

屏東縣第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別： 物理

組 別： 國中組

作品名稱：**摺紙密碼**

-三浦摺疊面積縮小率和承受重量大小探討 -

關 鍵 詞：摺紙、三浦摺疊、面積縮小率、壓力

編號：B2001

摘要

在探討「三浦摺疊」的奧妙；我們設計了三個研究：

一、其摺疊角度、行列數與面積縮小率之關係中，發現摺疊角度愈小，行列數愈多，三浦摺疊縮合的面積會最小，但閉合時會比較困難，我們得到摺角 20° 較好縮合，可使面積縮成原來的 3%，直列數比齒列數較能影響縮合後面積，且直列數需為奇數才能閉合。

二、三浦摺疊展開面積愈小，抗壓能力愈強，一張 A4 紙約可承受 6kgw，是其重量的 1388.4 倍。

三、利用壓力模組，測量三浦摺疊單體摺角、展開角度，與作用力之關係。將力敏電阻連接 Arduino 組成壓力模組並輸入程式，發現摺角、展開角度都要愈小，才能承受較大力量，一個壁報紙摺成的單體，最大可承受 1111gw，是其重量的 925.8 倍。

壹、研究動機



圖一、三浦摺疊結構耐重測試

柏拉圖曾說：「上帝是幾何學家」，而這句話也能在這大自然中得到印證，事實上許多動植物都遵循著摺疊的原理演化，而 DNA 和蛋白質的摺疊結構更是生命存續的關鍵。

在一次生活科技課時老師放了一部有關摺紙的紀錄片，片中提到不只摺紙藝術家為摺疊的無限可能深深著迷，許多設計師、分子科學家和機器人工程師更因此倍受啟發—美國太空總署的「遮星計畫」設計出節省空間的太空摺疊式設備、北海道大學的一位學者將摺紙概念運用在醫療微型設備上，設計出心臟病患者的摺疊支架。而一個在斯圖加特大學的飛機研究所的發現更讓我們嘖嘖稱奇，研究人員將兩塊夾板的中間放進三浦摺疊的構造使其形成一個三明治結構，而這看似不堅固的構造卻能承受一公噸物體的重壓，儘管他本身只有十公克（圖一）。

而這時我們便出現了疑問「如果以不同摺疊的角度、行列數，所摺出的三浦摺疊架構，其

縮合面積及能承受的壓力是否相同？」於是我們便抱著好奇和實驗的精神，開始了這次的研究。

貳、研究目的

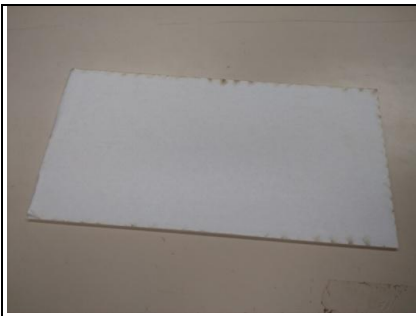
研究一：研究三浦摺疊，摺疊角度、行列數與面積縮小率之關係。

研究二：研究三浦摺疊展開面積與承受壓力之關係。

研究三：利用壓力模組，測量三浦摺疊單體摺角、開合角度與作用力之關係。

參、研究設備及器材

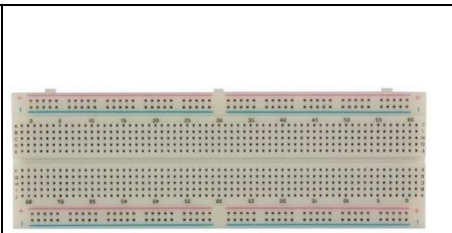
 <p>透明片</p>	 <p>A4 紙</p>	 <p>鋼尺、直尺、量角器、游標尺</p>
 <p>方格紙</p>	 <p>磅秤</p>	 <p>水平尺</p>
 <p>雷射切割機</p>	 <p>砝碼</p>	 <p>小白石</p>



壓克力板



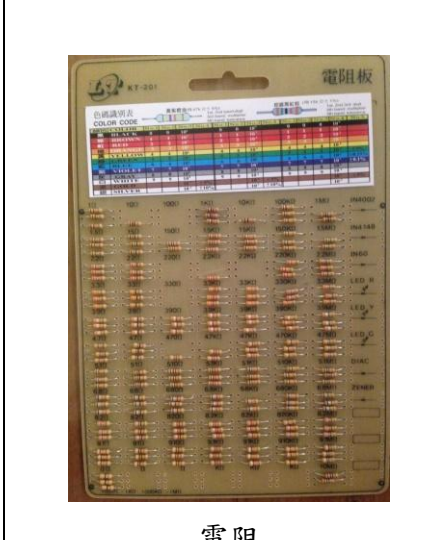
發光二極體



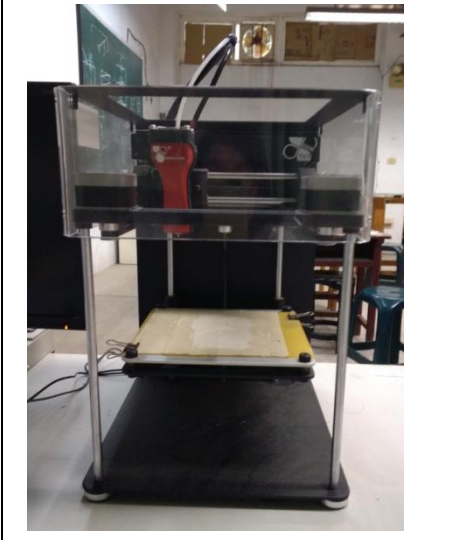
麵包板



螺旋起重器



電阻



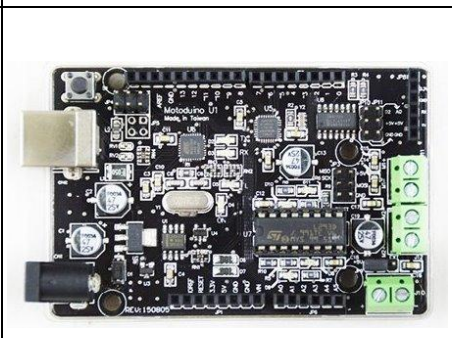
3D 列印機



力敏電阻



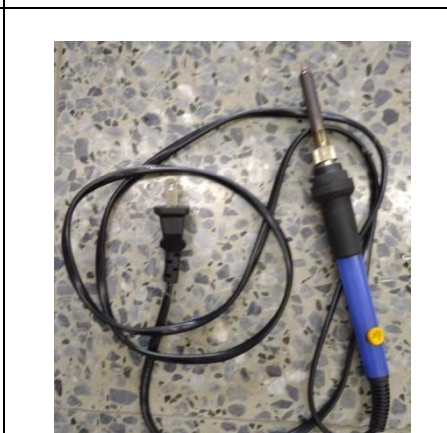
藝裁機



Motorduino



三用電錶



電烙鐵



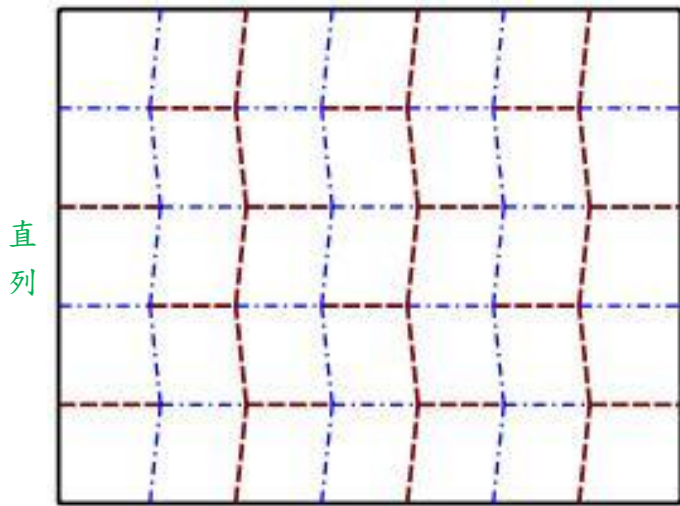
吹風機

肆、研究過程及方法

研究一：研究三浦摺疊，摺疊角度、行列數與面積縮小率之關係

三浦摺疊(ミウラ摺り)是由日本V東京大學構造工學名譽教授三浦公亮在1985年所發明的摺疊技術，該技術是以拉開對角兩端來把物品展開，而在收縮時則反向推入。這方法可節省空間外，又可避免摺疊和展開的過程中造成損耗。文獻上發現這方法可使物件的體積減少25倍，也就是縮為原來面積的3.8%，但不同的摺疊角度會不會讓物件的體積縮小程度不同？不同的摺疊行列數是否也會影響物件的體積縮小程度？為了解開問題，我們設計了下列實驗：

齒列



直列



圖二、三浦摺疊5x7摺痕圖

圖三、利用塑膠片製作摺疊版模

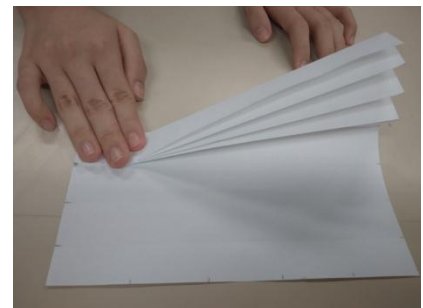
由圖二三浦摺疊的展開圖上，我們可以發現，三浦摺疊主要是由橫向的直列及縱向的齒列所構成，為了研究摺疊行列是否會影響體積縮小程度，我們打算摺出直列數x齒列數分別為5x7、5x9、5x11、7x5、9x5及11x5四種直齒列數，像圖二即為5x7的摺痕圖，為了研究摺疊角度是否會影響體積縮小程度，每種直齒列數再分別摺出30°、45°、60°及90°不同摺角，為了減少摺疊所造成的誤差我們利用透明塑膠片製作了版模如圖三，摺疊方式如下：



