

屏東縣第 60 屆國中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：**數學科**

組 別：**國小組**

作品名稱：**蛋糕切得新鮮又均等**

關 鍵 詞：**扇形面積、圓心角、弓形、對稱軸**

編號：

題目：蛋糕切得新鮮又均等

摘要：

在一篇科學雜誌的報導，利用數學公式來切蛋糕，大刀一劃，圓形蛋糕分成三等份，接下來再把蛋糕合起來換個方向，再用同樣方式切蛋糕，這不只是個完美切蛋糕方式，更能保新鮮；但是與我們所認知傳統切蛋糕一塊塊呈扇形的方式不同。新的切法雖然可保鮮但如何均等，引起我們研究的興趣。從推算過程中結合傳統切成扇形的蛋糕，最後歸納通用公式。從生活中學習數學，生動有趣。

壹、研究動機：

從小到大，在生日派對上最激動的就是分蛋糕環節了，傳統切蛋糕方式就是圍繞蛋糕圓心切一個個扇形均勻分給每個人，這是我們最熟悉的蛋糕切法。但是英國數學作家貝洛斯說：「這是最壞的方法。」因為切過的表面積暴露在空氣中，一夜過後會發乾影響口味，若將剩下部份放進冰箱，裸露的切面兩側會變得異常乾硬。最佳方案是用兩隻刀子同時從蛋糕正中間切塊，寬度可自行控制，但兩刀必須保持中央水平，切完後再把左右兩半往中間靠攏鎖住蛋糕鮮味。

我們好奇：新的切法雖然能鎖住美味與新鮮，但每次切完再密合，一次一次縮小的蛋糕，如何均分給較多的人吃呢？如能結合傳統扇形的切法，又可依照需切割的等分正確預測長條狀的寬度，如此將蛋糕切得新鮮又均等。這切割步驟是否暗藏玄機，我們覺得很有趣？想揭開其中奧秘，就找幾位志同道合的夥伴，展開以下一連串的研究。

貳、研究目的：

- (一) 揭開傳統切蛋糕方式與新的切割方式的異同，歸納數學的原理。
- (二) 利用「扇形面積」概念，歸納圓形蛋糕切割均等的原理。
- (三) 利用上述原理，推算蛋糕新的切割方式，歸納可切得新鮮又均等共通原理。
- (四) 從生活科技中來學習數學，利用系統化方法來找尋規律性，培養解題能力與細心整理、分析資料的能力。

參、研究設備器材：

剪刀、彩色筆、計算機、圓規、量角器、膠水、紀錄紙、小白板、A4 影印紙等。

肆、研究問題：

根據上述的研究目的，我們將研究問題列為以下三大項：



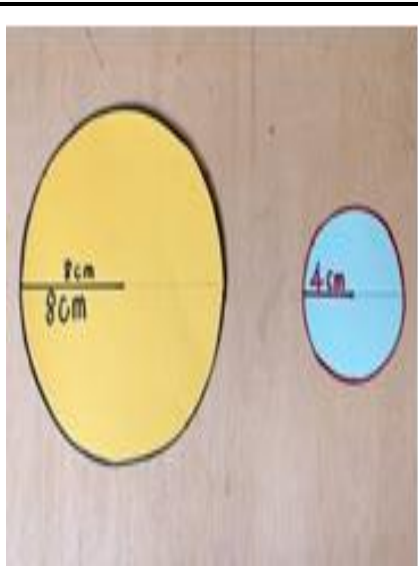
- 〈一〉實際操作，傳統切蛋糕的方式，歸納數學的原理。
- 〈二〉依新的切割方式能維持蛋糕新鮮風味，實際操作，歸納數學的原理
- 〈三〉探討利用「扇形面積」概念，歸納推算能維持蛋糕新鮮風味又能均等的數學原理。
- 〈四〉分析其他等份均分的扇形面積是否可正確運用新的切割方式，並歸納共通的原理。

