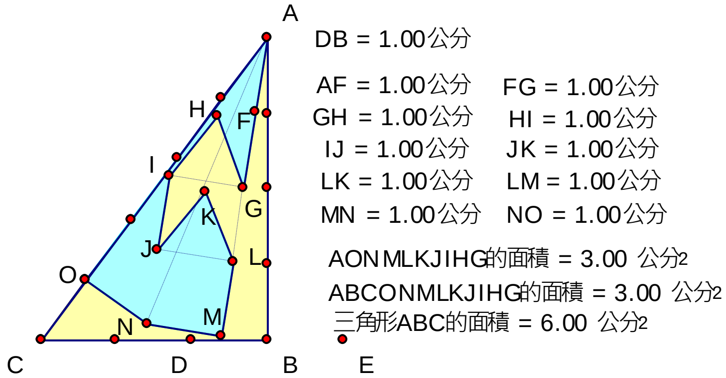


圖 15-3-m

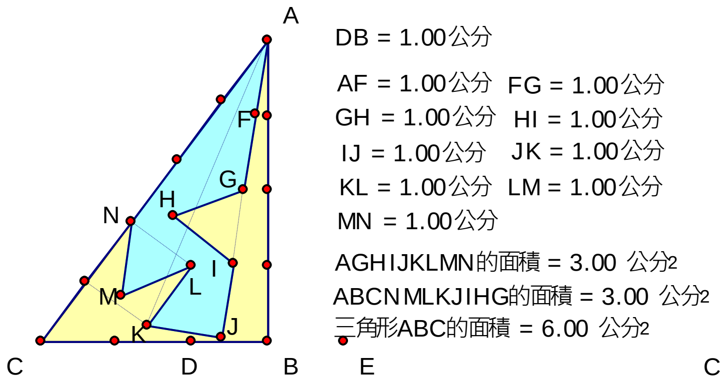


圖 15-4-a

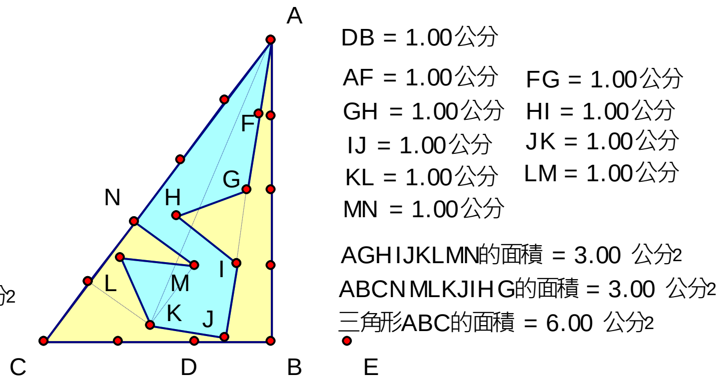


圖 15-4-b

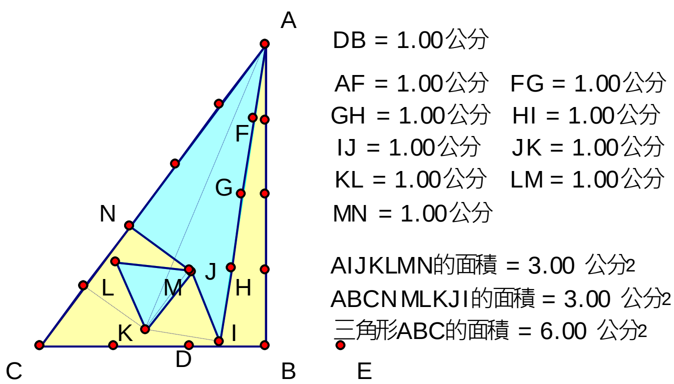


圖 15-4-c

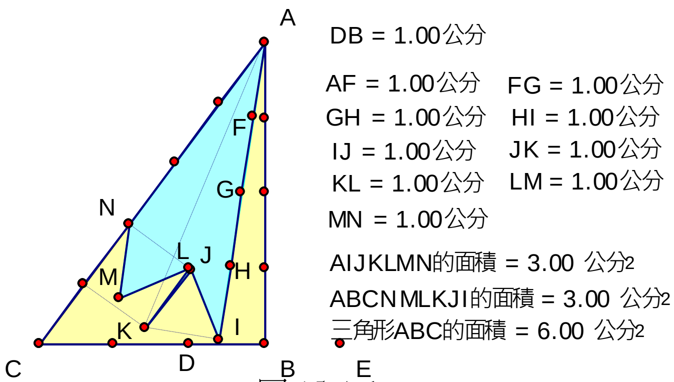


圖 15-4-d

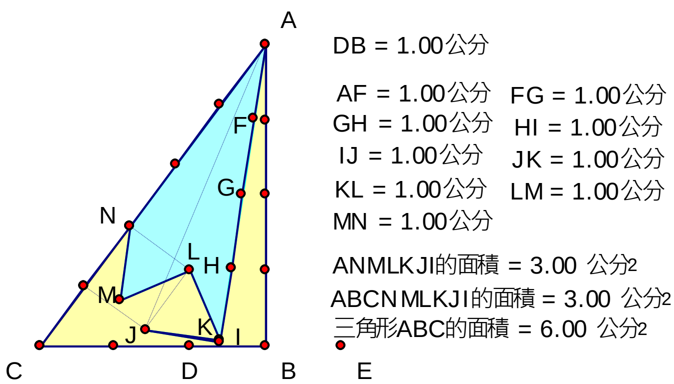


圖 15-4-e

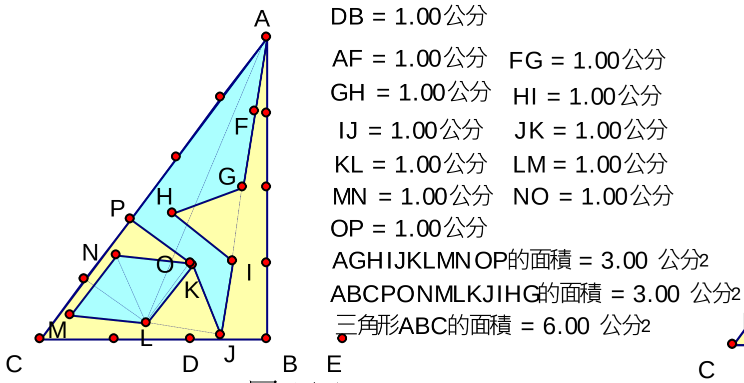


圖 15-4-c-a

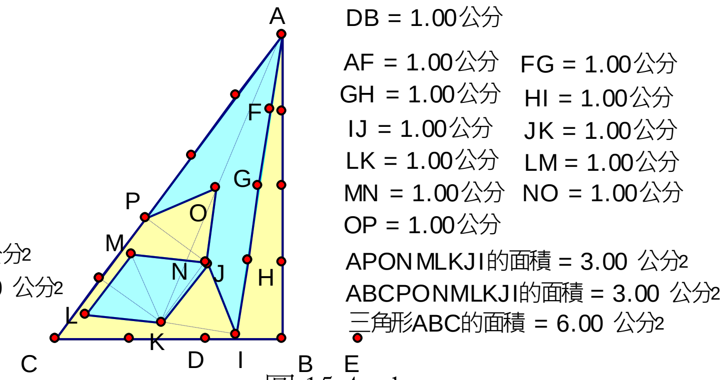


圖 15-4-c-b

1.第 17 頁圖 15 可知，我們需要 5 根火柴棒就能將 ΔABC 分割成兩等分。

2.(1)第 17 頁圖 15-1、15-2、15-3、15-4 中，其實是以圖 15 為基礎，利用對稱軸將三角形作線對稱產生的區域，再利用區域內圍成一個正方形面積，利用切補方式讓剩下面積為 ΔABC 面積的一半。

(2)第 17、18 頁圖 15-a、15-b、15-c、15-d 中的 4 個圖形中，其實是以圖 15 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形切補而成。

(3)第 18、19 頁的圖 15-1-a 到 15-1-j 的 10 個圖形中，是以圖 15-1 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形切補而成。

(4)第 19、20 頁的圖 15-2-a 到 15-2-f 的 6 個圖形中，是以圖 15-2 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形切補而成。

而圖 15-2-b-a 及 15-2-c-a 是以圖 15-2-b 及 15-2-c 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形<u>第二次切補而成</u>。

(5)第 20、21、22 頁的圖 15-3-a 到 15-3-m 的 13 個圖形中，是以圖 15-3 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形切補而成。

(6)第 22 頁的圖 15-4-a 到 15-4-e 的 5 個圖形中，是以圖 15-4 為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形切補而成。

而上圖 15-4-c-a 及 15-4-c-b 是以圖 15-4-c 及為基礎，利用 GSP 軟體在兩等分的區域裡，加上正三角形<u>第二次切補而成</u>。

3.由圖 15 系列圖中可知，我們最少需要 5 根火柴棒、最多需要 11 根火柴棒就可以將 ΔABC 平分成兩等分。

陸、研究結果

一、火柴棒若成一直線，將ΔABC兩等分:

(一)以$\angle A$為圍成的三角形其中一個角時，

(1) $\overline{AC}$ 、$\overline{AB}$取一點 P、Q，$\overline{AP}=\sqrt{10}$、$\overline{AQ}=\sqrt{10}$，$\overline{PQ}=2$，即可以擺放 2 根火柴棒。

(2) $\overline{AC}$ 、$\overline{AB}$取一點 P、Q，$\overline{AP}=2\sqrt{5}$、$\overline{AQ}=\sqrt{5}$，$\overline{PQ}=3$，即可以擺放 3 根火柴棒。

(二)以$\angle B$為圍成的三角形其中一個角時，

(1) $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$取一點 P、Q，$\overline{BP}=\sqrt{7}+1$、$\overline{BQ}=\sqrt{7}-1$，$\overline{PQ}=4$，即可以擺放 4 根火柴棒。

(三)以$\angle C$為圍成的三角形其中一個角時，

(1) $\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$取一點 P、Q，$\overline{CP}=\dfrac{\sqrt{33}+\sqrt{3}}{2}$ 、$\overline{CQ}=\dfrac{\sqrt{33}-\sqrt{3}}{2}$ ，$\overline{PQ}=3$，即可以擺放 3 根火柴棒。

(2) $\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$取一點 P、Q，$\overline{CP}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ 、$\overline{CQ}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ，$\overline{PQ}=4$ ，即可以擺放 4 根火柴棒。

二.火柴棒不成一直線，將ΔABC兩等分:

(一)以圖 9 為例，作一連串的切補時，我們最少需要 2 根火柴棒、最多需要 6 根火柴棒(2、3、4、5、6 根)就可將ΔABC兩等分。

(二)以圖 10、11 為例，作一連串的切補時，我們最少需要 4 根火柴棒、最多需要 10 根火柴棒(圖 10 為 4、6、8 根，圖 11 為 6、8、10 根)就可將ΔABC兩等分。

(三)以圖 12、13、14 為例，作一連串的切補時，我們最少需要 4 根火柴棒、最多需要 7 根火柴棒(4、5、7 根)就可將ΔABC兩等分。

(四)以圖 15 為例，作一連串的切補時，我們最少需要 5 根火柴棒、最多需要 11 根火柴棒(5、6、7、8、9、10、11 根)就可將ΔABC兩等分。

柒、討論

1、(1)我們使用火柴棒來分割面積時，遇到一些困惱，感覺可以將三角形面積切割兩等分時，由於<u>火柴棒的大小可能不一</u>，有些誤差；感覺能切割，如第 8 頁圖 8，$\overline{HI}$ 與 $\overline{HG}$ 交點在三角形外部，此時利用 GSP 繪圖軟體幫助，加以確定火柴棒是否有超出三角形內部。