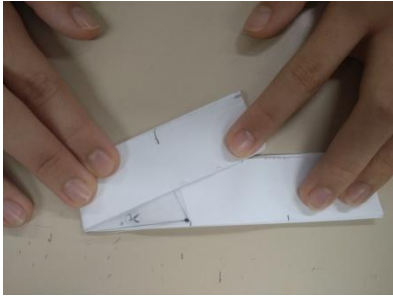
一、先將版模疊於A4紙上，利用鉛筆由版模四邊缺角處畫下紀號於A4紙上。



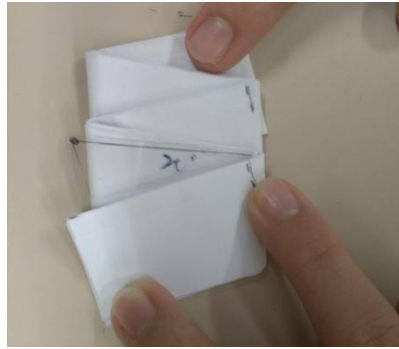
二、將一隻鋼尺對準直列上下兩點，另一隻鋼尺在紙面輕輕畫下刮痕。



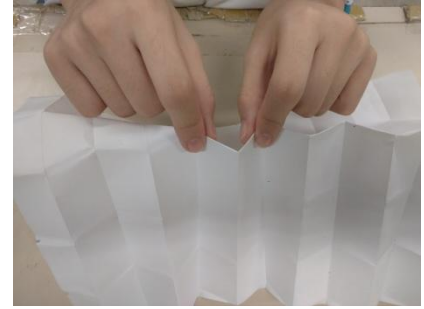
三、沿著刮痕，將紙張摺疊成鋸齒狀，疊合後形成條狀。



四、將角度版模置於條狀紙上第三點紀號處，由紀號處對準角度往下摺。

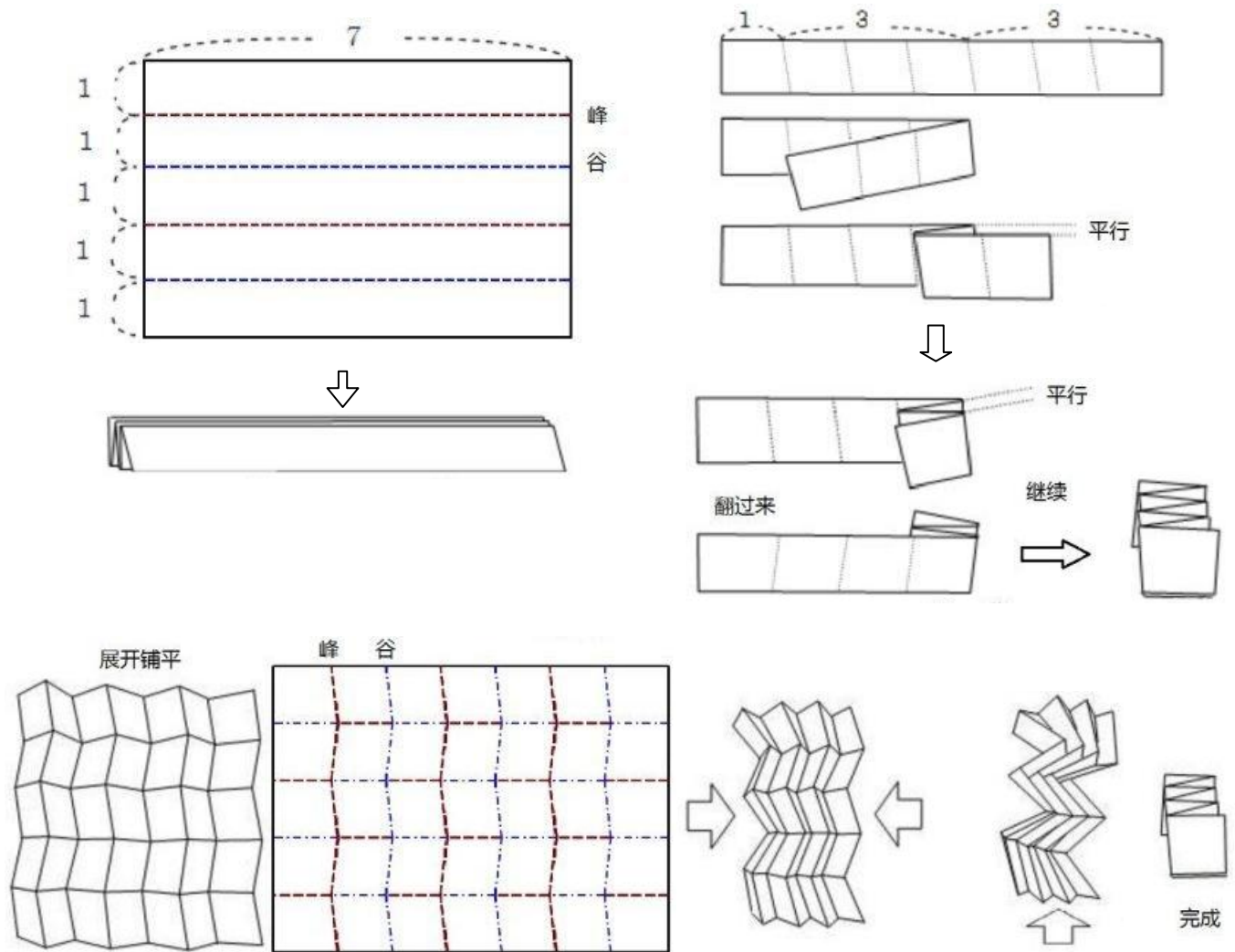


五、將條狀紙摺成角度相同「之」字紋路。



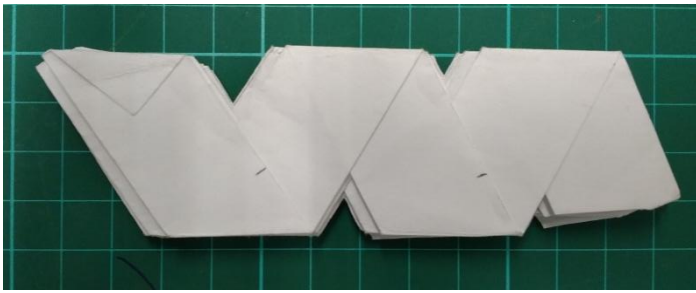
六、展開後依鋸齒紋路摺出一峰一谷相間紋路。

七、左右上下壓緊即完成，以下是5x7的摺疊步驟圖（圖四）：

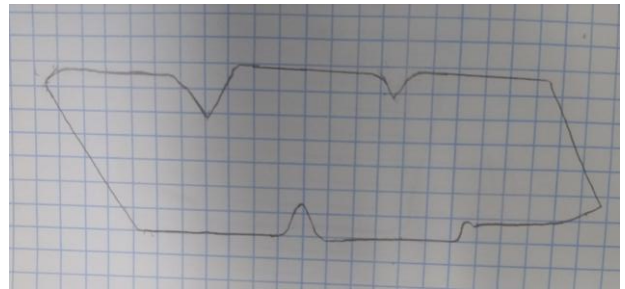


圖四、5x7 摺疊步驟

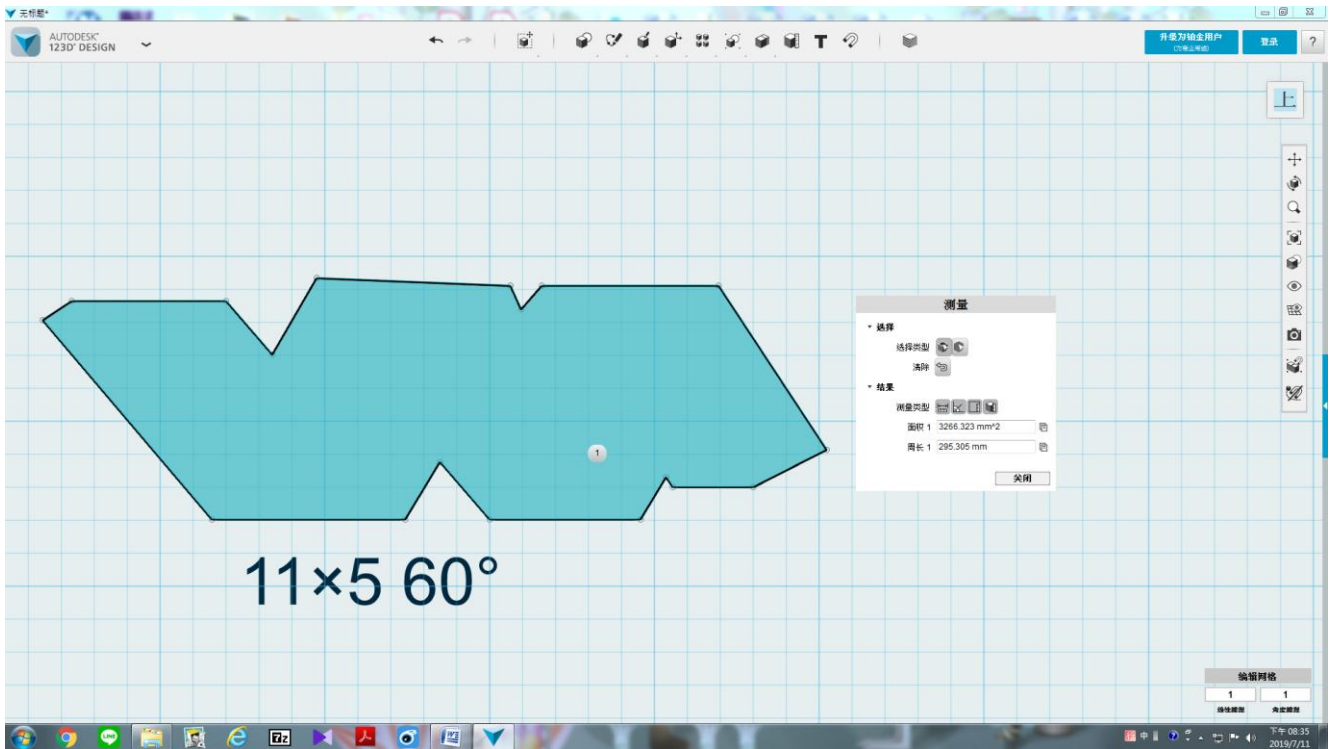
八、將摺疊後的紙張大小輪廓描於方格紙上（圖五、六），並以 123D Design 軟體繪出（圖七），並算出其面積紀錄下來。



圖五、摺疊縮合後的形狀



圖六、在方格紙上打樣



圖七、將圖六的形狀，以 123D Design 軟體繪出以計算出面積

研究二：研究三浦摺疊展開面積與承受壓力之關係。

在「摺紙密碼」紀錄片中提到，斯圖加特大學的飛機研究所的研究人員，將兩塊夾板的中間放進三浦摺疊的構造，使其形成一個三明治結構，並讓一部汽車壓上這個結構（圖一），而這看似不堅固的構造卻能承受一公噸物體的重壓，儘管他本身只有十公克，為了研究一張 A4 紙張能承受多少的重量，我們使用了直、齒列為 5x11，摺角 45° 的三浦摺疊成品，來作測試，我們利用雷射切割機，將壓克力板切割成四支模尺，再利用這四支模尺圍成井字型，其範圍分別為 12cmx16cm、10cmx16cm、8cmx16cm 及 6cmx16cm，將成品放入其中，展開成上述面積，每個面積測五次，去掉最多及最少者，選三次取平均值，以下是實驗步驟：



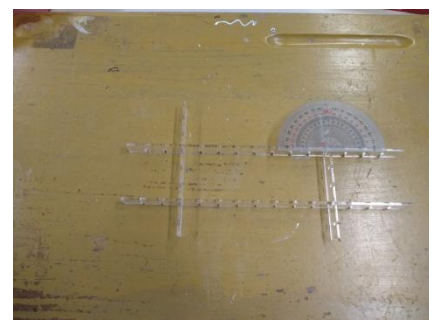
圖八、步驟四所量取六個點角度位置



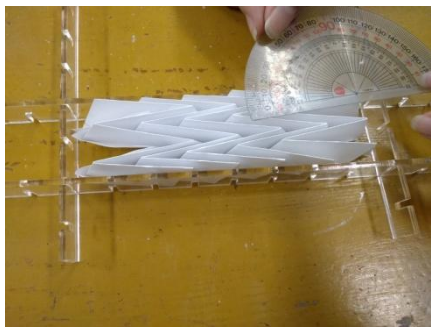
一、將一廢課桌置於實驗桌，並利用水平尺，四角墊上紙張調整使桌面呈水平狀態。



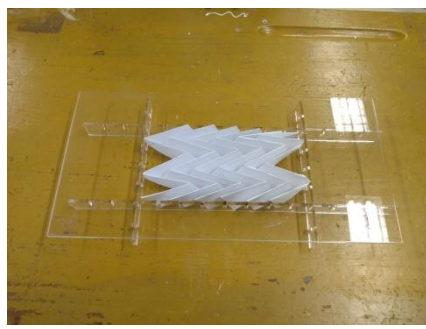
二、將摺疊好的成品以吹風機熱風吹三分鐘，以去除紙張上的溼氣。



三、課桌上放上模尺，並使模尺相嵌排成中央面積為指定面積，並用量角器，使四角保持垂直。



四、將三浦摺疊成品放入框中，並測量如圖八中所示六個點的角度。



五、成品上方放上壓克力板。



六、壓克力板上再放上桶子。



七、將砝碼、小白石放入桶中。



八、直至成品被壓垮，壓克力板碰到模尺一角。



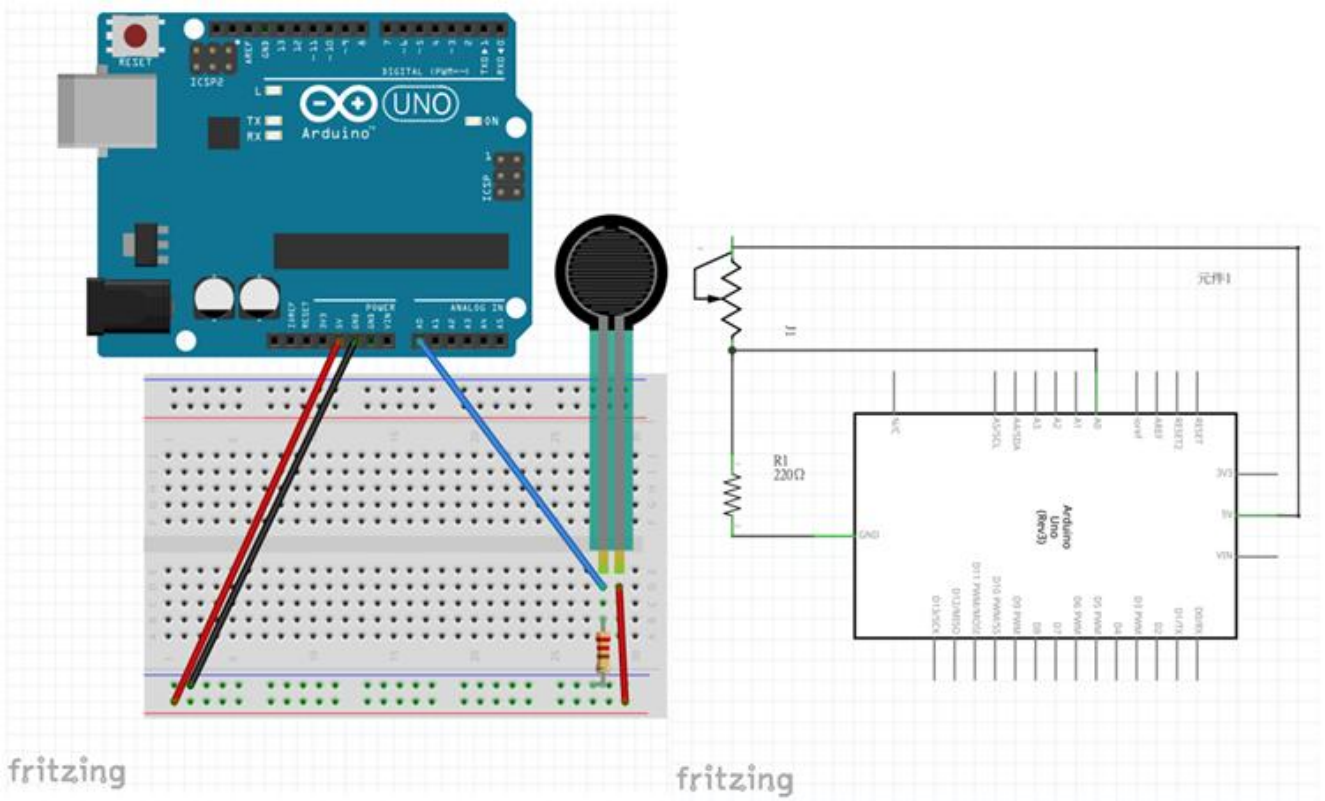
九、將壓克力板、桶子及桶內所有物品放到磅秤上稱重，並紀錄下來。

研究三：利用壓力模組，測量三浦摺疊摺角、開合角度與作用力之關係。

在研究二的過程中，我們發現三浦摺疊成品張開成不同的面積後，其呈現鋸齒狀的紋路角度並不相同，因此我們才會測量了圖八①~⑥六個角的角度，為了仔細研究此角度與承受壓力的關係，我們打算針對單體（一個單體是由四個平行四邊形所組成）作研究，因此我們利用 3D 列印機，製作了一個測試臺，此測試臺的柱子低於單體 0.6cm，測試臺上有不同的孔洞，方便柱子插入後，使單體撐開成不同角度，我們打算做摺角 30° 、 45° 、 60° 及 90° 四種單體，每種單體讓其撐開角度分別為 30° 、 60° 及 90° ，但摺角 90° 的單體如果撐開成 90° ，會變成平面，所以我們改做 75° ，每一種摺角及撐開角度各做 3 次；我們利用 FSR402 電阻式壓力感測器連接 Motorduino，並輸入程式，來讀取電壓的變化，以判斷開合角度與承受壓力之關係，以下是實驗步驟：

一、測壓模組設計

我們在網路上找到力敏電阻電路圖及與 Arduino 的連接圖（圖九），我們依圖接上後，以磅秤做測試如圖十，發現 Arduino 的序列埠監控視窗數值跳動幅度太大，因此我們將 220Ω 的電阻逐一更換，最後發現 $8.2k\Omega$ 較為適當，我們並加裝了 LED 燈來顯示受力大小，並對程式做修改，最後的程式如下：