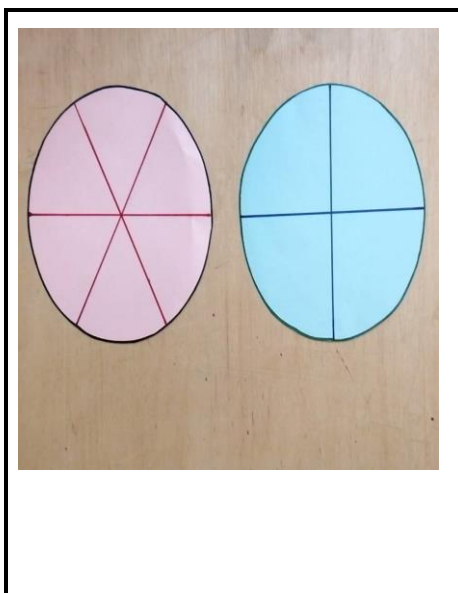
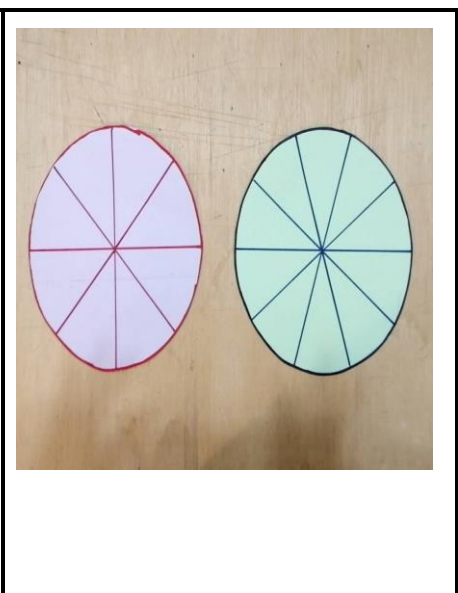
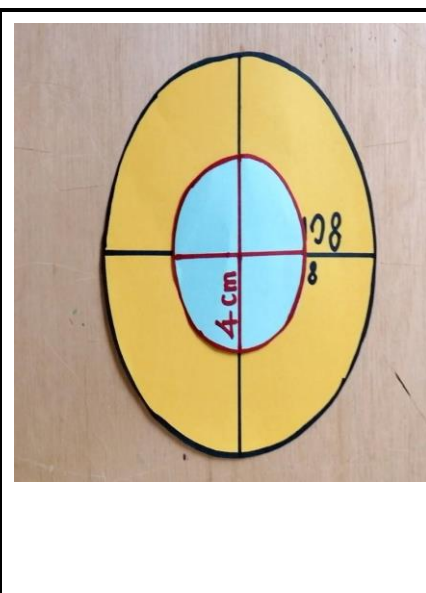
伍、研究過程或方式：

研究（一）實際操作，傳統切蛋糕的方式，歸納數學的原理。

說明 1：一般市面上的蛋糕都是圓形，有尺寸不同是依半徑的大小而有差異（如圖 1）；最經典的切蛋糕方式就是圍繞蛋糕圓心切一個個扇形均分給每個人，這是我們最熟悉的蛋糕切法（如圖 2）。

做法：準備數張紙板，切割成 2 種半徑（分別為 4cm 及 8cm）不同的圓形，依 2、4、6、8、10 等份均分（如圖 3、4、5、6），依以下步驟推算，如下表〈1〉

		
<p>圖〈1〉傳統圓形蛋糕，依半徑大小有尺寸不同</p>	<p>圖〈2〉傳統切蛋糕方式就是圍繞蛋糕圓心切一個個扇形</p>	<p>圖〈3〉切割成 2 種半徑（分別為 4cm 及 8cm）不同的圓形進行比較</p>

		
<p>圖〈4〉4等份及6等份的均分切割</p>	<p>圖〈5〉8等份及10等份的均分切割</p>	<p>圖〈6〉半徑不同的圓，其弧長依半徑比例而呈倍數增加；而均分後的弧長也依圓心角比例而呈等份縮減</p>

