屏東縣第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：穿梭空間，遇見分歧點

關 鍵 詞：切線斜率、橢圓拋物面、判別式

編號：

目錄

壹、研究動機

在研究過去學長姊的作品中(屏東縣第53屆國中數學科展-舞動的曲線)，發現運用代數方法處理交點分歧性過於複雜，我們改由切線斜率的角度處理，找出一般性的結果，並推廣到立體橢圓拋物面，找出其交點分歧性。

貳、研究目的

一、找出對稱於$y = rx$的兩拋物線，其交點的分歧性質為何？
二、找出兩對稱拋物線，經由線性變換(旋轉)後，其交點的分歧性質為何?
三、找出對稱於平面$x = rz$的兩橢圓拋物面，其交點的分歧性質為何？
四、找出兩對稱橢圓拋物面，經由尤拉角旋轉後，其交點分歧性質為何？

參、研究設備與器材

Maxima數學軟體
GeoGebra數學軟體

肆、研究過程

一、文獻探討：

我們在學姊的作品中發現了有關對稱線性的交點探討，以下是部分結論:
對稱於 $x=y$ 的兩拋物線可表示成 $y=ax^2+bx+c$ 與 $x=ay^2+by+c\ (a\neq 0)$，當時要研究兩函數圖形交點數量的分歧性質。在 $a<0$ 的條件下，$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ x=ay^2+by+c \end{cases}$ 我們可以知道，若聯立方程式有解，則必定會有落在 $x=y$ 上的交點 $X^*=(x^*,x^*)$，所以 $ax^{*2}+(b-1)x^*+c=0$ 得到以下定理:
(*表示當年所使用定理與方程式)

> 定理一*：(1)若 $(b-1)^2-4ac<0$ ，沒有交點。
> (2)若 $(b-1)^2-4ac=0$ ，恰有1個交點。
> (3)若 $(b-1)^2-4ac>0$ ，有2個或4個交點。

接下來針對2個或4個交點來作討論。在 $a<0$ 的條件下，$\begin{cases} y=ax^2+bx+c...(4*) \\ x=ay^2+by+c...(5*) \end{cases}$，(4*)代入(5*)
$\Rightarrow a^3x^4+2a^2bx^3+(ab^2+2a^2c+ab)x^2+(2abc+b^2-1)x+(ac^2+bc+c)=0$
在 $a=-1$ 的條件下，我們固定 b 值來分析其交點的個數，至於其它 b 值的函數圖形，其交點個數可視為與原函數圖形平移後有相同結果。取 $b=1,c$ 為參數，可以得到下列方程式
$x^4-2x^3-2(c-1)x^2+2cx+c(c-2)=0\ \cdots(6*)$，由定理一*-(3)可知 $(b-1)^2-4ac>0\Rightarrow c>0$
(取 $a=-1$ 、$b=1$)的條件下去討論。由於一元四次方程式的判別式過於複雜，我們利用以下引理:

> 引理一*：方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0(a\neq 0)$ 轉換成 $x^4+px^2+qx+r=0$ 的四個根為
> $$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}(\sqrt{-y_1}+\sqrt{-y_2}+\sqrt{-y_3}) \\ x_2=\dfrac{1}{2}(\sqrt{-y_1}-\sqrt{-y_2}-\sqrt{-y_3}) \\ x_3=\dfrac{1}{2}(-\sqrt{-y_1}+\sqrt{-y_2}-\sqrt{-y_3}) \\ x_4=\dfrac{1}{2}(-\sqrt{-y_1}-\sqrt{-y_2}+\sqrt{-y_3}) \end{cases}$$
> 其中 y_1、y_2、y_3 為方程式 $y^3-2py^2+(p^2-4r)y+q^2=0$ 之三根。