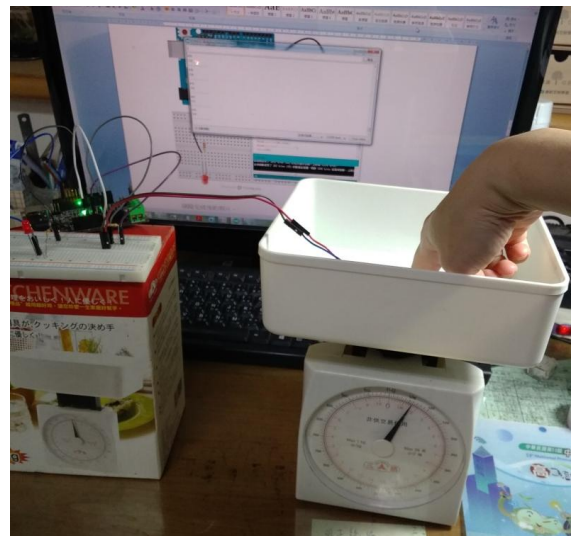


圖九、網路上力敏電阻電路圖

```
#define led_pin 11
#define fsr_pin A0

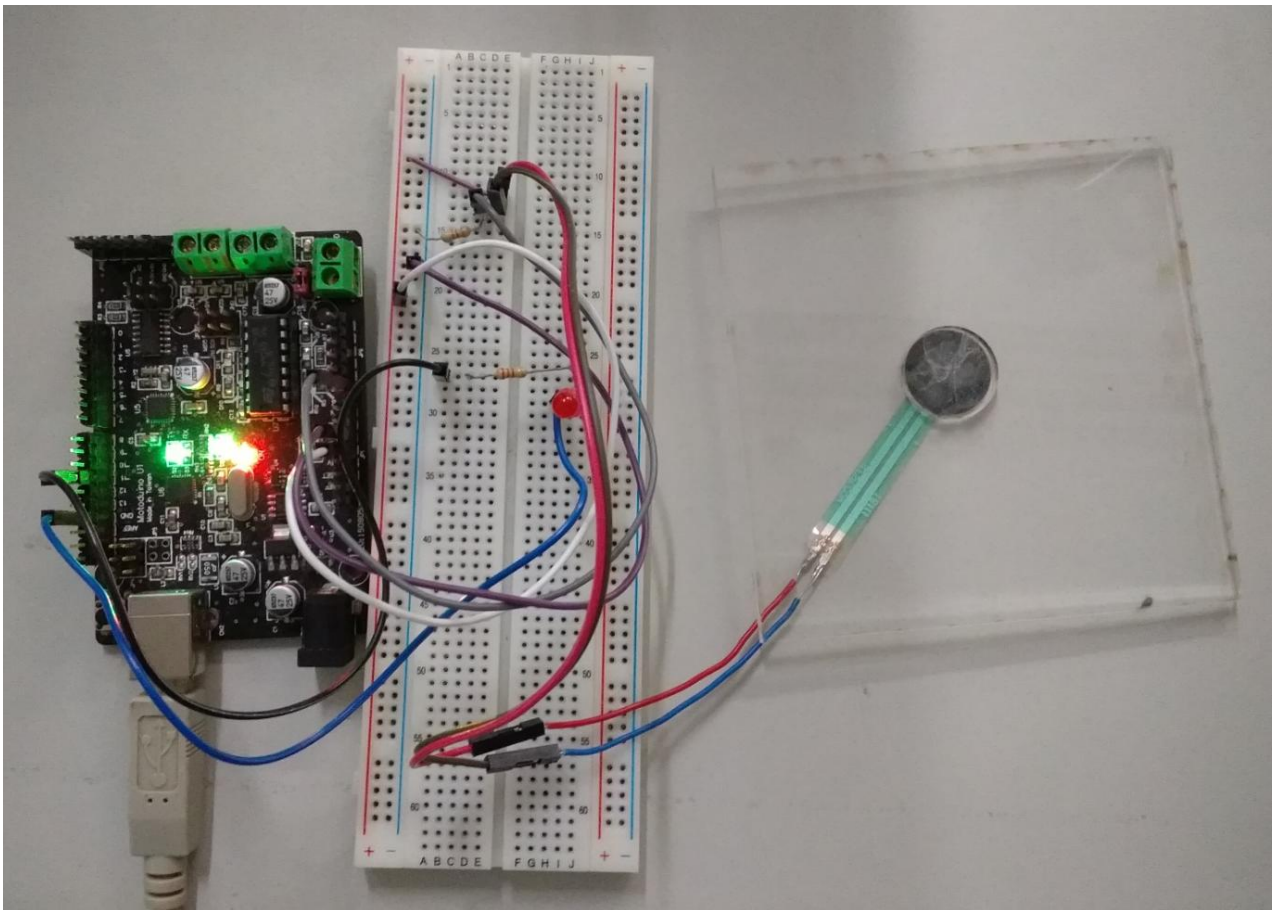
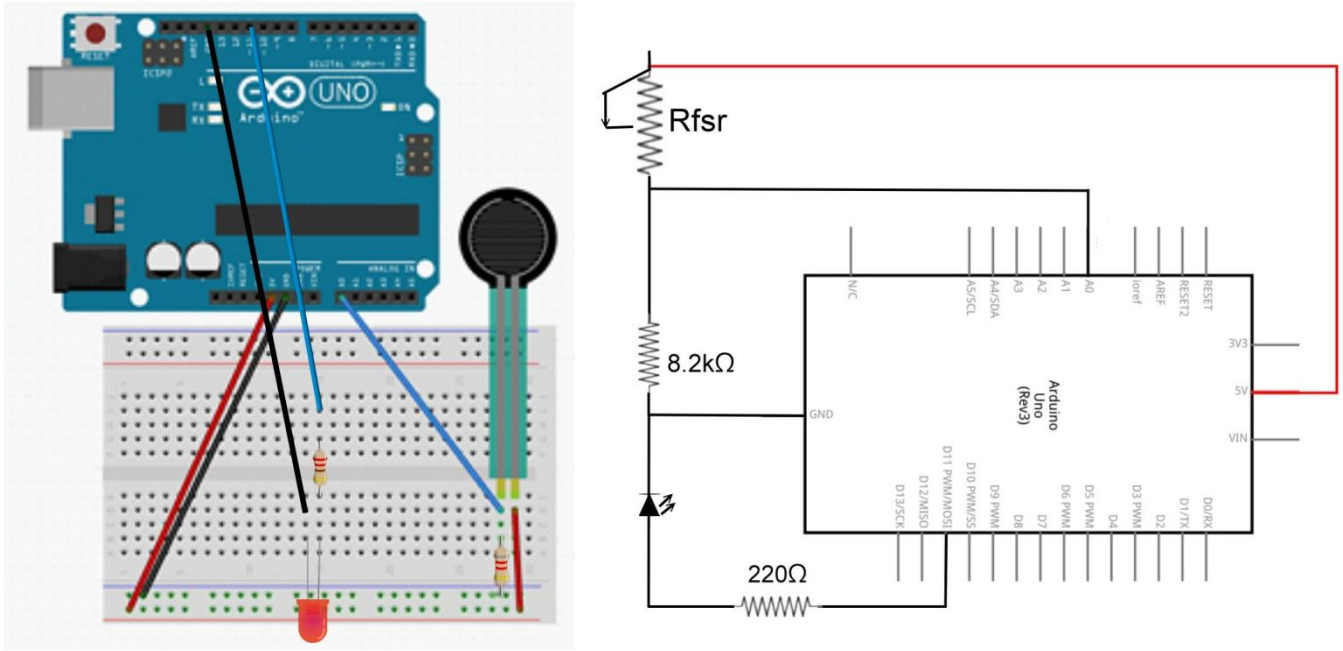
void setup()
{
  Serial.begin(9600);
  pinMode(led_pin, OUTPUT);
}

void loop()
{
  int fsr_value = analogRead(fsr_pin); // 讀取 FSR
  int led_value = map(fsr_value, 0, 1023, 0, 255); // 從 0~1023 映射到 0~255
  analogWrite(led_pin, led_value); // 改變 LED 亮度
  Serial.print("FSR value is:");
  Serial.println(fsr_value);
  delay(500);
}
```



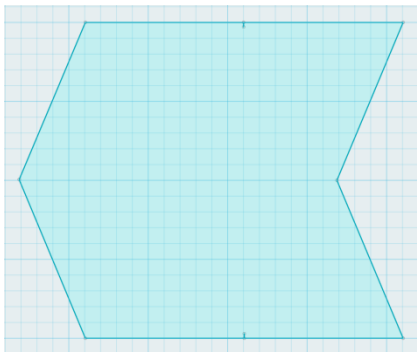
圖十、利用磅秤調整電阻大小

最後完成的接線圖、電路圖及實際作品圖如圖十一：

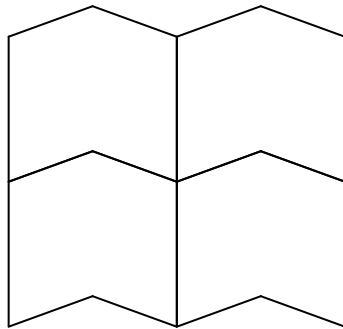


圖十一、修改後的電路圖及最後裝置

二、測試平臺設計



1、以 123D Design 軟體繪出 30°、45°、60° 及 90° 摺角，邊長、高 5cm 的四個四邊形，將此稱為一單體，並將此單體貼在 Word 上。



2、一張 A4 紙可描出四個單體，並將其列印出來。



3、將圖片掃描至藝裁機內，放上壁報紙，切割出單體，每種摺角切出八個單體。



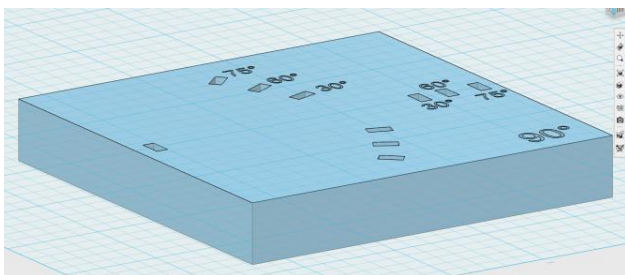
4、將單體以量角器彎摺成所需角度。



5、將固定好形狀的單體底部四條線描在方格紙上。



6、以游標尺測量單體高度。



7、以 123D Design 軟體繪出測試平臺立體圖，並利用 RDWorksV8 畫出柱子。



8、利用 3D 列印機列印出測試平臺，並利用雷射機切割出壓克力柱子。

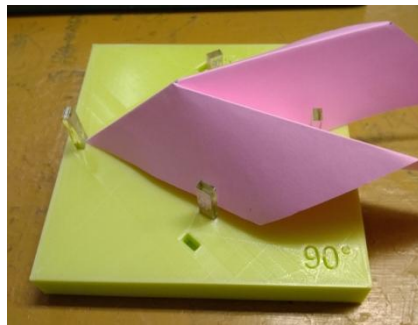
三、研究開合角度與承受壓力之關係



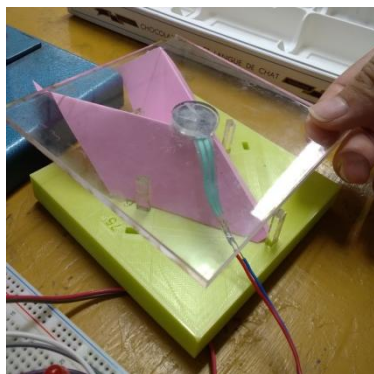
1、將適當長度圓柱，插入所需測試角度平臺凹洞內。



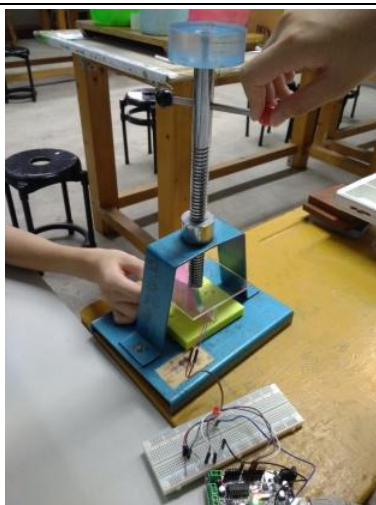
2、將以吹風機熱風吹三分鐘，以去除紙張上的溼氣。



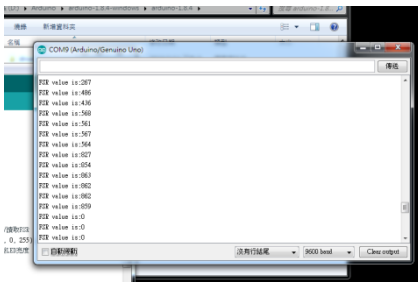
3、將單體置於測試臺上。



4、將測壓模組黏貼於壓克力板上，並置於單體上。



5、將整組測試物置於螺旋起重機下，並旋轉把手使螺柱緩緩下降，直至壓克力板頂到圓柱。



6、將 Arduino 的序列埠監控視窗的最大數值記錄下來。

伍、研究結果

研究一：研究三浦摺疊，摺疊角度、行列數與面積縮小率之關係

由於是純手工，經過長時間的摺疊，並淘汰不整齊的成品，經過處理後，我們最後得到表一數據，並在摺疊過程中及最後結果得到下列幾個重點：

一、摺疊角度與三浦摺疊所形成的平行四邊形鈍角、銳角之關係。

在摺疊的過程中，我們發現所摺疊出來的平行四邊形摺痕，其鈍角與銳角與摺角之間的關係為：

$$\text{摺角角度} = 180^\circ - 2 \text{銳角} = 2 \text{鈍角} - 180^\circ$$

表一、不同摺疊方式，摺疊縮合後實際面積與理想縮合面積數據

直列 × 齒列	摺角	平形四邊形摺痕資料					理想面積 縮小率%	實際面積 (cm ²)	實際面積 縮小率%
		銳角	鈍角	底 (cm)	高 (cm)	面積 (cm ²)			
5 × 7	30°	75°	105°	4.2	4.2	17.82	2.86%	33.92	5.44%
	45°	67.5°	112.5°					39.23	6.29%
	60°	60°	120°					49.63	7.96%
	90°	45°	135°					51.93	8.33%
5 × 9	30°	75°	105°	3.3	4.2	13.86	2.22%	28.23	4.53%
	45°	67.5°	112.5°					33.89	5.43%
	60°	60°	120°					38.47	6.17%
	90°	45°	135°					43.66	7.00%
5 × 11	10°	85°	95°	2.7	4.2	11.34	1.82%	15.40	2.47%
	20°	80°	100°					19.44	3.12%
	30°	75°	105°					22.61	3.63%
	45°	67.5°	112.5°					30.18	4.84%
	60°	60°	120°					35.17	5.64%
	90°	45°	135°					42.48	6.81%
7 × 5	30°	75°	105°	4.2	4.2	17.82	2.86%	28.37	4.55%
	45°	67.5°	112.5°					33.59	5.39%
	60°	60°	120°					34.90	5.60%
	90°	45°	135°					37.58	6.03%
9 × 5	20°	80°	100°	4.2	3.3	13.86	2.22%	22.02	3.53%
	30°	75°	105°					26.05	4.18%
	45°	67.5°	112.5°					30.13	4.83%
	60°	60°	120°					33.83	5.42%
	90°	45°	135°					34.46	5.52%
11 × 5	10°	85°	95°	4.2	2.7	11.34	1.82%	12.66	2.03%
	20°	80°	100°					20.77	3.33%
	30°	75°	105°					22.51	3.61%
	45°	67.5°	112.5°					27.15	4.35%
	60°	60°	120°					31.12	4.99%
	90°	45°	135°					32.79	5.26%

二、三浦摺疊的直列數必須為奇數列。

我們發現，三浦摺疊的直列數需為奇數列，否則將很難展開或縮合，因此我們設計了5、7、9、11等直列數，而為了研究直列數與齒列數如何影響縮小面積，因此齒列數也是使用這些數字，事實上齒列數並不影響開合。

三、摺痕上單一四邊形面積的算法為：

$$\text{平行四邊形面積} = \frac{\text{A4 紙面積}}{\text{直列數} \times \text{齒列數}} = \text{理想面積}$$

表一中各組其的平行四邊形底、高長度分別為：

前三組： 底 = $\frac{\text{A4 長 } 29.7\text{cm}}{\text{齒列數}}$ 高 = $\frac{\text{A4 寬 } 21\text{cm}}{\text{直列數}}$

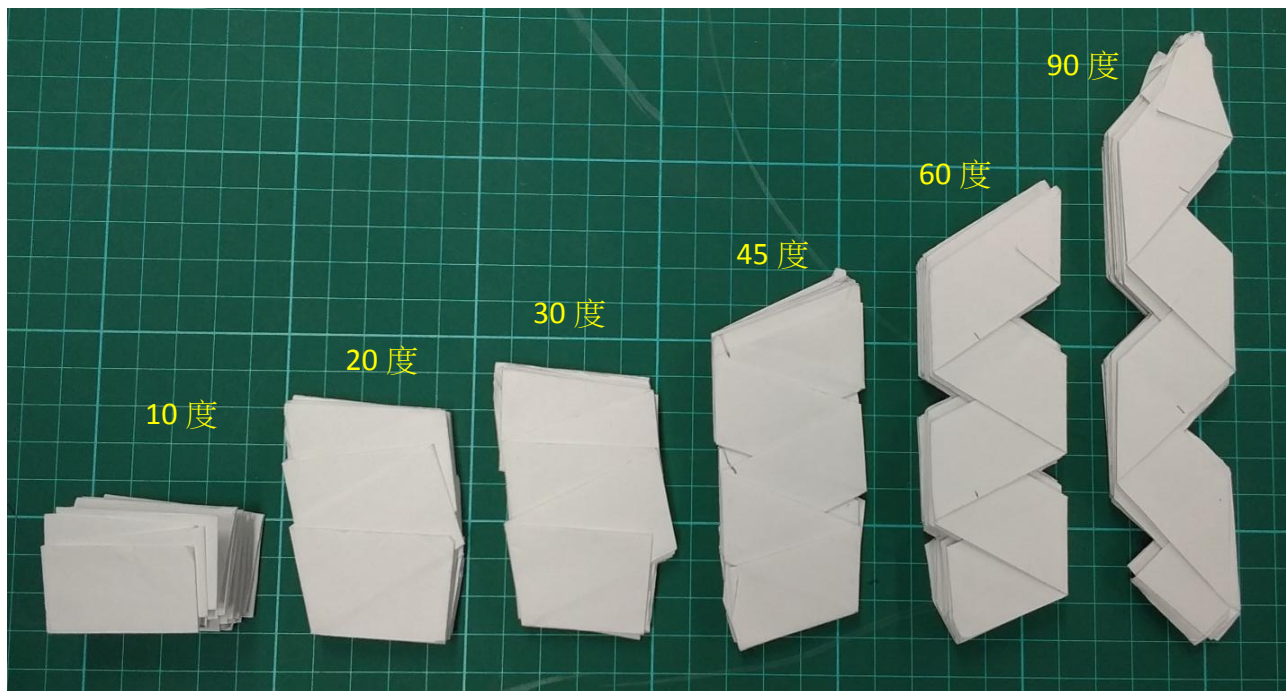
後三組： 底 = $\frac{\text{A4 寬 } 21\text{cm}}{\text{齒列數}}$ 高 = $\frac{\text{A4 長 } 29.7\text{cm}}{\text{直列數}}$ 平行四邊形的面積 = 底 × 高