均分等份	2	4	6	8	10
半徑 4cm 〈弧形長度〉	$4\pi \text{ cm}$	$2\pi \text{ cm}$	$4/3\pi \text{ cm}$	$1\pi \text{ cm}$	$4/5\pi \text{ cm}$
半徑 8cm 〈弧形長度〉	$8\pi \text{ cm}$	$4\pi \text{ cm}$	$8/3\pi \text{ cm}$	$2\pi \text{ cm}$	$8/5\pi \text{ cm}$
圓心角	180度 〈1/2圓〉	90度 〈1/4圓〉	60度 〈1/6圓〉	45度 〈1/8圓〉	36度 〈1/10圓〉
半徑 4cm 〈扇形面積〉	$8\pi \text{ cm}^2$	$4\pi \text{ cm}^2$	$8/3\pi \text{ cm}^2$	$2\pi \text{ cm}^2$	$8/5\pi \text{ cm}^2$
半徑 8cm 〈扇形面積〉	$32\pi \text{ cm}^2$	$16\pi \text{ cm}^2$	$32/3\pi \text{ cm}^2$	$8\pi \text{ cm}^2$	$32/5\pi \text{ cm}^2$
異同處	1、半徑不同的圓，其弧長依半徑比例而呈倍數增加；而均分後的弧長也依圓心角比例而呈等份縮減。 2、半徑不同的圓，其扇形面積依半徑比例而呈倍數平方增加；而均分後的扇形面積也依圓心角比例而呈等份縮減。				

表〈1〉註：1、圓周率 $\pi = 3.14159\dots$ 。2、弧長=圓周長/等份

發現：1、半徑不同的圓形蛋糕，差異在其弧長依半徑比例而呈倍數增加；而均分後的弧長也依圓心角比例而呈等份縮減；而扇形面積也依半徑比例而呈倍數平方增加；而均分後的扇形面積也依圓心角比例而呈等份縮減。

2、圓依照等份均分都會通過圓心，不同等分是依圓心角的切割比例來推算。

3、依照不同等分均分，所切割的形狀都是扇形，差異在弧形所涵括的範圍〈面積〉。

探究：根據文獻報導，上述這種切法是適合多人吃生日蛋糕時的方法，如果是一個人或較少人吃蛋糕時，這種方法就不適合了。因為這會讓切過的表面積暴露在空氣當中，一夜過後就會發乾，影響口味。尤其是將剩下的部分放到冰箱後，裸露的切面兩側會變得異常乾硬。

思考：我們回想吃蛋糕的經驗，確實隔夜的蛋糕口感較不佳，因此我們決定改變傳統切蛋糕的方式，依照科學雜誌論述採用新的切割方式，是否隱藏著數學的原理，就此展開以下的研究。