利用引理一*，我們將 $x^4-2x^3-2(c-1)x^2+2cx+c(c-2)=0\ \cdots(6*)$，轉換成方程式

$\hat{x}^4-(2c-\frac{1}{2})\hat{x}^2+\hat{x}+(c^2-\frac{3}{2}c+\frac{5}{16})=0\ \cdots(7*)$，令 $p=-(2c-\frac{1}{2})$ 、$q=1$ 、$r=c^2-\frac{3}{2}c+\frac{5}{16}$ ，則方程式為 $\hat{x}^4+p\hat{x}^2+q\hat{x}+r=0\ \cdots(8*)$。引進變數 y ，使得 y_1、y_2、y_3 為方程式

$y^3-2py^2+(p^2-4r)y+q^2=0\ \cdots(9*)$之三根，其中

$$\begin{cases}\hat{x}_1=\frac{1}{2}(\sqrt{-y_1}+\sqrt{-y_2}+\sqrt{-y_3}) & \hat{x}_3=\frac{1}{2}(-\sqrt{-y_1}+\sqrt{-y_2}-\sqrt{-y_3}) \\ \hat{x}_2=\frac{1}{2}(\sqrt{-y_1}-\sqrt{-y_2}-\sqrt{-y_3}) & \hat{x}_4=\frac{1}{2}(-\sqrt{-y_1}-\sqrt{-y_2}+\sqrt{-y_3})\end{cases}$$

所以只要能找出判別(9*)式的解的條件，則對於(6*)式的解就能加以分析。

> 引理二*：Cardano’ s method
>
> 方程式 $x^3+b'x^2+c'x+d'=0$ 代換未知項 $x=z-\frac{b'}{3}$ 以消去二次項，可得
>
> $z^3+p'z+q'=0$，其中 $\begin{cases}p'=c-\frac{b'^2}{3}\\ q'=\frac{2b'^3}{27}-\frac{b'c'}{3}+d'\end{cases}$ 其判別式為 $\Delta=\frac{q'^2}{4}+\frac{p'^3}{27}$
>
> 其中，$\begin{cases}\Delta>0 \text{ 有一實根與兩共軛虛根}\\ \Delta<0 \text{ 有三不等實根}\\ \Delta=0 \text{ 有三重實根}(\frac{q'^2}{4}=-\frac{p'^3}{27}=0)\text{或二重實根一單實根}(\frac{q'^2}{4}=-\frac{p'^3}{27}\neq 0)\end{cases}$

利用引理二*，我們分析(9*)式的解的條件:

令 $y=z+\frac{2p}{3}$，轉換成方程式 $z^3-(\frac{p^2}{3}+4r)z+(\frac{2}{27}p^3-\frac{8}{3}rp+q^2)=0$ …(10*)

令 $p'=-(\frac{p^2}{3}+4r)$ 、$q'=\frac{2}{27}p^3-\frac{8}{3}rp+q^2$，且因為 $p=-(2c-\frac{1}{2})$ 、$q=1$ 、$r=c^2-\frac{3}{2}c+\frac{5}{16}$

所以 $p'=-\frac{1}{3}(16c^2-20c+4)$ 、 $q'=\frac{128}{27}c^3-\frac{80}{9}c^2+\frac{32}{9}c+\frac{16}{27}$。可以表示出

$$\Delta=\frac{q'^2}{4}+\frac{p'^3}{27}=-\frac{64}{27}c^4+\frac{64}{9}c^3-\frac{64}{9}c^2+\frac{64}{27}c=-\frac{64}{27}c(c-1)^3$$

我們得到以下結論一*，在 $a=-1$ 、$b=1$ 、$c>0$ 的條件下:

(1)當 $0<c\le 1$，則判別式 $\Delta=\frac{q'^2}{4}+\frac{p'^3}{27}\ge 0$，圖形有兩個交點。

(2)當 $c>1$，則判別式 $\Delta=\frac{q'^2}{4}+\frac{p'^3}{27}<0$，圖形有四個交點。

在 $a=-1$ 的條件下，現在我們改成固定 c 值來分析其交點的個數，至於其它 c 值的函數圖形，其交點個數可視為與原函數圖形平移後有相同結果。取 $c=-1, b$ 為參數，可以得到下列方程式 $x^4-2bx^3+(b^2+b+2)x^2-(b^2+2b-1)x+(b+2)=0$ …(11*)，由引理二-(3)可知 $(b-1)^2-4ac>0$（取 $a=-1$ 、$c=-1$）的條件下去討論: $(b-1)^2>4\Rightarrow b>3$ 或 $b<-1$

同理利用引理一*與引理二*我們得到判別式為，

$$\Delta=\frac{q''^2}{4}+\frac{p''^3}{27}=-\frac{b^8}{108}+\frac{2}{27}b^7-\frac{28}{27}b^5+\frac{31}{54}b^4+6b^3-\frac{14}{27}b^2-\frac{392}{27}b-\frac{343}{36}$$

因為次方較高，我們利用maxima軟體求出根為 $b=-1$(三重根) 、3(三重根)、$1\pm 2\sqrt{2}$ 。

我們得到以下結論二*，在 $a=-1$ 、$c=-1$ 且 $b>3$ 或 $b<-1$ 的條件下:

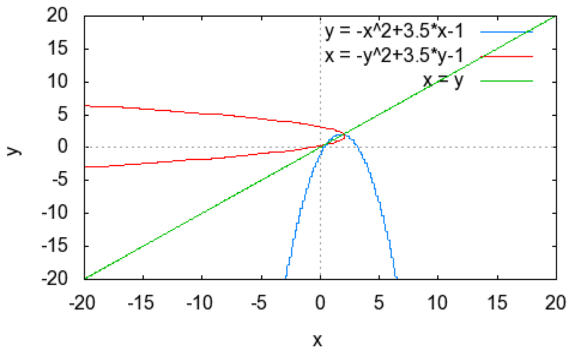
(1)當 $3<b\le 1+2\sqrt{2}$，則判別式 $\Delta=\frac{q''^2}{4}+\frac{p''^3}{27}\ge 0$，圖形有兩個交點。

(2)當 $b>1+2\sqrt{2}$，則判別式 $\Delta=\frac{q''^2}{4}+\frac{p''^3}{27}<0$，圖形有四個交點。

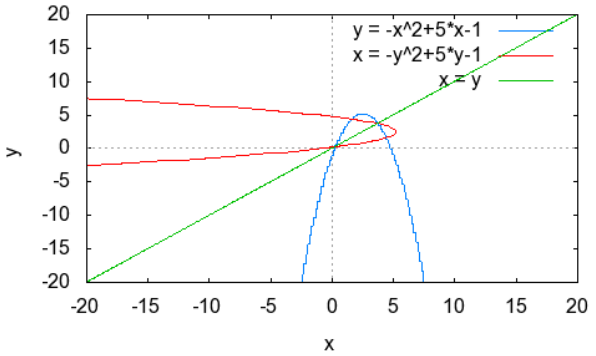
(3)當 $1-2\sqrt{2}\le b<-1$，則判別式 $\Delta=\frac{q''^2}{4}+\frac{p''^3}{27}\ge 0$，圖形有兩個交點。