因此摺痕上單一四邊形面積的算法為：
$$\text{平行四邊形面積} = \frac{\text{A4 紙面積}}{\text{直列數} \times \text{齒列數}}$$

從三浦摺疊的展開圖我們可以了解到，不管怎麼摺疊，摺疊後的最小面積一定趨近於摺痕上單一平行四邊形面積，因此我們將此平行四邊形面積稱為理想面積，其縮小率就稱為理想面積縮小率計算如下：

$$\text{理想面積縮小率} = \frac{\text{平行四邊形面積}}{\text{A4 面積 } (29.7 \times 21)} \times 100\%$$

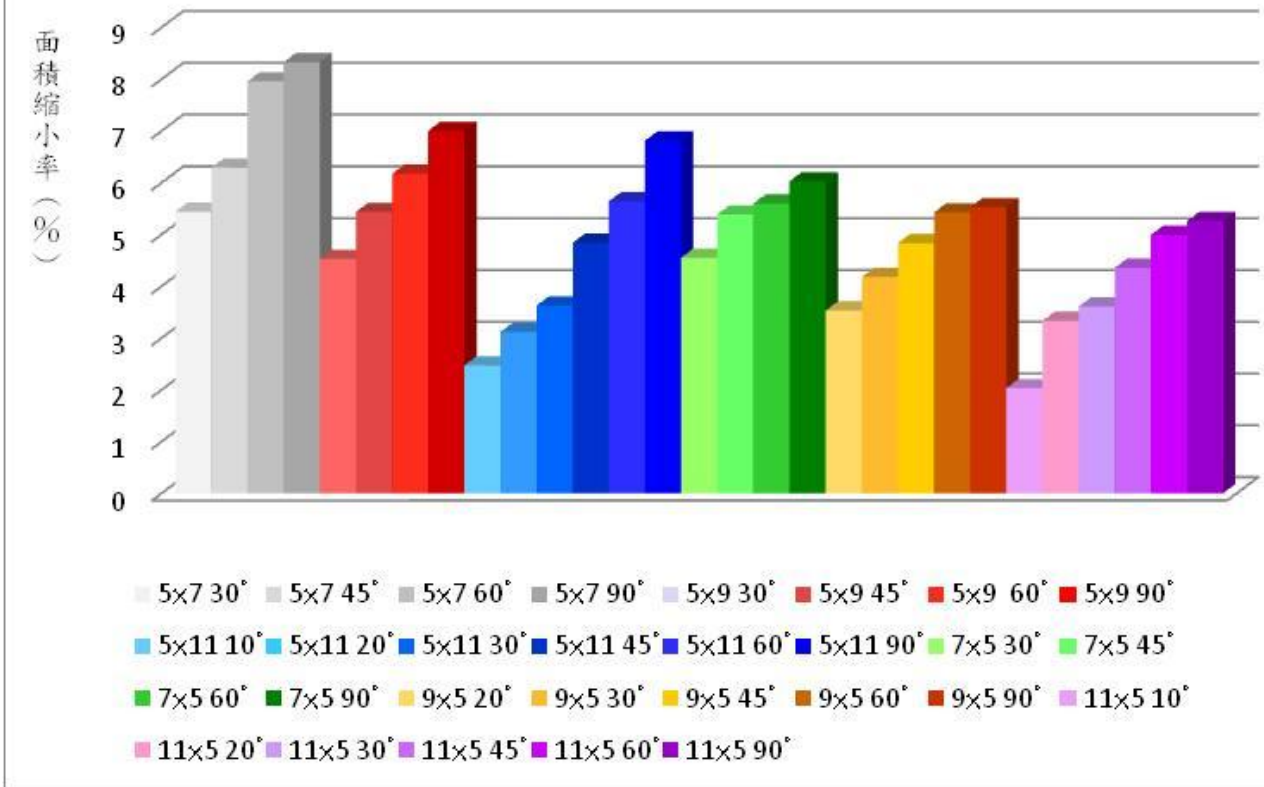
四、摺疊角度愈小，實際面積縮小率會漸趨近於理想面積縮小率。



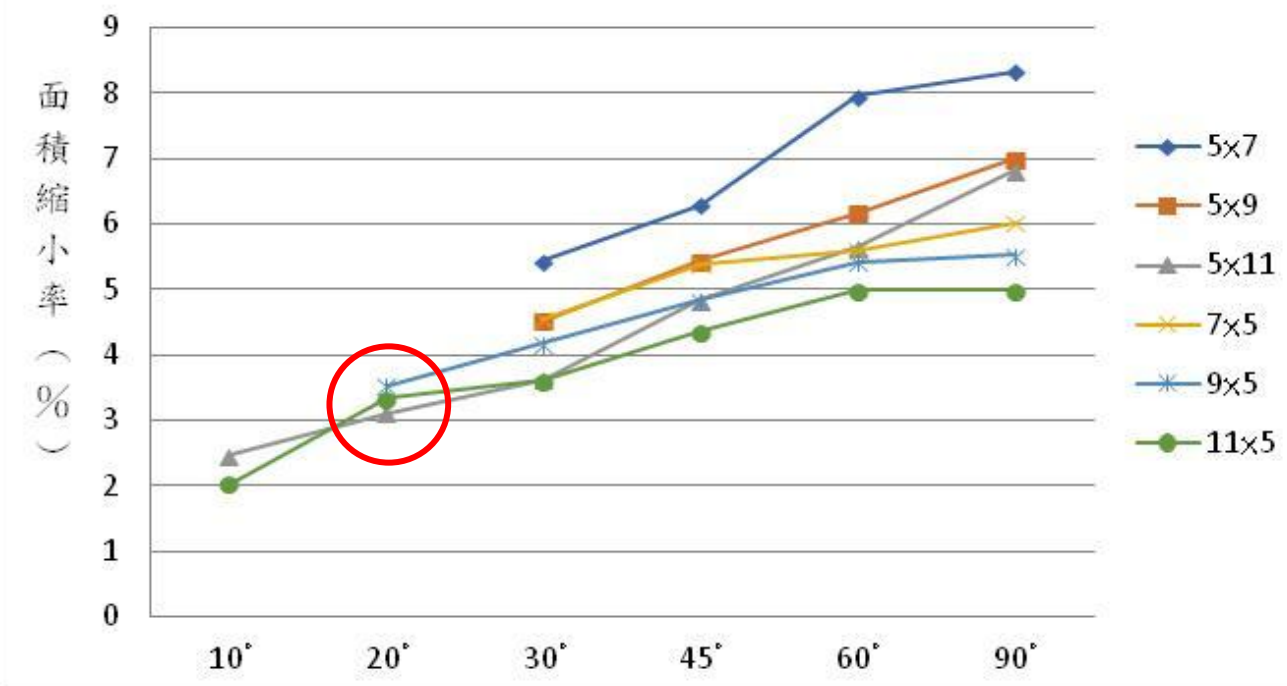
圖十二、直列×齒列 11×5 不同摺角，摺疊後的形狀

圖十二是 11×5 的三浦摺疊完成品，由左而右依序為摺角 10°、20°、30°、45°、60° 及 90°，從圖中，我們可以清楚的看到摺角愈小，摺合後面積愈小；在摺疊的過程中，我們發現直列數、齒列數愈多，摺疊角度愈小，疊合後的面積愈小，因此在直齒列數較多的 9×5、5×11 及 11×5，我們又多摺了 10° 及 20° 摺角，最後得到：直列數 11、齒列數 5、摺角 10° 摺合後的面積最接近理想面積，如表一中綠色網底處；而圖十三、圖十四為直齒列數與面積縮小率柱狀圖及摺角與面積縮小率摺線圖，由此二圖我們更可以清楚看到摺疊行列數愈多、摺疊角度愈小，疊合後的面積會愈小；圖十四摺線圖的 5×11 及 11×5 的 20° 似乎上下顛倒，表一藍圈處、圖紅圈處，因為是手工摺疊，角度愈小、摺紋愈細愈難摺所造成的誤差。

圖十三、直齒列數與面積縮小率柱狀圖



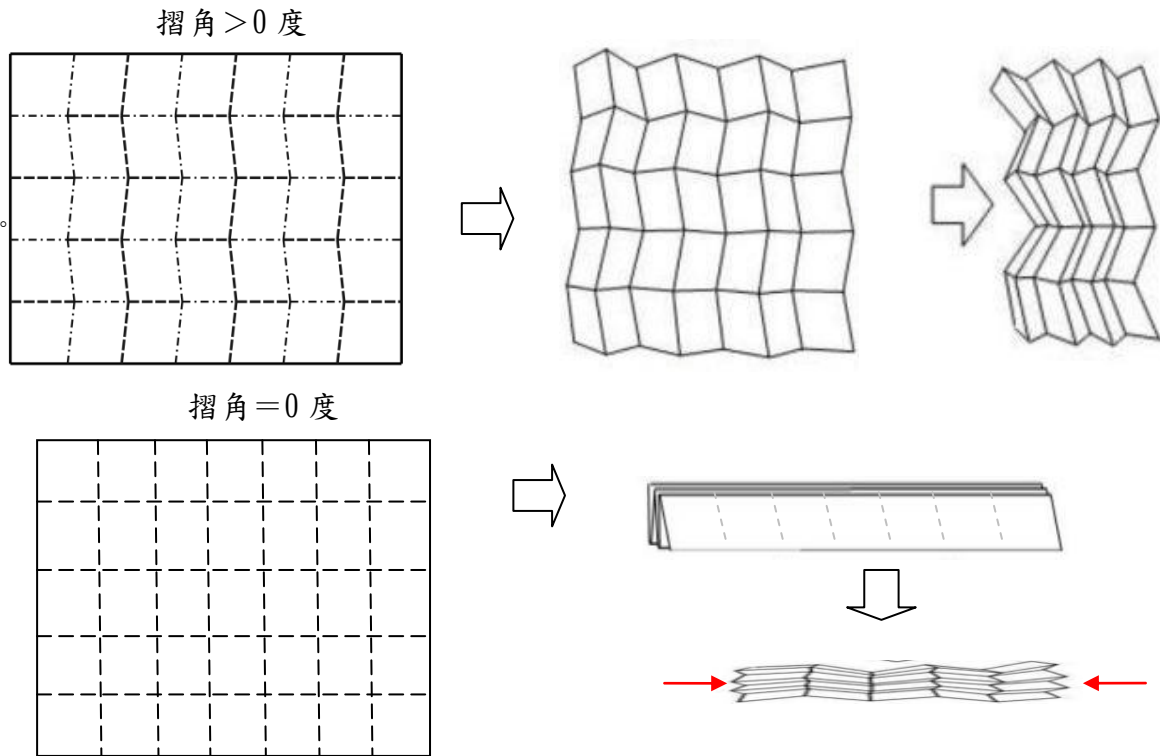
圖十四、摺角與面積縮小率摺線圖



五、三浦摺疊摺角需大於 0° 才可閉合。

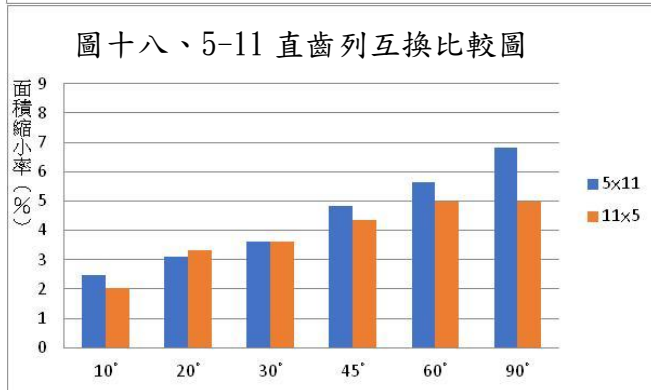
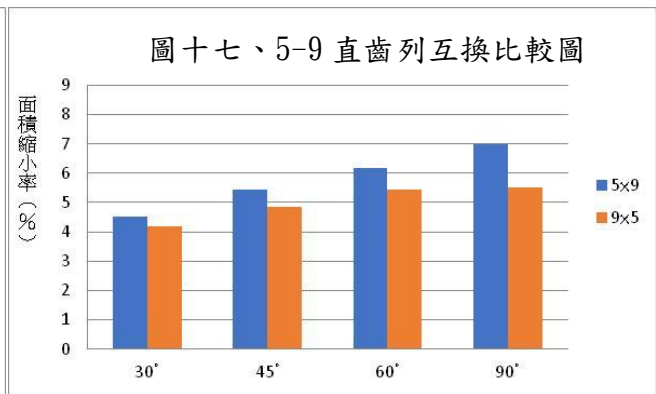
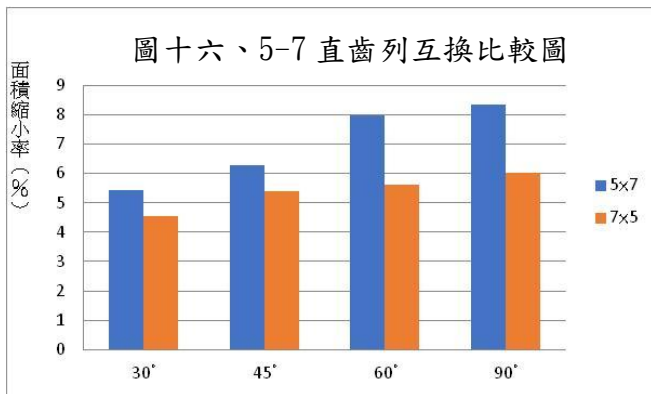
展開時，因手捏住紙張對角兩端，不管摺角幾度都可以展開；閉合時，如果摺角大於 0°，可以看到紙張會四邊同時慢慢縮小，最後才閉合，如圖十五俯視圖；而摺角為 0° 時，紙張會迅

速合成一長條狀，此時就很難讓呈長條的紙張以鋸齒狀進一步縮合，如圖十五俯視，因此我們最小只摺至 10° 角。



圖十五、摺角 = 0 度和 > 0 度時的摺疊情形

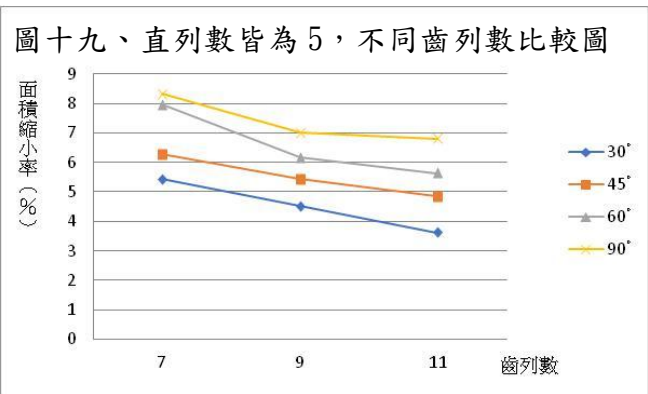
六、直列數多者面積縮小率較小。



圖十六~圖十八是直列數與齒列數對調所形成的柱狀圖，雖然同一組例如 5x7 及 7x5 其摺紋上的平行四邊形大小相同，如表一所示皆為 17.8cm²，也就是理想縮小面積相同，但很明顯可看到，這三個圖橘色柱皆比藍色柱面積縮小率小，所以從此處可看出，直列數較多，面積可以縮得比較小；這三組圖另外也可看出，面積還是隨摺角愈小縮小面積愈小。