研究（二）依新的切割方式能維持蛋糕新鮮風味，實際操作，歸納數學的原理。

做法：1、從蛋糕中央切割出兩條平行線，取出切割好的蛋糕長條狀分成合適大小食用，然後將剩下的兩邊蛋糕密合〈如圖 7、8〉。

2、如需再切，將蛋糕轉 90 度（新切割線與蛋糕原切割線垂直），以做法 1 的方法將蛋糕切分食用〈如圖 9〉。

3、將剩下的四塊蛋糕密合（又成為一個小一些的蛋糕），這樣蛋糕依然能夠合攏，鎖住美味與新鮮〈如圖 10、11〉。

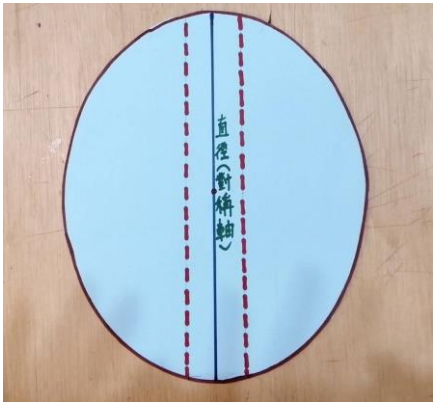
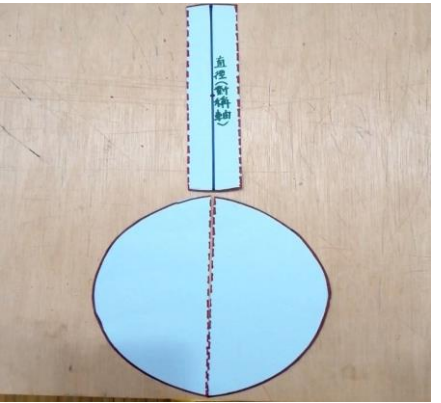
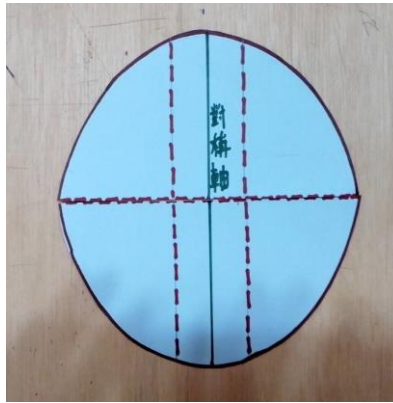
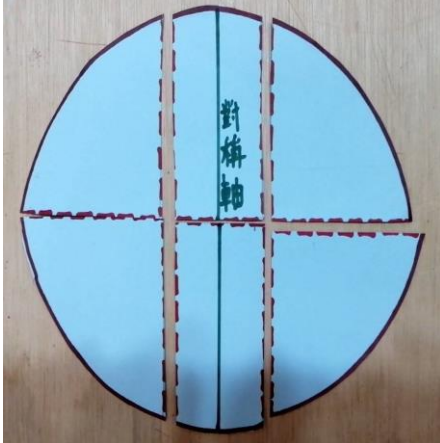
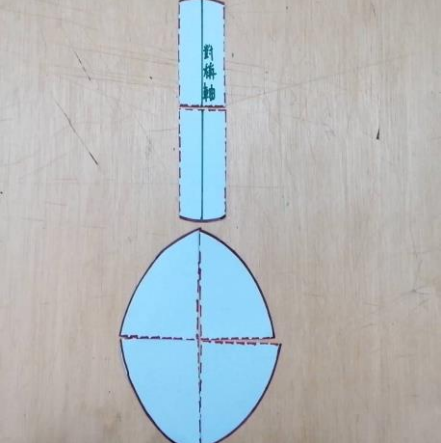
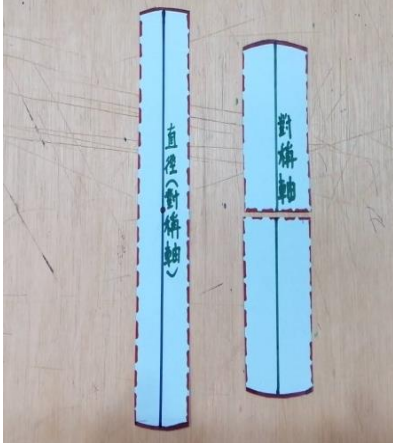
發現：1、作法 1 從圓中央切割兩條平行線，切割線雖未通過圓心，但切割好的長條狀是以直徑為「對稱軸」；如果未從圓中央切割兩條平行線，後續切割好的長條狀就無法均分。

2、如需再切，仍要從圓中央〈以直徑為對稱軸〉切割兩條平行線，但新切割線與原切割線要垂直。

3、經過一次次的切割，每次切的長條形會比上一次切的長條形更小些〈如圖 12〉。

4、利用新的切割方式，每次切成的長條狀，雖然可平分給享用的人數，但經過一次次的分割，圓型蛋糕會逐漸縮小，後續切割的面積會不一致，就無法均分等量的蛋糕了。

5、依上述 4 的疑問，我們思考一番，是否可結合傳統切蛋糕與新的切割方式，使蛋糕切得新鮮又均等，持續再展開以下的研究。

		
<p>圖〈7〉從蛋糕中央切割出兩條平行線</p>	<p>圖〈8〉將剩下的兩邊蛋糕密合</p>	<p>圖〈9〉如需再切，將蛋糕轉90度（新切割線與蛋糕原切割線垂直）</p>
		
<p>圖〈10〉剩下的四塊蛋糕密合，這樣蛋糕依然能夠合攏</p>	<p>圖〈11〉又成為一個小一些的蛋糕</p>	<p>圖〈12〉每次切的長條形會比上一次切的長條形更小些</p>