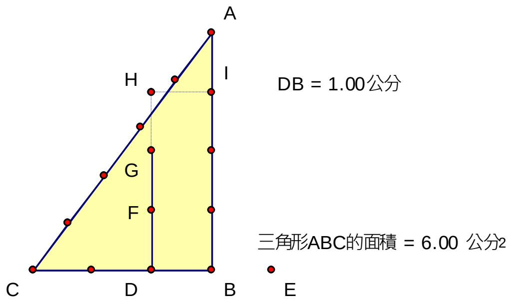


圖 8

(2)如第 13 頁圖 10-5、10-6 利用火柴棒拼湊時，感覺火柴棒已經超出三角形內部，但是利用 GSP 繪圖軟體描繪圖形交點 J 仍在三角形內部。

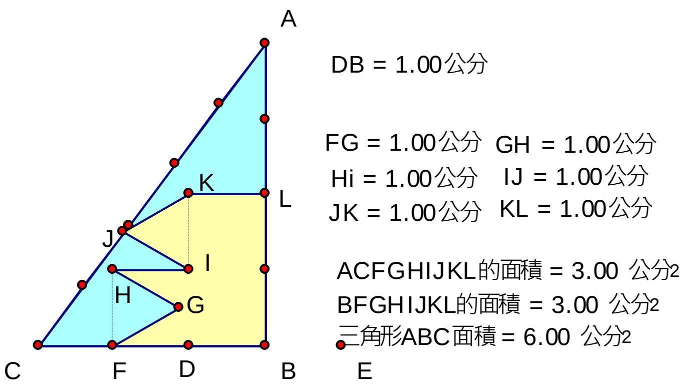


圖 10-5

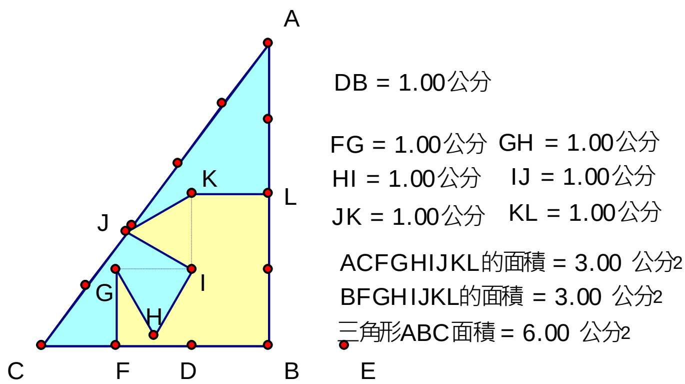


圖 10-6

2、(1)我們簡單利用代數來解決 P、Q 的位置(距離各角的長度為無理數)，但若無 GSP 繪圖軟體幫助直接用火柴棒拼湊，則<u>無法進行面積等分</u>。

(2)我們利用線對稱及面積切補，分成 4 個部分討論並利用 GSP 軟體描繪圖形找出最多(少)根火柴棒將三角形面積分割成兩等分。

(3)若三角形內可做一組正方形切補，正常可以增加 4 根火柴棒，但如第 10 頁圖 9-1、9-2 增加的位置為三角形邊上，則分別增加 2、1 根；而做一組正三角形切補，則可增加 2 根火柴棒。

(4)如附圖(第 27 頁)中筆者有找出利用 12 根火柴棒進一步將 ΔABC 兩等分，我們利用一連串正方形及正三角形切補，加上自己的猜想把筆者的圖利用 GSP 將其畫出(如圖 16) 。

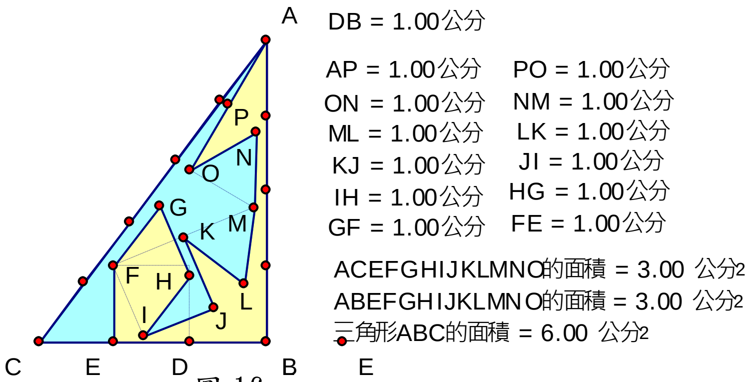


圖 16

(5)此研究僅用面積切補及線對稱方式加上 GSP 軟體來解決面積等分問題，應該還有其他方法來解決此種問題。

捌、結論

1.(1)火柴棒若成一直線時，我們可以擺 2、3、4 根火柴棒將三角形兩等分。

(2)火柴棒不成一直線時，我們可以擺 2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12 根火柴棒將三角形兩等分。

2.我們最少需要 2 根火柴棒、最多需要 12 根火柴棒就可將三角形兩等分。

玖、參考資料

康軒版國中數學第三冊、第四冊

中學生報第 177 期第 7 版 (如附圖-第 27 頁)

昌爸 ASP 討論版

數學任意門　課本對應單元：八年級【垂直、平分與線對稱圖形】

切補＋對稱 解出火柴棒趣題

文．圖／蕭偉智、陳彩鳳

1957 年，數學家柴田直光在日本某科學雜誌的專欄提出了一道有趣問題：「先用十二根火柴棒排成一個直角三角形後，再使用數根（整數根）火柴棒把此直角三角形面積兩等分，其中火柴棒不可以超出直角三角形邊界，過程中也不能使用任何直尺和圓規。」這個問題該怎麼解？如果你是八年級以上的學生，可以利用「簡單對稱」和「切補圖形」的策略來解題呵！現在就讓我們一起來動動腦吧！

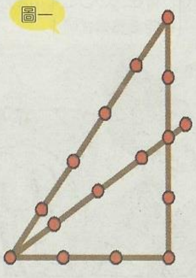
■先找出直角三角形

首先，利用十二根火柴棒排成一個直角三角形，轉換成數學語言就是「有一個直角三角形，兩股與斜邊都是整數，且周長為 12 單位長」。我們直觀可以猜到它是邊長分別為 3、4、5 的直角三角形，但必須確認這是唯一的直角三角形。不妨假設直角三角形的兩股及斜邊長分別為 x、y、(12-x-y)，依據勾股定理得到 $x^2+y^2=(12-x-y)^2$。算式展開後為 $xy-12x-12y+72=0$，再進行因式分解得到 $(x-12)(y-12)=72$，因為 x 與 y 為小於 12 的正整數，因此 72 只能分成 $(-8)\times(-9)$，最後有 $(x,y)=(3,4)$ 或 $(x,y)=(4,3)$。換句話說，邊長為 3、4、5 的直角三角形的確是唯一符合條件的直角三角形呵！