(4)當 $b<1-2\sqrt{2}$，則判別式 $\Delta=\frac{q''^2}{4}+\frac{p''^3}{27}<0$，圖形有四個交點。

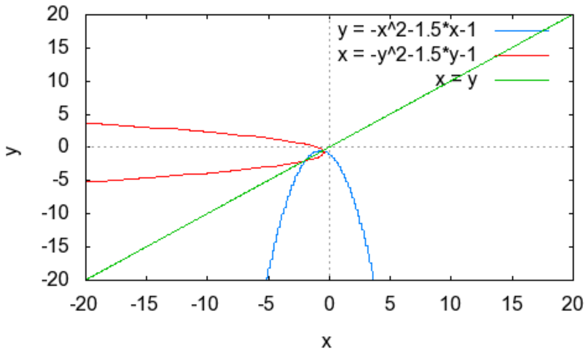
數據模擬



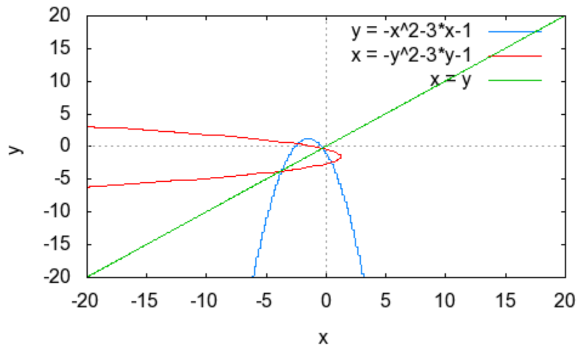
【參數：$a=-1$、$b=3.5$、$c=-1$】



【參數：$a=-1$、$b=5$、$c=-1$】



【參數：$a=-1$、$b=-1.5$、$c=-1$】



【參數：$a=-1$、$b=-3$、$c=-1$】

二、研究主題:

1. 改良代數求解方法討論對稱於$x=y$的兩拋物線，其交點的分歧性

在文獻中，我們可以發現有兩個主要的問題，分別是需要對係數進行限制與求解過程過於繁雜，然而仍無法得到一般性，因此我們嘗試提出不同於文獻的方法來討論。

(1)因式分解的角度處理

對稱於$x=y$之兩拋物線可表示成$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ x=ay^2+by+c \end{cases}$ $(a<0)$，解此聯立方程式可得一個四次方程式:

$$a^3x^4+2a^2bx^3+(ab^2+2a^2c+ab)x^2+(2abc+b^2-1)x+ac^2+bc+c=0\cdots(1)$$

將(1)式因式分解成$\left(ax^2+(b-1)x+c\right)\left(mx^2+nx+k\right)=0$，其中 $ax^2+\left(b-1\right)x+c=0$的解表示兩對稱拋物線落在對稱軸上的交點，而$mx^2+nx+k=0$表示沒有落在對稱軸上的交點(由定理六證明知道，其實該交點是由與對稱軸垂直且通過分歧點的直線以及拋物線間的交點，後面說明)。我們令$\begin{cases} D_1=(b-1)^2-4ac \\ D_2=n^2-4mk \end{cases}$，可得定理一

定理一:

(1)若 $D_1\times D_2<0$ ($D_1>0$且$D_2<0$)，二實根且一對共軛虛根。(圖形有2個交點)

(2)若 $D_1\times D_2=0$ ($D_1=0$或 $D_1>0$、$D_2\leq 0$)，有一重根。
(圖形有1個交點或2個交點且有一個分歧點)

(3)若 $D_1\times D_2>0$ ($D_1>0$、$D_2>0$ 或 $D_1<0$) ，四實根或兩對共軛虛根。
(圖形有4個交點或沒有交點)

由對應係數知道

$$\left(ax^2+\left(b-1\right)x+c\right)\left(mx^2+nx+k\right)=a^3x^4+2a^2bx^3$$
$$+\left(ab^2+2a^2c+ab\right)x^2+\left(2abc+b^2-1\right)x+ac^2+bc+c=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} am=a^3 \\ m\left(b-1\right)+na=2a^2b \\ n\left(b-1\right)+mc+ak=ab^2+2a^2c+ab \\ nc+k\left(b-1\right)=2abc+b^2-1 \\ ck=ac^2+bc+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=a^2 \\ n=ab+a \\ k=ac+b+1 \end{cases} \cdots(2)$$

可以得到以下結論:

I. 若圖形有無交點，則 $D_1 < 0 \Leftrightarrow (b-1)^2 - 4ac < 0$

II. 若圖形有一交點，則 $D_1 = 0 \Leftrightarrow (b-1)^2 - 4ac = 0$

III. 若圖形有兩個交點，則 $D_1 > 0$、$D_2 \le 0 \Leftrightarrow (b-1)^2 - 4ac > 0$且$n^2 - 4mk \le 0$

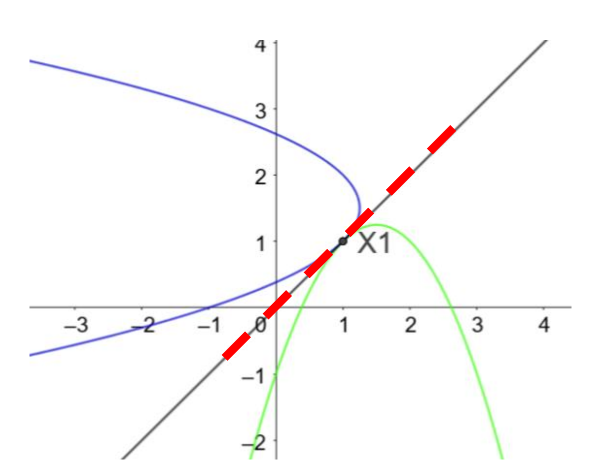
$\Leftrightarrow (b-1)^2 - 4ac > 0$且$(ab+a)^2 - 4a^2(ac+b+1) \le 0 \Leftrightarrow 0 < (b-1)^2 - 4ac \le 4$

IV. 若圖形有四交點，則 $D_1 > 0$、$D_2 > 0 \Leftrightarrow (b-1)^2 - 4ac > 0$且$n^2 - 4mk > 0$

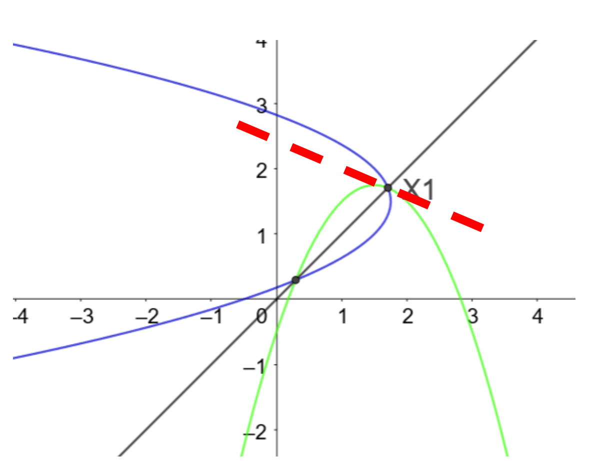
$\Leftrightarrow (b-1)^2 - 4ac > 4$

(2)切線斜率的角度處理

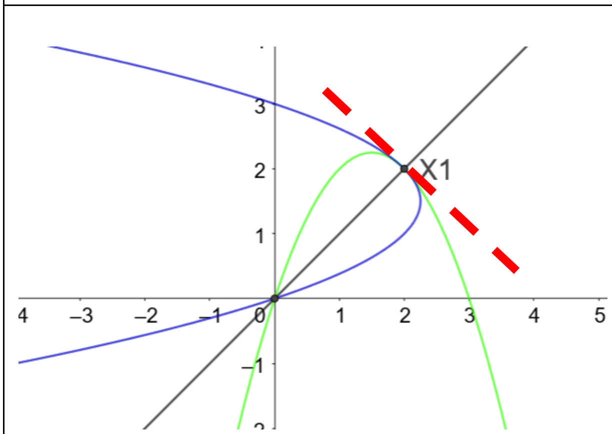
在討論完代數方法後，為了更加簡化問題，我們嘗試從切線斜率的角度處理，仔細觀察圖形可以發現，當出現一個交點X_1的時候，如圖(1)；通過該點的切線斜率m與$x = y$的斜率相同皆為1，圖形從一個交點到兩個交點時，X_1的切線斜率逐漸減少為$-1 < m < 1$，如圖(2)；圖形從兩個交點要到四個交點之前稱為分歧點X_1，其切線斜率$m = -1$，如圖(3)；圖形為四個交點的時候，X_1的切線斜率$m < -1$如圖(4)。