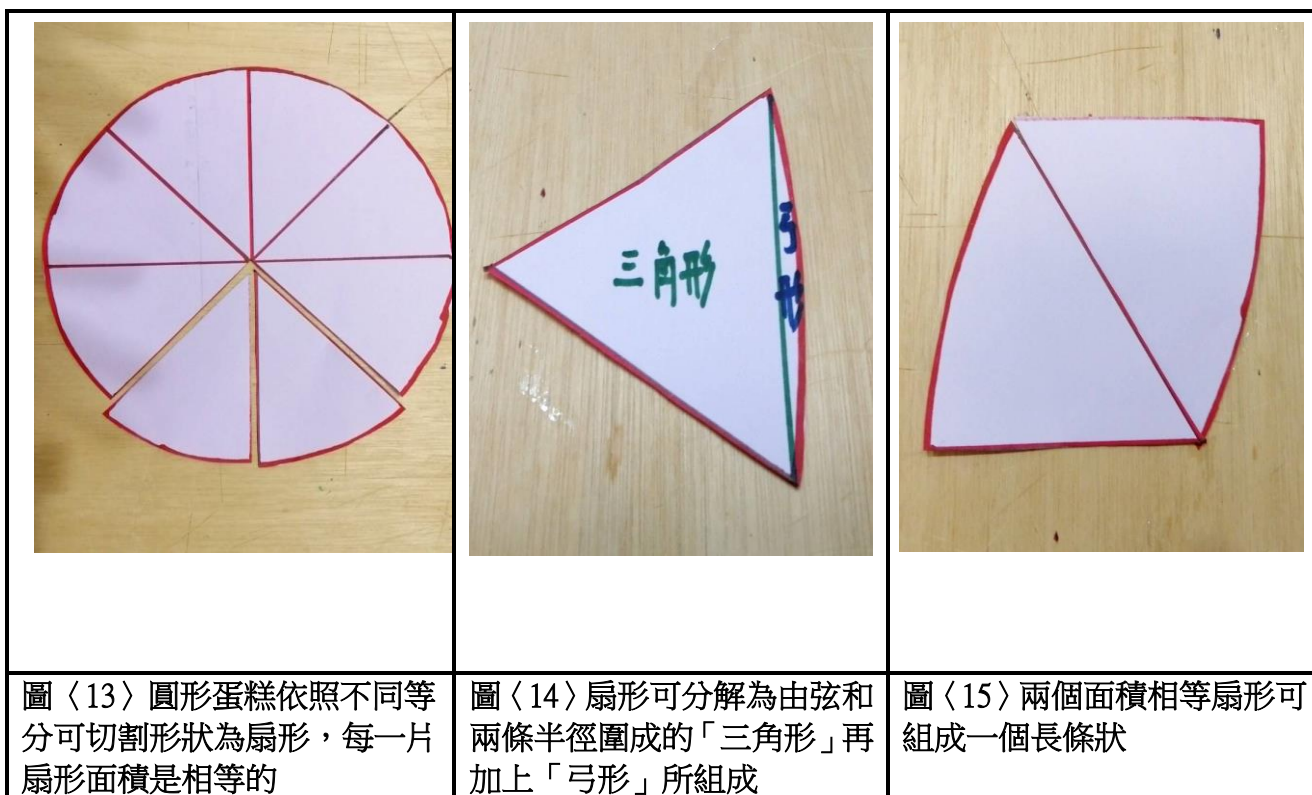
研究（三）探討利用「扇形面積」概念，歸納推算能維持蛋糕新鮮風味又能均等的數學原理。

- 說明：1、傳統切蛋糕的方式，依照不同等分可切割形狀為扇形，每一片扇形面積是相等的，〈如圖 13〉，並參考做法 1；
- 2、扇形是指圓上被兩條半徑和半徑所截之一段弧所圍成的圖形，因此可將扇形分解為由弦和兩條半徑圍成的三角形再加上弓形所組成〈如圖 14〉。
- 3、新的切割方式是從圓中央切割出兩條平行線，形成長條狀，可分解為弓形加上長方