七、直列數相同，齒列數愈多面積縮小率愈小。

圖十九為直列數皆為五，但齒列數不同的比較圖，另外從圖中我們也可以清楚看到四條不同角度摺線幾乎呈斜向右下平行分佈，摺角愈小面積縮小率愈小。



八、三浦摺疊過程中，每一個平行四邊形都沒有變形。

三浦摺疊其實屬於一種「剛性摺紙」，也就是說在摺疊的過程中，每個小平行四邊形都沒有變形扭曲，而保存了平面的幾何形狀。因此，三浦摺疊非常適合那些剛性的材料。

研究二：研究三浦摺疊展開面積與承受壓力之關係。

我們的三浦摺疊成品是手工摺疊而成，加上隨著展開面積不同，成品高於模尺的長度也不同（展開面積大，高度較矮，以游標尺測量最大約差 0.2cm），雖然我們在桶內放置砝碼、小白石的位置時，已儘量讓桶底保持水平，但每次實驗還是會有些不同，以上總總情形皆會造成誤差，因此我們只好每個面積做五次實驗，去除最大及最小，取其平均值來畫出關係圖，下表二就是以直、齒列為 5x11，摺角 45° 的成品，在不同展開面積下，所呈現的實驗結果，我們並得到幾個結論：

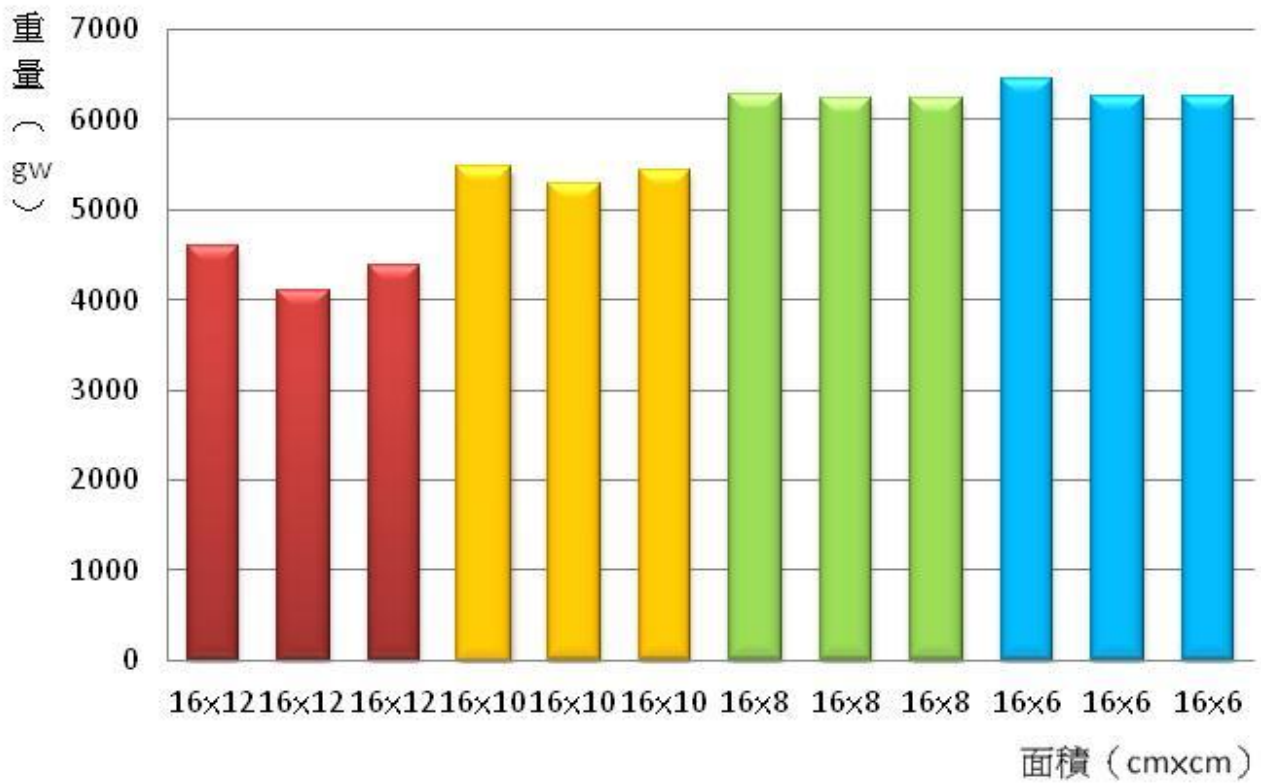
表二、直、齒列為 5x11，摺角 45°，不同展開面積後，其展開角度及所能承受重量大小

展開面積 (cmxcm)	展開角度 (°)						平均展開角度 (°)	受重 (gw)	平均受重 (gw)	承受壓力 (gw/cm ²)	平均承受壓力 (gw/cm ²)
	①	②	③	④	⑤	⑥					
12x16	51	49	54	62	58	56	55	4600	4360	23	23
	60	50	50	50	50	57	53	4100		21	
	35	62	68	44	59	51	53	4380		22	
10x16	53	26	44	42	45	50	43	5470	5400	34	34
	53	45	48	39	54	57	49	5290		33	
	44	42	49	39	43	43	43	5440		34	
8x16	35	35	20	40	50	45	38	6270	6247	49	49
	45	50	45	35	45	45	44	6230		49	
	35	35	40	30	45	45	38	6240		49	
6x16	24	30	30	30	25	30	28	6450	6320	67	66
	30	15	30	20	35	30	27	6250		65	
	25	30	30	30	25	30	28	6260		65	

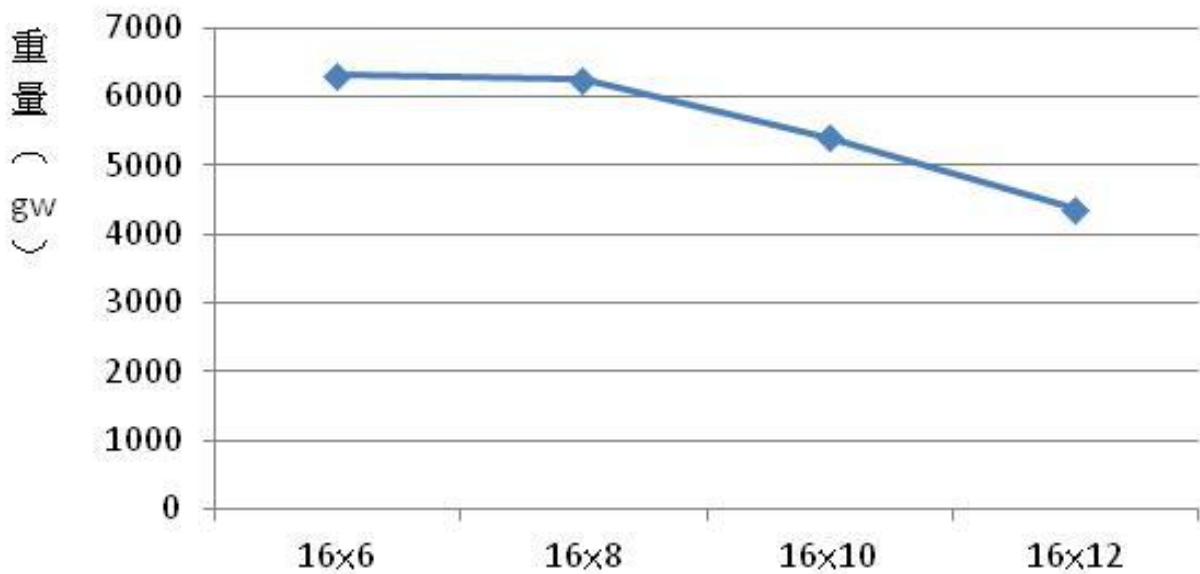
一、三浦摺疊(直齒列 5x11 摺角 45°)展開的面積愈大，所能承受的重量愈小。

圖二十是承受重量與展開面積柱狀圖，雖然能承受的重量隨著展開面積略有增減，但還是可看出有隨著展開面積縮小逐漸增加的趨勢，圖二十一為展開面積相同的三次實驗，取承受重量的平均值，所做出的摺線圖，從此圖更能清楚的看出展開的面積愈大，所能承受的重量愈小。