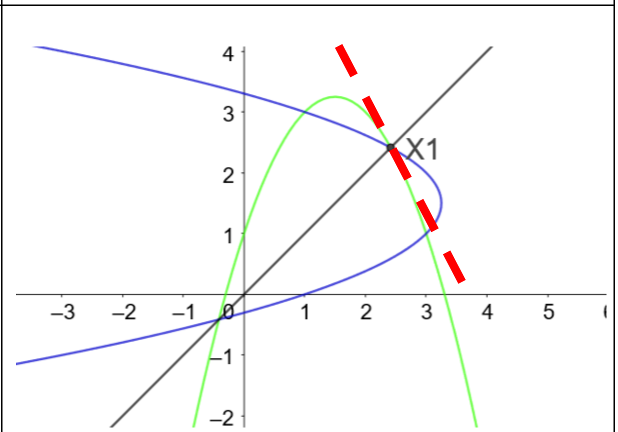
圖(1)



圖(2)



圖(3)



圖(4)

引理一：(1)若 $(b-1)^2-4ac<0$，沒有交點。

(2)若 $(b-1)^2-4ac=0$，恰有1個交點。

(3)若 $(b-1)^2-4ac>0$，有2個或4個交點。

(來源:參考文獻中定理一)

接下來處理引理一-(3)，針對圖形在什麼性質下會有2個或4個交點來做討論。由引理一-(3)可知 $(b-1)^2-4ac>0$，則 $ax^2+(b-1)x+c=0$ 有兩相異解 x_1、x_2 分別為點 X_1、X_2 的 x 坐標。其解為:

$$x_1=\frac{-(b-1)-\sqrt{(b-1)^2-4ac}}{2a}、x_2=\frac{-(b-1)+\sqrt{(b-1)^2-4ac}}{2a}(a<0、x_1>x_2)$$

我們針對 X_1 的切線斜率來討論，令 $f(x)=ax^2+bx+c$，則 $m=f'\left(x_1\right)=2ax_1+b$，得到定理二:

定理二：(1)若 $-1\le m<1$，則 $4\ge(b-1)^2-4ac>0$ 圖形有兩個交點。

(2)若 $m<-1$，則 $(b-1)^2-4ac>4$ 圖形有四個交點。

證明:

(1)若 $-1\le m<1 \Leftrightarrow -1\le 2ax_1+b<1$

$$\Leftrightarrow \frac{-1-b}{2a}\ge x_1>\frac{1-b}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1-b}{2a}\ge \frac{-(b-1)-\sqrt{(b-1)^2-4ac}}{2a}>\frac{1-b}{2a}$$

$$\Leftrightarrow 2\ge\sqrt{(b-1)^2-4ac}>0$$

$$\Leftrightarrow 4\ge(b-1)^2-4ac>0$$

(2)若 $m<-1 \Leftrightarrow 2ax_1+b<-1$

$$\Leftrightarrow x_1>\frac{-1-b}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(b-1)-\sqrt{(b-1)^2-4ac}}{2a}>\frac{-1-b}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(b-1)^2-4ac}>2$$