■打破思維動手試試

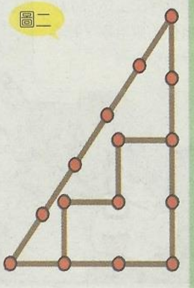
傳統的平分三角形面積的方法是利用中線平分，但是下圖圖一可看出中線長度並非整數，所以不符合條件。重新看看原始問題，題目並沒有限定火柴棒要排成直線，換句話說，我們可以打破既有思維，考慮「折線」（如圖二）。由於直角三角形面積為 6，可考慮用火柴棒圍出面積為 3 的圖形，於是利用三個邊長為 1 的正方形，找出一組成功的例子。

圖一



▲中線平分直角三角形。

圖二



▲成功平分面積例子。

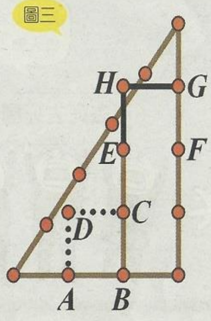
■一切一補得出答案

能否在圖二的基礎上，再找出一些新的答案呢？我們再次確認能夠使用的工具有哪些？只有火柴棒！火柴棒能夠製造哪些多邊形呢？答案是正方形與正三角形，這是解題的輔助元素。

圖二利用正方形解題，可試試在圖二切出正方形 ABCD，並將它填補為正方形 EFGH，結果發現 H 點位於直角三角形外部，不符合條件（圖三）。

我們再考慮利用「正三角形」，同樣使用切補法而得出圖四的答案。由於切補正三角形的位置不同，可以延伸出許多答案，你可以繼續試試看呵！

圖三



▲正方形切補。

圖四

▲成功平分面積例子。

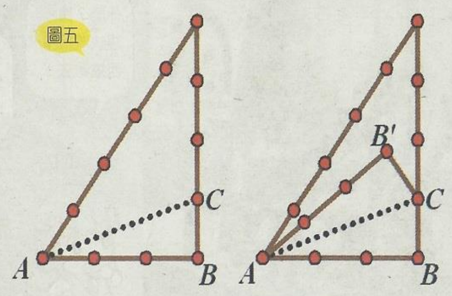
■巧妙使用「線對稱」

在圖四之後，似乎陷入僵局。於是我們「換條路徑」，前述的例子是先做出一個面積為 3 的多邊形。如果先做出面積為 1.5 的多邊形，再變成兩倍呢？如圖五，利用原本直角三角形，先作出面積為 1.5 的直角△ABC，然後以線段 $\overline{AC}$ 為對稱軸，將直角△ABC 進行鏡射變換（摺紙方式），得出面積為 3 的四邊形 ABCB'。因此，我們又得到一個新的面積平分折線。

圖六也是一個成功的例子，式子如下：

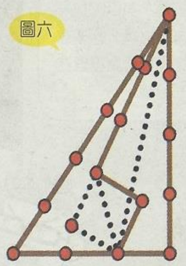
「$(1\times4\div2)\times2-(1\times1\div2)\times2=3$」(可簡寫為 $1\times4-1\times1=3$)，其中的作圖順序請你想想。

圖五



▲線對稱圖形策略。

圖六



▲另一種線對稱圖形。

挑戰金頭腦

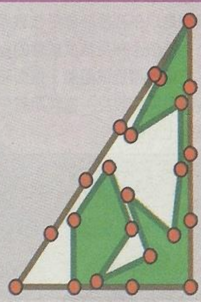
在前面解題過程中，我們弄清問題的條件、擬定兩種策略（切補多邊形、線對稱），並且實踐解題，當然這兩種策略的相互結合將會激盪出更多答案。接下來，我們要提出四個問題，請你繼續深究：

（1）如何有系統的分類歸納答案？

（2）如何以數學方式確認火柴棒是否超出直角三角形邊界？

（3）是否還有其他解題策略呢？

（4）最多能使用多少根火柴棒？最少為幾根呢？目前已知最少為兩根，最多則沒有答案，右圖是筆者以十二根火柴棒平分面積的圖形，歡迎你挑戰更多根火柴棒呵！



▲十二根火柴棒平分面積。