圖二十、承受重量與展開面積柱狀圖



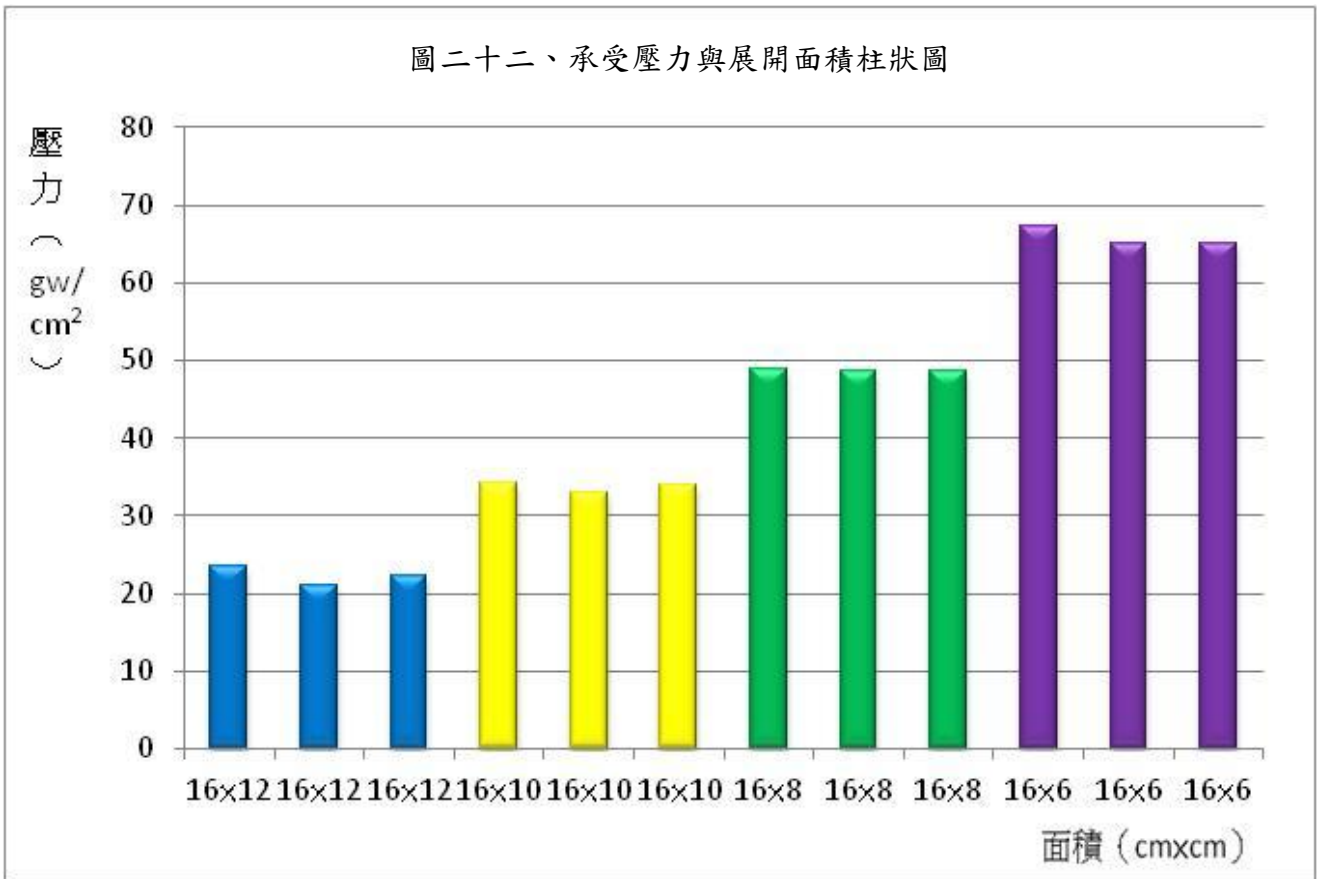
圖二十一、承受重量與展開面積摺線圖



二、三浦摺疊(直齒列 5x11 摺角 45°)展開的面積愈大,所能承受的壓力愈小。

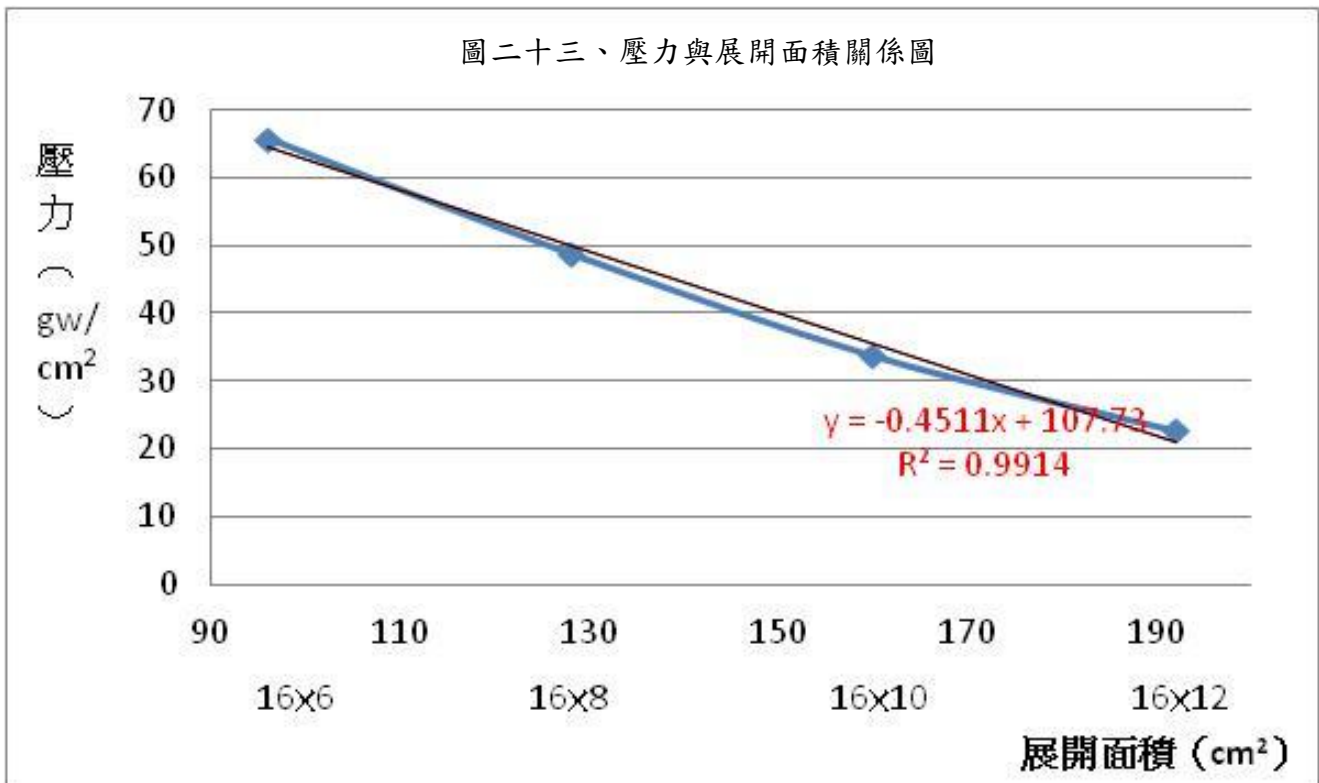
圖二十二是承受壓力與展開面積柱狀圖,由此圖可看出隨著展開面積縮小,能承受的壓力

圖二十二、承受壓力與展開面積柱狀圖



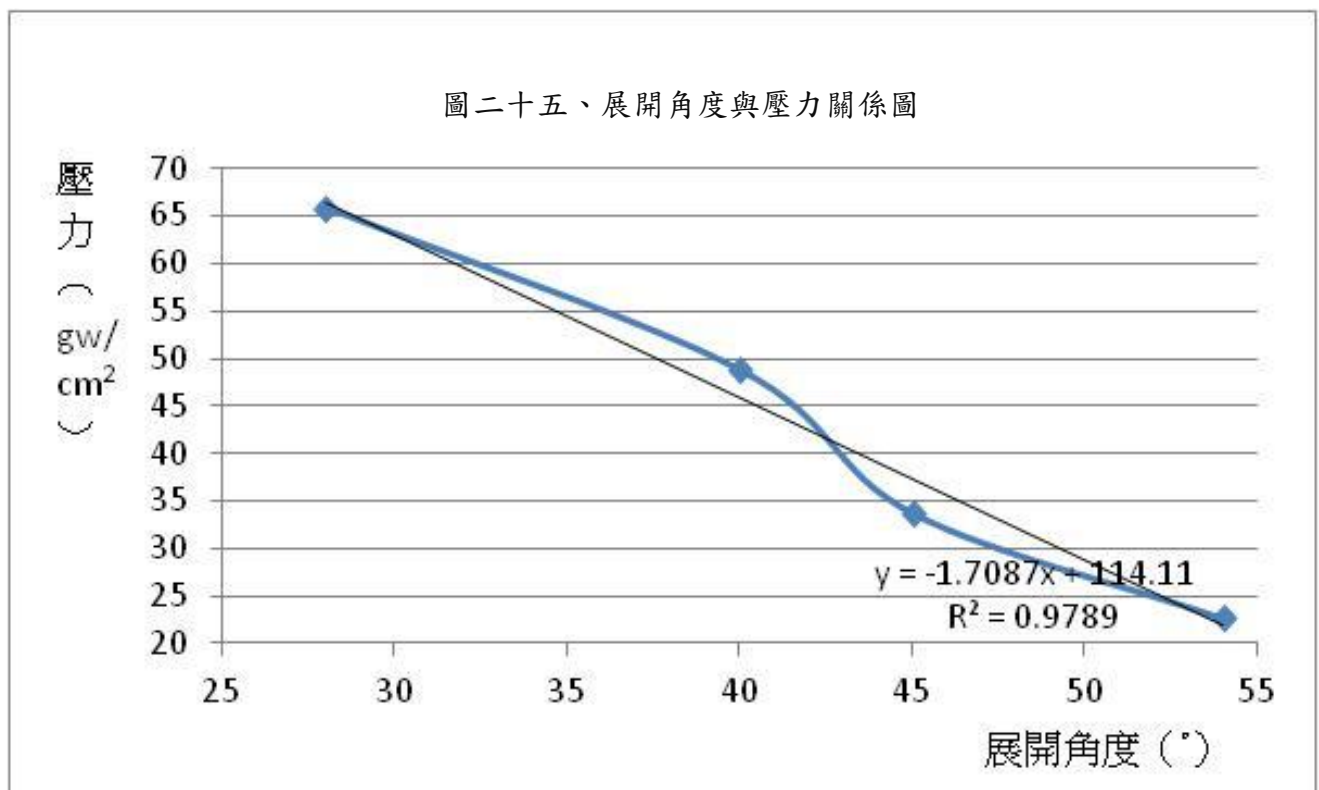
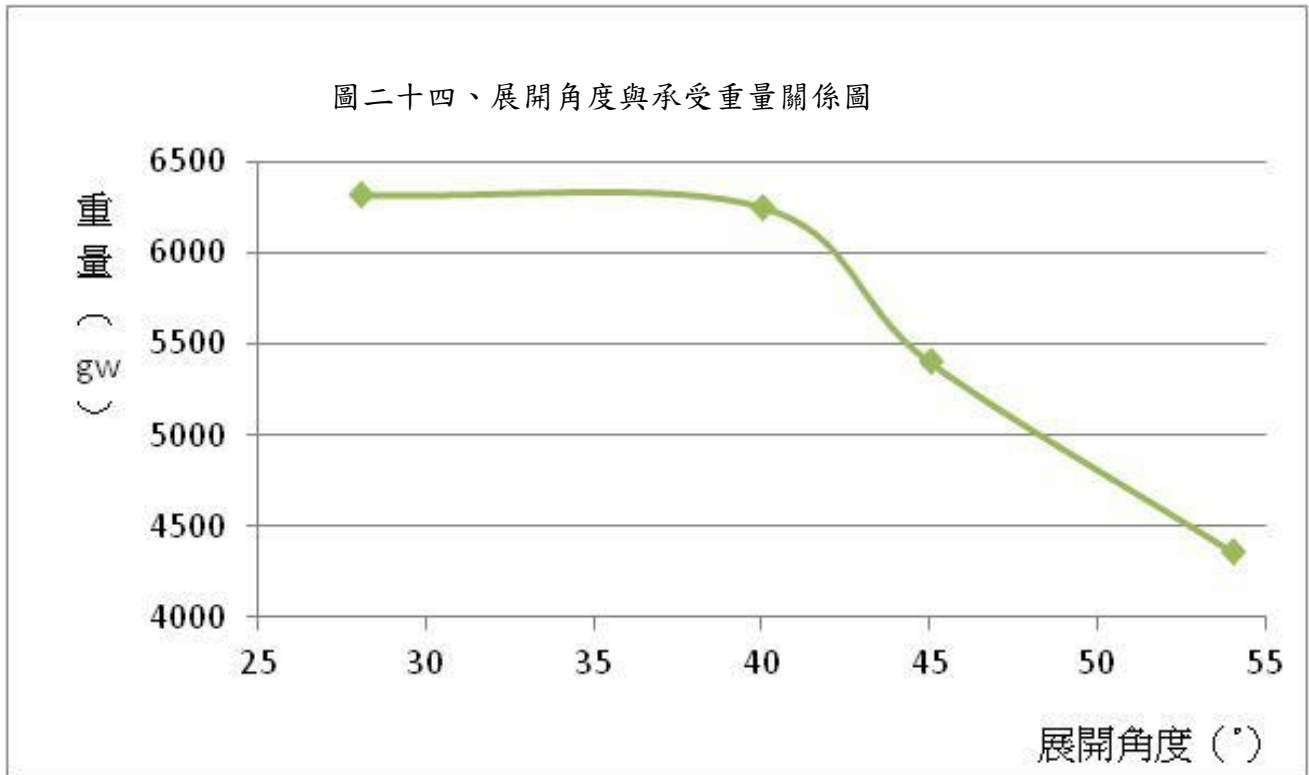
有逐漸增加的趨勢，前兩組展開面積因為承受較輕，所做出來的壓力數值很接近，後面兩組因為承受重量愈來愈重，放入桶內的砝碼及小白石如果放置位置不平均就很容易造成桶子傾斜，進而影響到結果，因此才去除最大及最小數據，只取三組數據；圖二十三是展開面積相同的三次實驗，取承受壓力的平均值所做出的摺線圖，從此圖更能清楚的看出展開的面積愈大，所能承受的壓力愈小，且此關係圖接近一直線，其程式為 $P = -0.4511A + 107.73$ 。

圖二十三、壓力與展開面積關係圖



三、三浦摺疊(直齒列 5×11 摺角 45°)展開的角度愈大，所能承受的重量及壓力愈小。

圖二十四是承受重量與展開角度摺線圖，圖二十五是承受壓力與展開角度摺線圖，從這兩個圖都可以清楚的看出展開的角度愈大，所能承受的重量及壓力愈小，而且從圖二十五可看出，似乎有些呈線性關係，需要進一步研究來確定。



四、一張 A4 紙最多可承受其重量的 1388.4 倍。

我們做出來的直齒列數 5x11、摺角 45° 的最大承受重量為 6317gw，而一張 A4 紙張重量約為 4.55gw，所以可承受其重量的 1388.4 倍。

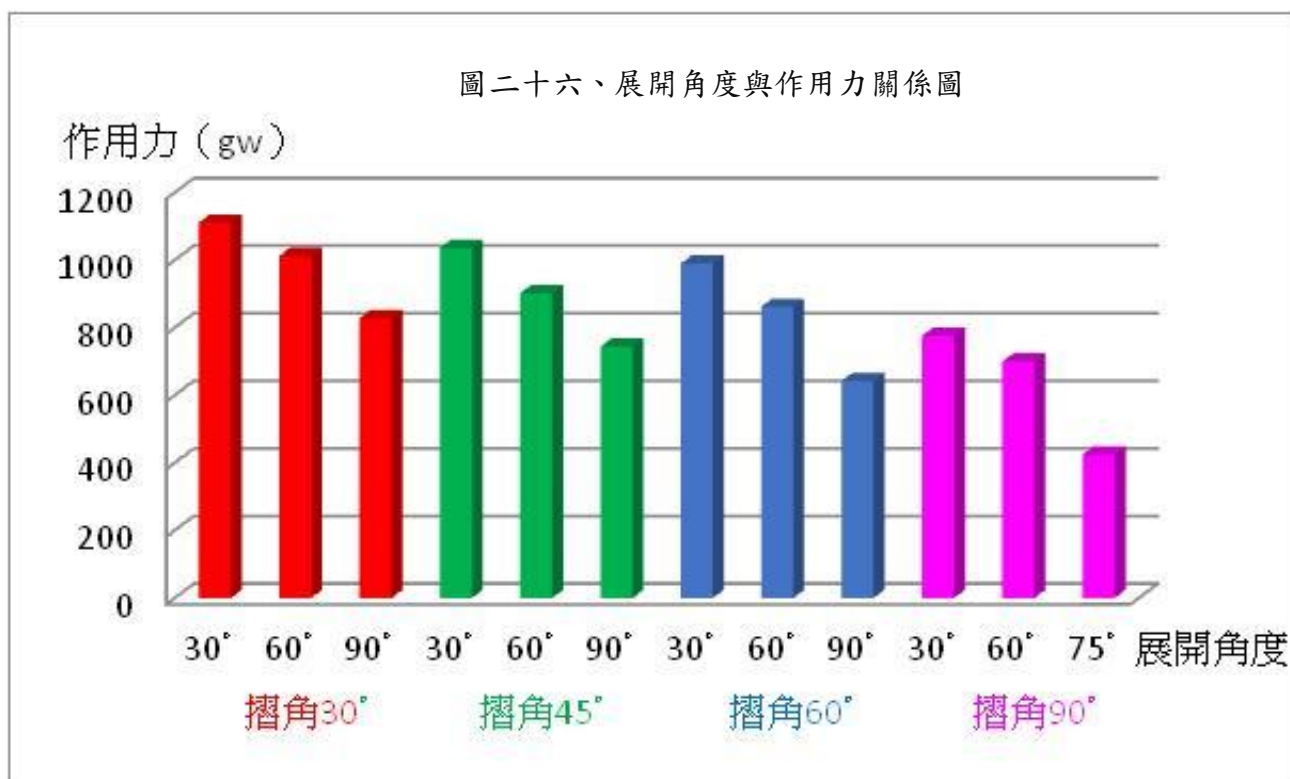
研究三：利用壓力模組，測量三浦摺疊開合角度與作用力之關係。

由研究二我們發現，三浦摺疊所能承受的壓力，除了和展開面積有關外，似乎和每一單體展開角度也有關，由於研究二展開後的每一單體展開角度皆不同（如表二①~⑥），所以我們打算針對一個單體做研究，將每種摺角及展開角度皆做三次實驗，取其平均值來畫出關係圖，下表三是實驗結果，圖二十六為展開角度與作用力關係圖，我們得到幾個結論：

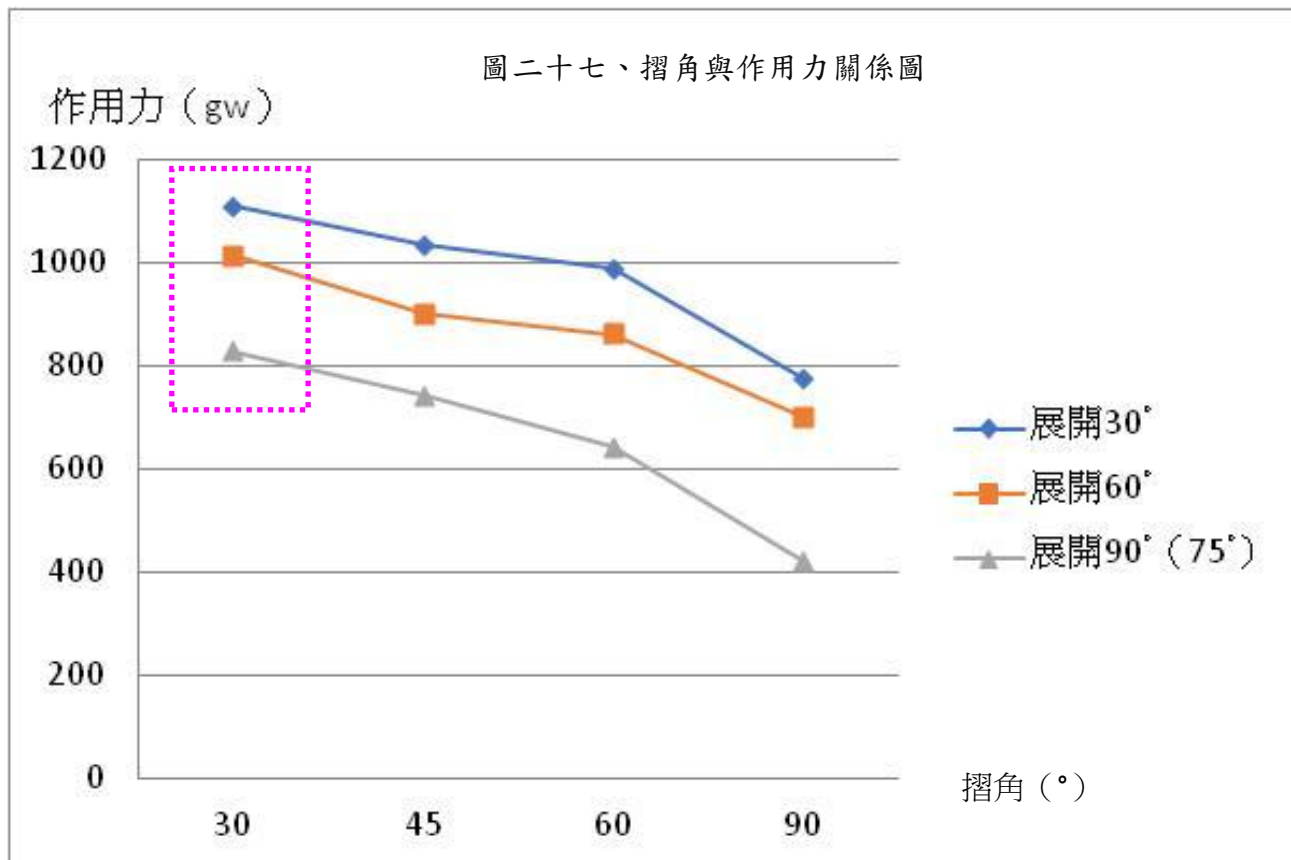
表三、直、齒列為 5x11 在不同摺角、不同展開角度下能承受的作用力

摺角	展開角度	Arduino 序列埠監控視窗最大數值 (fsrData)			平均 fsrData	電壓 V _{OUT} (V)	電阻 R _{FSR} (Ω)	作用力 (gw)
30°	30°	895	887	905	896	4.37	1175	1111
	60°	887	880	877	881	4.30	1327	1012
	90°	850	839	848	846	4.13	1729	828
45°	30°	888	890	877	885	4.32	1288	1036
	60°	855	863	867	862	4.21	1545	902
	90°	815	824	833	824	4.02	1990	744
60°	30°	890	870	873	878	4.29	1367	990
	60°	855	850	855	853	4.17	1640	862
	90°	791	793	789	791	3.86	2415	642
90°	30°	829	844	825	833	4.07	1884	776
	60°	813	808	811	811	3.96	2158	700
	75°	677	677	682	679	3.31	4172	424