形組成。

4、利用兩三角形可拼成四邊形的理念，我們進一步探索傳統切割成的扇形是否可組
成一個長條狀〈如圖 15〉。

5、新的切割方式會形成長條狀，如何依照需求等分，使切割成的長條狀能均分，且維
持蛋糕的風味和新鮮度，我們進行以下的探索作法。



做法：1、以半徑為 10cm 的圓形蛋糕，均分為 8 等份，每等份的〈扇形〉面積是：

$$10\text{cm} \times 10\text{cm} \times \pi / 8 = 25/2 \pi \text{ cm}^2。$$

2、以半徑為 10cm 的圓形蛋糕，均分為 8 等份，每等份的弧長是：

$$10\text{cm} \times 2 \times \pi / 8 = 5/2 \pi \text{ cm}。$$

3、將均分為 8 等份的 2 片扇形面積重疊在以同樣弧長新切割方式形成的長條狀，探究如何調整弧長及弦長，才能使兩者面積接近，進而兼顧新鮮美味與均等分配。

發現：1、傳統切法呈扇形及新切法呈長條狀，外圍均呈弧形狀〈如圖 16〉。

2、將均分等份的 2 片扇形面積重疊在以同樣弧長新切割方式形成的長條狀，可發現長條狀的面積大於 2 片扇形面積的總和〈如圖 17〉。

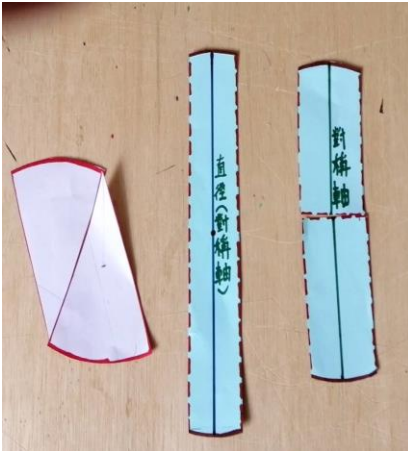
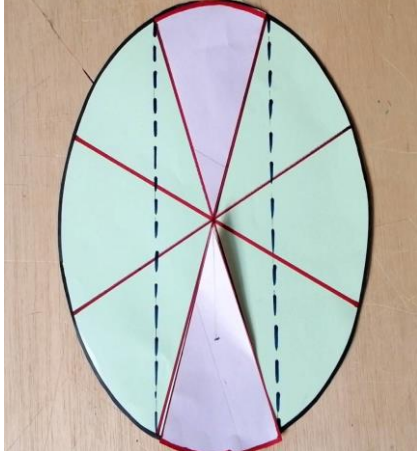
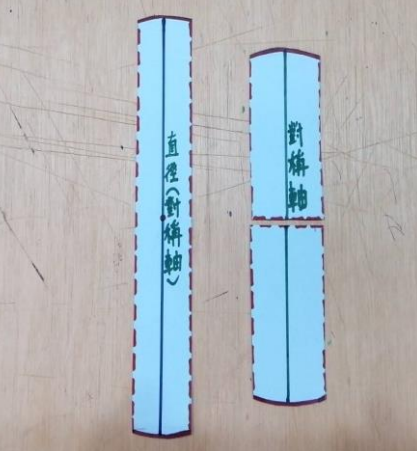
3、如依照新的切法呈長條狀，須調整長條狀的弧長〈寬〉及弦〈長〉，一次次的切割

才能均等份。

推論：1、圓內最大的弦長為直徑，當新的切割方式一次次分割合併，每次切的長條形會比上一次切的長條形更小些，因此弦長會越來越短，而弧長〈寬〉就必須越來越大，才能維持均等份〈如圖 18〉。

2、在上述做法 1，可發現當半徑縮減 1/2 的圓形蛋糕，其弧長也依半徑比例而呈縮減 1/2 長度，如半徑為 8cm 縮減為 4cm，其弧長〈圓周〉也從 16π cm 縮減為 8π cm。

3、我們推論新的切法在第一次切割長條狀時，以切成等份弧長的 1/2 為長條狀的寬度，進行以下的研究。

		
<p>圖〈16〉傳統切法呈扇形及新切法呈長條狀，外圍均呈弧形狀</p>	<p>圖〈17〉長條狀的面積大於 2 片扇形面積的總和</p>	<p>圖〈18〉每次切的長條形會比上一次切的長條形更小些，因此弦長會越來越短，而弧長〈寬〉就必須越來越大</p>