圖二十六、展開角度與作用力關係圖

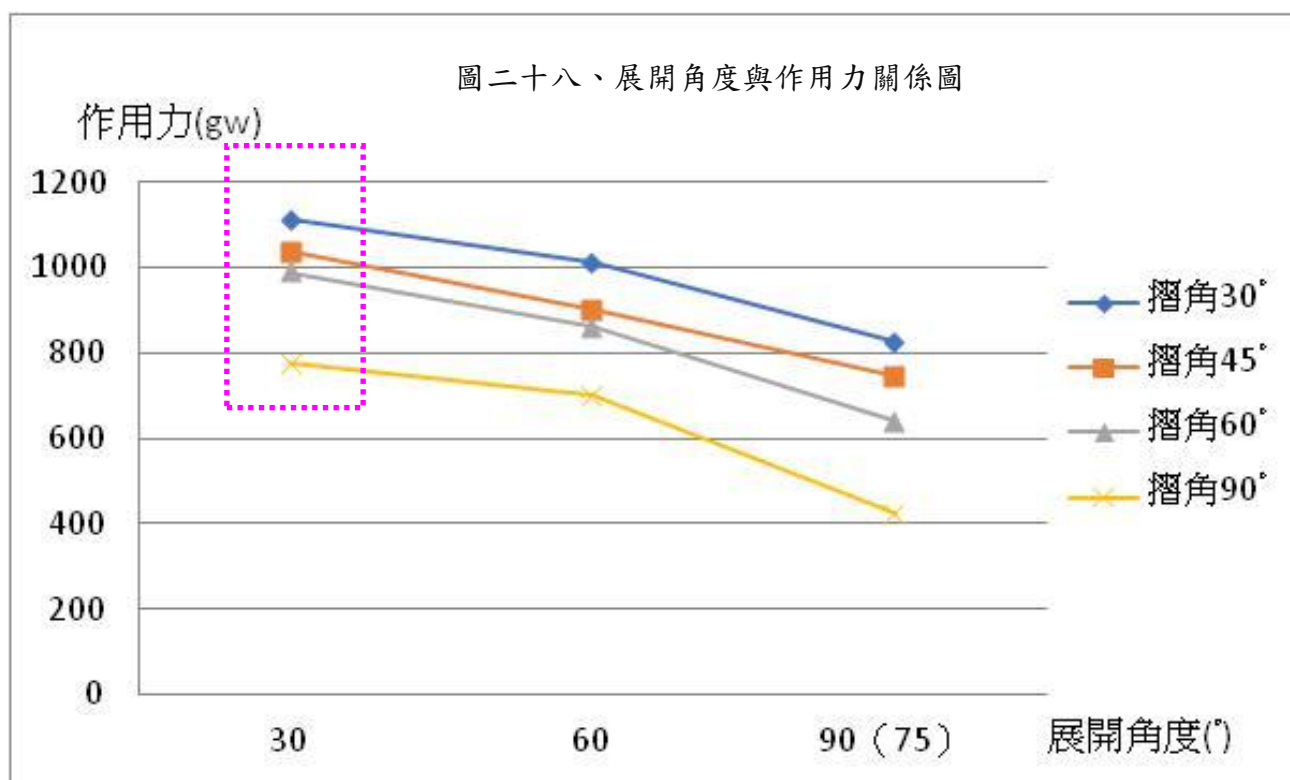


一、摺角愈小，能承受的作用力愈大。



從圖二十七可看到摺角最小的30°，不管展開角度是多少，都是同展開角度中能承受作用力是最大的。

二、展開角度愈小，能承受的作用力愈大。



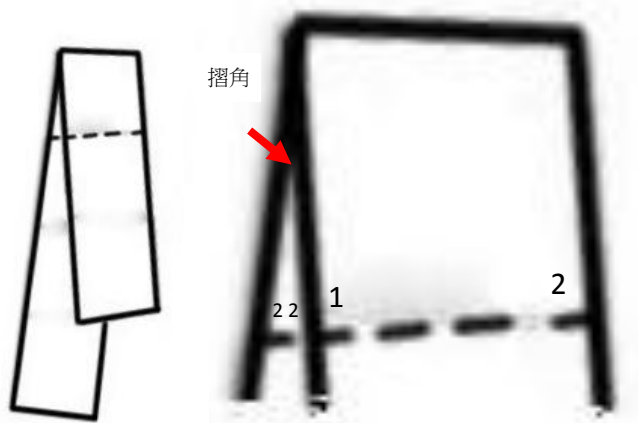
從圖二十八可看到展開角度最小的 30° ，不管摺角是多少，都是相同摺角中，能承受最大作用力。

陸、討論

一、為何摺疊角度與三浦摺疊所形成的平行四邊形鈍角、銳角之關係為：

$$\boxed{\text{摺角} = 180^\circ - 2 \text{銳角} = 2 \text{鈍角} - 180^\circ} ?$$

由研究一實驗步驟的第四步驟，我們發現在摺疊三浦摺疊時，此步驟會讓紙張形成一 A 字形紙條（圖二十九），我們將上方 A 字放大可發現形成左側為一等腰三角形，右側為一平行四邊形（圖三十），此平行四邊形即為三浦摺疊展開圖中的平行四邊形摺紋，我們設平行四邊形中的鈍角為 $\angle 1$ ，銳角為 $\angle 2$ 則左側的等腰三角形的兩



個底角剛好會等於 $\angle 2$ ，而三角形三內角和等於 180° ，等腰三角形的頂角也就是我們的摺角，三角形三內角合為 180° ，

所以 $\text{摺角} + 2\angle 2 = 180^\circ$

$$\text{摺角} = 180^\circ - 2 \text{銳角}$$

平行四邊形 $\text{銳角} + \text{鈍角} = 180^\circ$

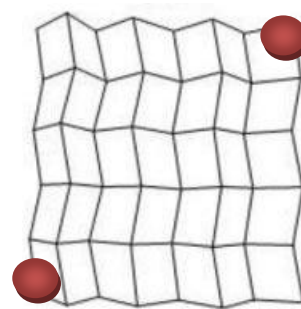
所以 $\text{摺角} = 2 \text{鈍角} - 180^\circ$

圖二十九、呈 A 字型紙條

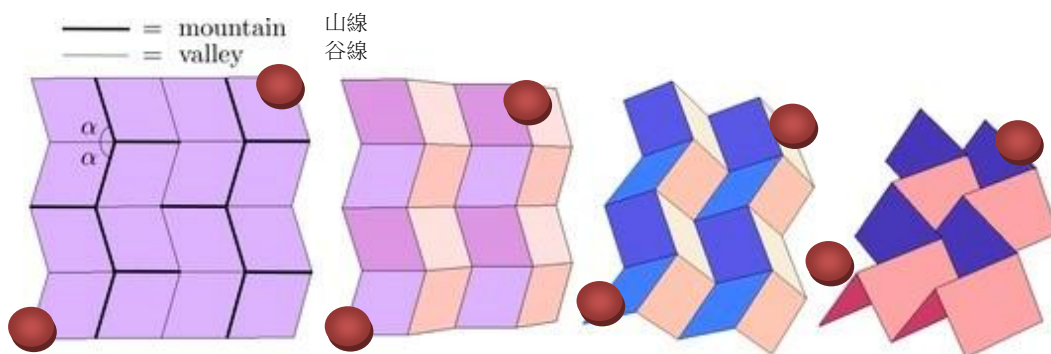
圖三十、A 字局部放大

二、為何三浦摺疊的直列數必須為奇數列？

三浦摺疊的開合，手需捏住紙對角兩端，如圖三十一紅點處才能開合，所以這兩端摺疊後必須在紙張的最外側，只有直列數為奇數才能辦得到，如為偶數列則會一端在外側，一端在內側而無法開合，如圖三十二所示左下角的紅點最後閉合後是在紙張內側。



圖三十一、開合時手持部位置



圖三十二、閉合時手持位置

三、為何摺痕上單一四邊形面積的算法為：

$$\text{平行四邊形面積} = \frac{\text{A4 紙面積}}{\text{直列數} \times \text{齒列數}}$$

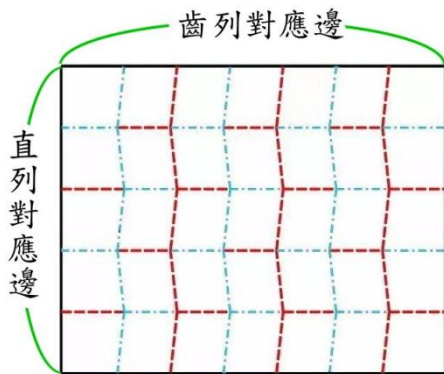
我們以圖三十三 5×7 為例可以發現，紙上的平行四邊形摺痕局部放大可看到其底剛好為 A4 紙長邊 $\div 7$ ，此長邊即為齒列對應邊；而高為 A4 紙短邊 $\div 5$ ，此短邊即為直列對應邊，因此

$$\text{底} = \frac{\text{齒列對應邊}}{\text{齒列數}} \quad \text{高} = \frac{\text{直列對應邊}}{\text{直列數}}$$

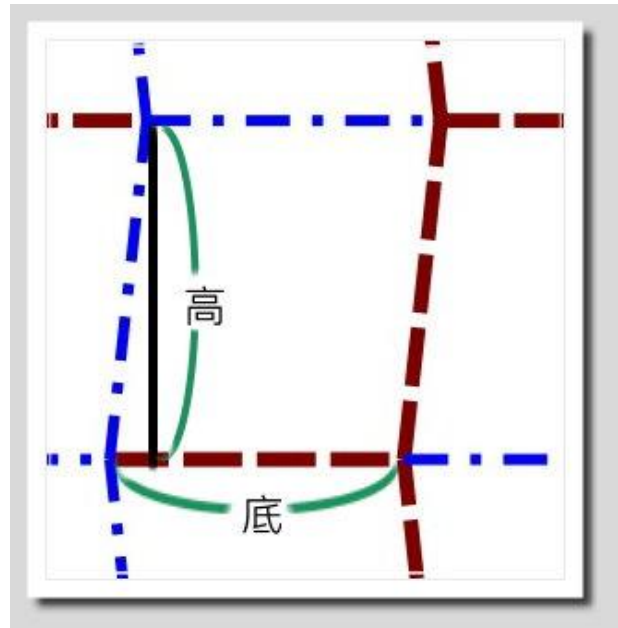
平行四邊形的面積 = 底 × 高

$$\text{平行四邊形的面積} = \frac{\text{齒列對應邊} \times \text{直列對應邊}}{\text{直列數} \times \text{齒列數}}$$

$$\text{平行四邊形的面積} = \frac{\text{A4 紙面積}}{\text{直列數} \times \text{齒列數}}$$



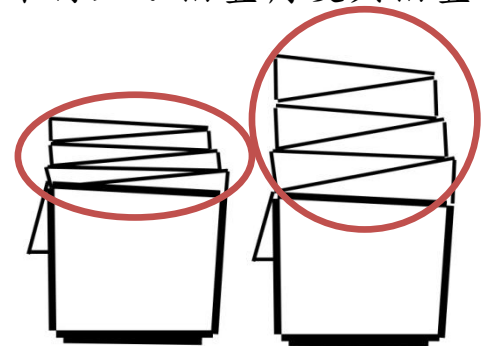
局部放大



圖三十三、直x齒列為 5x7 的展開圖與放大圖

四、為何實際面積縮小率比理想面積縮小率都來得大？摺疊角度與摺疊後面積有什麼關聯？

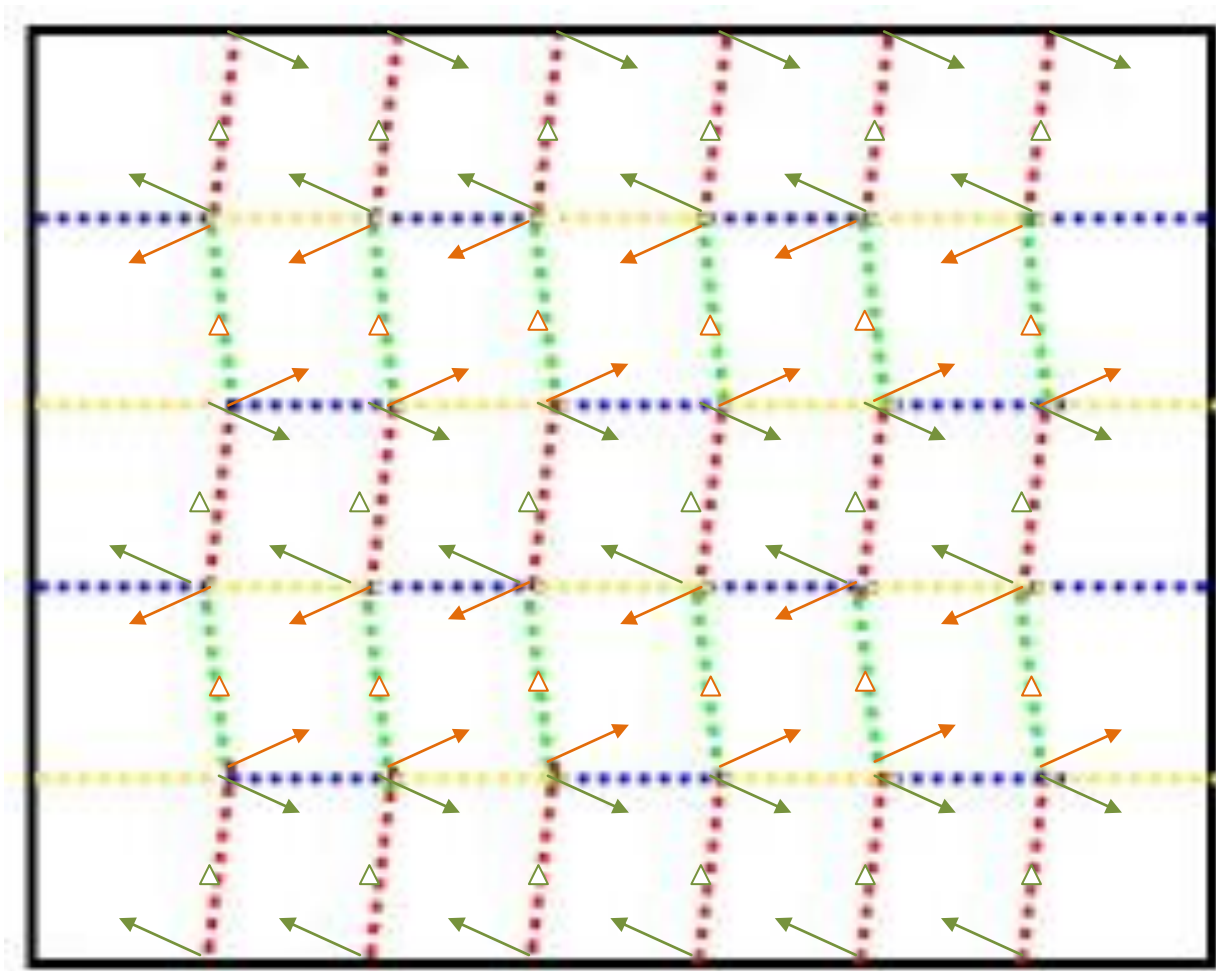
如圖三十四所示，左邊摺角比右邊摺角小，紅圈部分面積也比右邊小，也就是無法完全重疊的部分面積較小，因此摺疊角度越大，摺合後紅圈處面積就變大。而且角度愈大縮小率愈大，原因是因為摺疊後，**因為角度的關係會多出圖紅圈部分面積，且角度愈大，這部分面積就愈大**，也就是剛好摺角為 0° 時，才會符合理想縮小面積，那摺合的平行四邊形就會變成矩形，可是那樣就很難閉合。



圖三十四、閉合後會多出之字形部分

五、為什麼三浦摺疊，摺角須大於 0° 才能閉合？

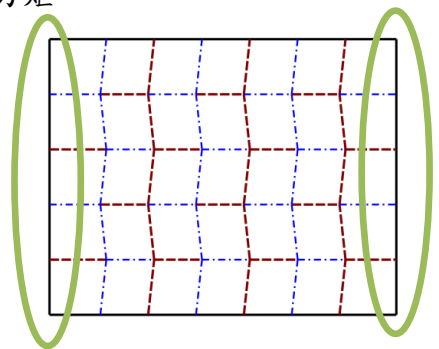
原因是當摺角大於 0° 時，圖三十五中紅色摺紋會產生一順時針力矩並成為山線，而綠色摺紋會產生一逆時針力矩也成為山線，藍色摺紋會升起成為山線，黃色摺紋會下降成為谷線，這些力矩及力，會讓紙張俯視面積沿著摺痕而慢慢縮小，紙張慢慢呈立體狀，最後完成摺合如圖三十四；如果摺角是 0° ，因無斜角撐著，紙張會迅速合成一長條狀，方向相對的兩個力會剛好在同一直線上，如此就無法產生一力矩，讓紙張無法自然合成鋸齒條狀來進行閉合；因此三浦摺疊上的摺痕需為平行四邊形，不能是矩形，但角度愈小，藍、黃紋會愈快疊合，造成愈容易疊成條狀而愈難閉合。



圖三十五、縮合時三浦摺疊摺痕上的力矩

六、為什麼直列數較多，摺合後的面積可縮得較小？

由三浦摺疊的展開圖中我們可以看到，直列可將紙張整齊的疊合起來，而齒列在紙張末端圖三十六中圈起處並未能整齊疊起，因此圖十六~圖十八雖然只是直列數與齒列數互換，摺痕上的平行四邊形面積也相同，但橘色柱因直列數多，整齊疊起部分也多，所以面積縮小率皆比藍色柱小。



圖三十六、未整齊摺合部分

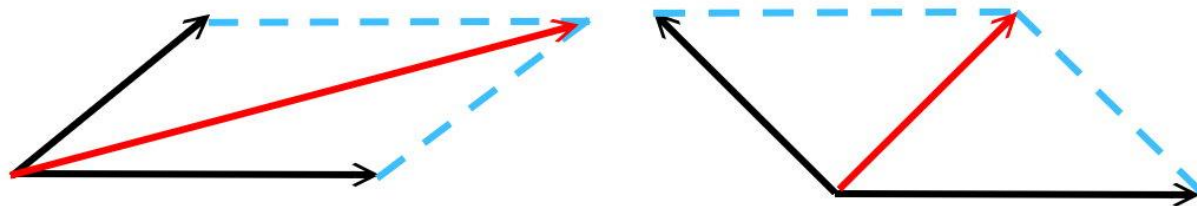
七、為何直列數相同，齒列數愈多面積縮小率愈小？

從圖十九中可看到齒列數愈多面積縮小率愈小，這是因為摺痕中的平行四邊形當直列數相同時，高就會相同，但齒列數愈多底就愈小，當然平行四邊形的面積就愈小；雖然我們並未做同齒列數，但那只是變成底相同，高會變小，結果類似。

八、為什麼三浦摺疊的成品及單體，一開始要用吹風機吹？

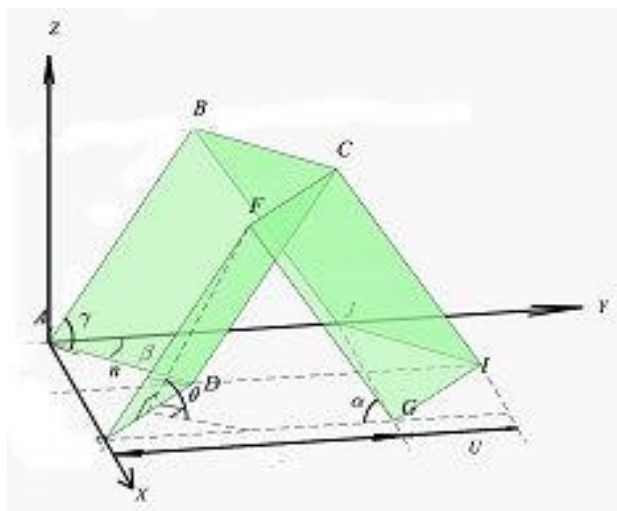
由於我們實驗地點位於地下室，且實驗時間是在暑假，常常下雨，造成整體環境較為潮濕，存放於地下室的實驗紙張因而潮濕軟化，可能影響實驗結果，因此必須將摺好後的三浦摺疊成品，用吹風機熱風吹乾，使誤差降低。

九、為何三浦摺疊展開的面積、角度愈大，所能承受的重量愈小？

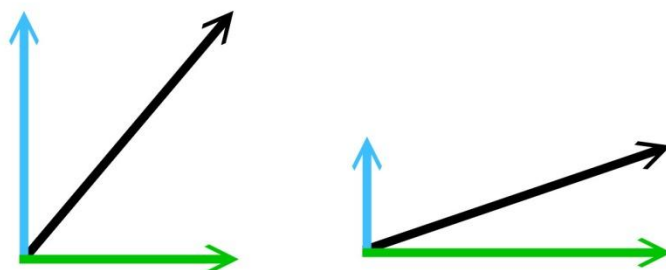


圖三十七、以平行四邊形作圖法推測不同夾角的兩力的合力大小

以二力合力來看，當兩力張開角度愈大，其所形成的合力會愈小，如圖三十七，因此當三浦摺疊展開面積愈大，圖三十八單體中的 $\angle ICD$ 會變大，假設沿著 \overline{DC} 及 \overline{IC} 的紙張強度是固定的，則當 $\angle ICD$ 會變大時，兩支撐力的合力會變小，造成承受重量變小，此外我們從底部來看，當三浦摺疊展開面積愈大時，整個高度會變小，也就是 $\angle \theta$ 及 $\angle \alpha$ 都會變小，則圖三十九中 \overline{DC} 及 \overline{IC} 的紙張最大強度（黑色箭頭表示）的垂直分力（藍色箭頭表示）就會變小，因此造成能承受重量變小。



圖三十八、單體各部分角度位置



圖三十九、紙張強度的垂直分力

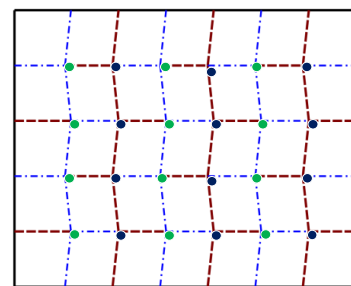
十、三浦摺疊是否遵守前川、川崎定理？

前川淳 (Maekawa) - Justin 定理：令單點摺紋中 M 是山摺數目， V 是谷摺數目，如果該摺紋樣式是有效的，則 $M - V = \pm 2$ 。圖四十、摺痕交點上山線谷線數

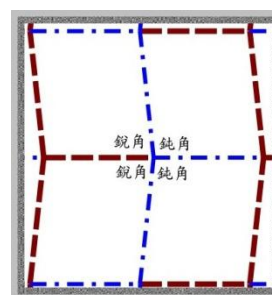
而我們研究三浦摺疊的摺痕交點可發現：如果山線數目為 3，則谷線數目必為 1，如圖四十上綠點；山線數目為 1，谷線數目必為 3，如圖四十上藍點；因此兩者相減必為 2，符合前川定理。

川崎敏和 (Kawasaki) - Justin 定理：在單點摺紙中，令平面摺紙摺紋的交點周圍有 $2n$ 個角， $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ 是摺紋間連續夾角。則 $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots - \alpha_{2n} = 0$ 。

圖四十一為三浦摺疊的摺痕交點，每一交點四周會有四個角，而不管是逆時針或順時針算起，鈍角與銳角一定會成一正一負，加起來一定為零，例如從上方藍色摺痕順時針算起，則得：
鈍角 - 鈍角 + 銳角 - 銳角 = 0，符合川崎定理。



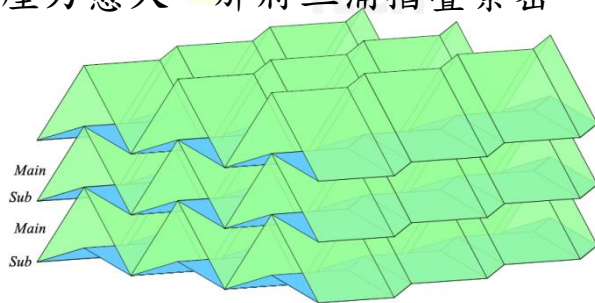
圖四十、摺痕交點上山線谷線數



圖四十一、摺痕交點上的銳、鈍角

十一、三浦摺疊展開面積愈小，所能承受壓力愈大，那將三浦摺疊緊密排列不就可以達到最大強度？

要視應用於實際物體所需強度，如果強度不需要太大，考慮成本選擇適當的展開面積可節省材料，如果強度需要很大，除了緊密排列讓展開面積縮到最小，也可增加層數如圖四十二，或是增加紙張厚度、改變材質來達成目的。

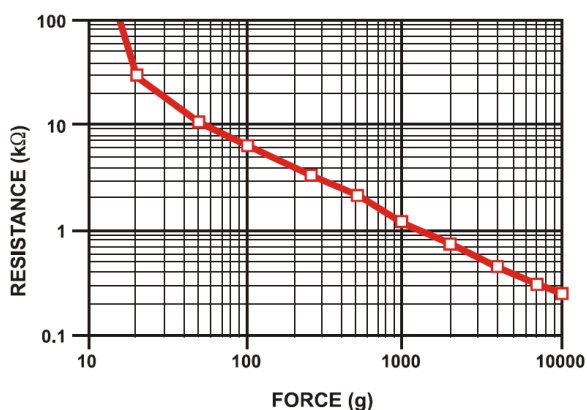


圖四十二、多層三浦摺疊

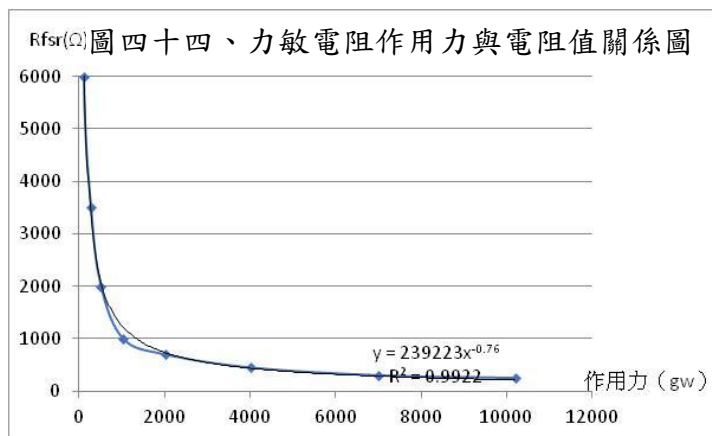
十二、為何使用螺旋起重器來對單體施壓？

如果直接用手對力敏電阻施壓，可能力量增加幅度會不一樣，使用螺旋起重器只要螺桿旋螺速度一樣，力量增加幅度就會相同，使實驗準確度增加。

十三、壓力感測器的原理為何？



圖四十三、力敏電阻作用力、電阻規格圖



圖四十四、力敏電阻作用力與電阻值關係圖

其實壓力感測器就是個電阻，根據施加的力量，其電阻值會改變，此產品的規格如圖四十三，無壓力時電阻幾近無限大，施加壓力後，電阻就會變小，不過施加壓力的力道與電阻之間的變化關係，並非線性，我們依其產品規格找到曲線公式為 $R_{fsr} = 239223 \times F^{-0.76}$ ，如圖四十四，而我們換算出來的電阻值在 1175~4172Ω，因此施力應在 1111~424gw。

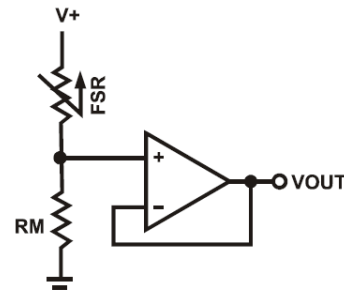
十四、Arduino 序列埠監控視窗的數值如何換算成實際電阻值？

首先我們將讀取的 fsrData (0~1023 之間的數字)轉換成電壓值
我們使用的電壓為 5V，電阻為 8.2kΩ，因此 $V^+ = 5V$ ， $R_M = 8.2k\Omega$

$$V_{OUT} = \frac{fsrData}{1024} \times 5 \quad \text{如圖四十五則} \quad V_{OUT} = \frac{8200}{R_{FSR} + 8200} \times 5$$

$$\text{結合上述兩式得：} \quad \frac{fsrData}{1024} = \frac{8200}{R_{FSR} + 8200}$$

$$\text{所以} \quad R_{FSR} = \frac{8200 \times 1024}{fsrData} - 8200$$

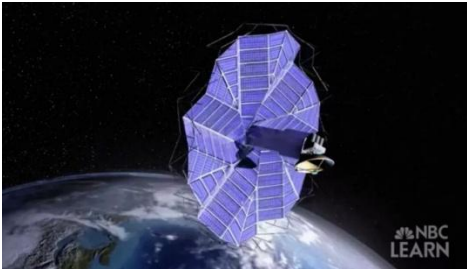


圖四十五、力敏電阻電路圖

十五、材料經由三浦摺疊後，材料不但變得小巧緊實，更能避免材料在摺疊和展開的過程中快速磨損。有了這些優點，三浦摺疊還能應

用在那些地方呢？

除了「摺紙密碼」影片中提到可應用於衛星太陽能板（圖四十六）、心導管支架、飛機機艙牆壁外，小地方如地圖摺疊、服裝設計（圖四十七）、屏風、澡池蓋、飲料罐（圖四十八），大的地方則因三浦摺疊為既能承重、又易維護、用料較省、勁度較大的薄壁結構，且收縮施展方便快捷，可用在倉庫、修護廠、車站、學校、住宅、亭廊、游泳池、體育場看台等建築屋頂，臨時避難所外牆。



圖四十六、衛星太陽能板



圖四十七、服裝設計



圖四十八、飲料罐

柒、參考資料

- 一、公視主題之夜（民 107 年 3 月 9 日）。摺紙密碼。取自：
<https://www.youtube.com/watch?v=6eWfUNNSk6Y>
- 二、湯瑪斯·赫爾（撰文）涂瑋瑛（翻譯）（民 105 年 12 月 12 日）。摺紙：摺痕中的數學。CASE 摺紙專欄。取自：<https://case.ntu.edu.tw/blog/?p=23728>
- 三、葉難（民 102 年 9 月 18 日）。Arduino 練習：壓力感測器。取自：
<http://yehnan.blogspot.com/2013/09/arduino-force-sensitive-resistor.html>
- 四、吳嘉祺（民 106 年 7 月 7 日）。會摺疊的航天太陽能板，家裡也可以做啊。把科學帶回家。取自：<https://kknews.cc/news/ogy3n9p.html>
- 五、Tom Yen（民 103 年 7 月 12 日）。力敏電阻 FSR (Force Sensing Resistor)。Share！樂讀分享。取自：
<http://thats-worth.blogspot.com/2014/07/fsr-force-sensing-resistor.html>
- 六、李國偉（民 97 年 12 月 3 日）。摺紙與數學。臺北市立建國高中林信安老師整理。取自
<http://www.google.com.tw/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=2ahUKEwipg7jXirrkAhU-xosBHUhOChsQFjABegQIBBAC&url=http%3A%2F%2Fmathcenter.ck.tp.edu.tw%2FResources%2FCtrl%2FePaper%2FePaperOpenFileX.ashx%3FautoKey%3D110&usg=A0vVaw3P0FtsmdV6-n5QrngWvDPc>
- 七、林彥廷（民 107 年 7 月）。三浦摺疊結構的幾何分析與力學。國立臺北科技大學土木工程系土木與防災碩士班碩士學位論文。