研究（四）分析其他等份均分的扇形面積是否可正確運用新的切割方式，並歸納共通的原理。

做法：1、準備數張紙板，切割成半徑 10cm 的圓形，先測量傳統切法為 4、6、8、10 等份扇形面積，依以下步驟推算，如下表〈2〉

2、依上述均等份數，採新的切法，長條形的寬依原直徑長度均分為須切割的等分 X2 〈以直徑為對稱軸，切割兩條平行線，左右各均等〉，例如直徑 20cm 的圓，切成八等分再乘 2，即 $20/8 \times 2=5$ 〈cm〉。

傳統切法	半徑	10cm	10cm	10cm	10cm
	均等份	4	6	8	10
	圓周長	20π cm	20π cm	20π cm	20π cm
	圓面積	100π cm ²	100π cm ²	100π cm ²	100π cm ²
	弧長	5π \langle 15.7 \rangle cm	$10/3\pi$ \langle 10.5 \rangle cm	$5/2\pi$ \langle 7.85 \rangle cm	2π \langle 6.28 \rangle cm
	扇形面積	25π \langle 78.5 \rangle cm ²	$50/3\pi$ \langle 52.4 \rangle cm ²	$25/2\pi$ \langle 39.3 \rangle cm ²	10π \langle 31.4 \rangle cm ²
	2片扇形面積	157 cm ²	104.8 cm ²	78.6 cm ²	62.8 cm ²
新的切法	長條狀 \langle 寬 \rangle	$20\div 4\times 2=$ \langle 10 \rangle cm	$20\div 6\times 2=$ \langle 6.67 \rangle cm	$20\div 8\times 2=$ \langle 5 \rangle cm	$20\div 10\times 2=$ \langle 4 \rangle cm
	長條狀 \langle 弦長 \rangle	15.7 cm \langle 不存在 \rangle	15.71 cm \langle 不存在 \rangle	15.72 cm \langle 不存在 \rangle	15.7 cm \langle 不存在 \rangle
	長條狀 \langle 面積 \rangle	157 cm ²	104.8 cm ²	78.6 cm ²	62.8 cm ²
	備註	長條形的寬愈大，弦會愈短	長條形的寬愈大，弦會愈短	長條形的寬愈小，弦會愈長	長條形的寬愈小，弦會愈長

表〈2〉註：表中 π 約等於 3.1416 計算

發現：1、傳統切法，可依等分計算圓周角，切出均等的扇形面積

2、新的切法雖然能鎖住美味與新鮮，但每次切完再密合，一次一次縮小的蛋糕，是無法依需求等分切出均等面積的。

3、圓形蛋糕的新鮮美味與均等，是無法兼得的。

伍、研究結果與討論：

1、市面販售的蛋糕雖有尺寸的不同，但依等分均分後扇形面積是相等的。

2、傳統切法不同等份的弧長也依圓心角比例而呈等份縮減；而扇形面積也依半徑比例而呈倍數平方增加；而均分後的扇形面積也依圓心角比例而呈等份縮減。

3、新的切割方式從圓中央切割兩條平行線，切割好的長條形是以直徑為「對稱軸」；如需再切，仍要從圓中央切割兩條平行線，但新切割線與原切割線要垂直。

4、新的切法雖然能鎖住美味與新鮮，但每次切完再密合，一次一次縮小的蛋糕，如何均分給較多的人吃呢？如能結合傳統扇形的切法，又可依照需切割的等分正確預測長條狀的寬

度，如此將蛋糕切得新鮮又均等。

- 5、我們依照圓的弧長、弦及弓形的公式推算，長條形的切法受限於圓的特性因此無法均等分，圓形蛋糕的新鮮美味與均等，是無法兼得的。
- 6、本研究如果只看過程不探究均等公平性，會令人驚奇。但我們從實際操作中尋得推算「傳統扇形切法」與「新的長條形切法」的數學原理，是這次學習最主要的收穫。大家覺得算術真神奇啊！