$$\Leftrightarrow (b-1)^2-4ac>4$$

說明：圖形從兩個交點要到四個交點之前稱為分歧點X_1，其切線斜率$m = -1$

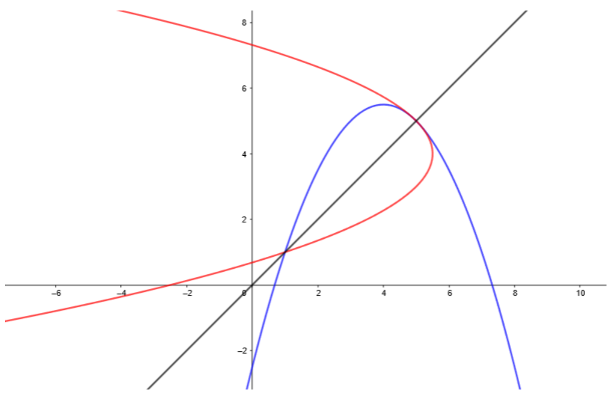
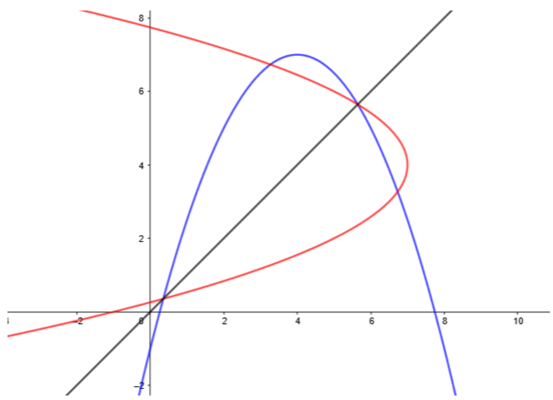
證明$m = -1$時，圖形有兩個交點:

設$m = -1$時，圖形有四個交點，則由定理一知道

$n^2 - 4mk > 0 \Leftrightarrow (ab + a)^2 - 4a^2(ac + b + 1) > 0 \Leftrightarrow (b - 1)^2 - 4ac > 4$

但是$m = -1 \Leftrightarrow 2ax_1 + b = -1 \Leftrightarrow \frac{-(b-1)-\sqrt{(b-1)^2-4ac}}{2a} = \frac{-1-\mathrm{b}}{2a} \Leftrightarrow (b - 1)^2 - 4ac = 4$，矛盾。

數據模擬

	
參數: $a = -0.5$、$b = 4$、$c = -2.5$ $(b - 1)^2 - 4ac = 4$兩個交點(分歧點) (圖5)	參數: $a = -0.5$、$b = 4$、$c = -1$ $(b - 1)^2 - 4ac > 4$(四個交點) (圖6)

2. <u>找出對稱於$y = rx$的兩拋物線，其交點的分歧性</u>

引理二： 設L為坐標平面上通過原點，但異於y軸的直線，則L的方程式為$y = rx$

其中，$P'(x', y')$為$P(x, y)$關於L之對稱點，其線性變換可表示成:(鏡射)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-r^2}{1+r^2} & \frac{2r}{1+r^2} \\ \frac{2r}{1+r^2} & \frac{r^2-1}{1+r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(來源:參考龍騰文化數學甲(上)教師手冊(91年3月第二版)，第98頁)

由引理二，我們將對稱於$y=rx$的兩拋物線表示為

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ \frac{2r}{1+r^2}x+\frac{r^2-1}{1+r^2}y=a\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}x+\frac{2r}{1+r^2}y\right)^2+b\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}x+\frac{2r}{1+r^2}y\right)+c \end{cases}$$

，$(a<0)\cdots(2)$我們知道若聯立方程式有解，則必定會有落在$y=rx$上的交點$X^*(x^*,rx^*)$，代入$y=ax^2+bx+c\Rightarrow$ $ax^{*2}+(b-r)x^*+c=0\cdots(3)$可得到定理三

定理三： 在$a<0$的條件下，對稱於$y=rx$的兩拋物線，其交點分歧性為 (1)若$(b-r)^2-4ac<0$，圖形沒有交點。 (2)若$(b-r)^2-4ac=0$，圖形恰有1個交點。 (3)若$(\frac{1+r^2}{r})^2\geq(b-r)^2-4ac>0$，圖形有2個交點。其中，分歧點$X_1(\frac{-br-1}{2ar},\frac{-br-1}{2a})$ (4)若$(b-r)^2-4ac>(\frac{1+r^2}{r})^2$，圖形有4個交點。

證明:

(3)式為一元二次方程式，我們利用判別式可以得到定理三-(1)(2)，接下來處理定理三-(3)(4)，我們知道當$(b-r)^2-4ac>0$，圖形會有2個或4個交點。利用公式解解出(3)式，可得:

$$x_1=\frac{-(b-r)-\sqrt{(b-r)^2-4ac}}{2a}、x_2=\frac{-(b-r)+\sqrt{(b-r)^2-4ac}}{2a}(a<0、x_1>x_2)$$

(一)在$r>0$的條件下，我們針對X_1的切線斜率來討論，令$f(x)=ax^2+bx+c$，則$m=f'\left(x_1\right)=2ax_1+b$可以得到:

(1) 若$-\frac{1}{r}\leq m<r\Leftrightarrow-\frac{1}{r}\leq 2ax_1+b<r$

$$\Leftrightarrow\frac{-1-\mathrm{br}}{2ar}\geq x_1>\frac{r-b}{2a}$$

$$\Leftrightarrow\frac{-1-\mathrm{br}}{2ar}\geq\frac{-(b-r)-\sqrt{(b-r)^2-4ac}}{2a}>\frac{r-b}{2a}$$

$$\Leftrightarrow(\frac{1+r^2}{r})\geq\sqrt{(b-r)^2-4ac}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1+r^2}{r}\right)^2\geq(b-r)^2-4ac>0$$

，則圖形有兩個交點，其中分歧點$X_1(\frac{-br-1}{2ar},\frac{-br-1}{2a})$。

（2）若$-\frac{1}{r} > m \Leftrightarrow -\frac{1}{r} > 2ax_1 + b \Leftrightarrow \frac{-1-\mathrm{br}}{2ar} < x_1$

$$\Leftrightarrow \frac{-1-\mathrm{br}}{2ar} < \frac{-(b-r)-\sqrt{(b-r)^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{1+r^2}{r}) < \sqrt{(b-r)^2-4ac}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+r^2}{r}\right)^2 < (b-r)^2-4ac$$，則圖形有四個交點。

（二）在$r \le 0$的條件下，我們針對X_2的切線斜率來討論，令$f(x) = ax^2 + bx + c$，

則$m = f'\left(x_2\right) = 2ax_2 + b$可以得到:

（1）若$r < m \le -\frac{1}{r} \Leftrightarrow r < 2ax_2 + b \le -\frac{1}{r}$

$$\Leftrightarrow \frac{r-b}{2a} > x_2 \ge \frac{-1-\mathrm{br}}{2ar}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r-b}{2a} > \frac{-(b-r)+\sqrt{(b-r)^2-4ac}}{2a} \ge \frac{-1-\mathrm{br}}{2ar}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{-1-r^2}{r}) \ge \sqrt{(b-r)^2-4ac} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+r^2}{r}\right)^2 \ge (b-r)^2-4ac > 0$$

，則圖形有兩個交點，其中分歧點$X_1(\frac{-br-1}{2ar},\frac{-br-1}{2a})$。

（2）若$-\frac{1}{r} < m \Leftrightarrow -\frac{1}{r} > 2ax_2 + b \Leftrightarrow \frac{-1-\mathrm{br}}{2ar} < x_2$

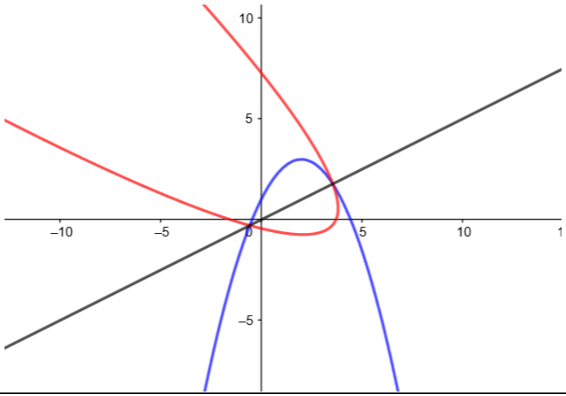
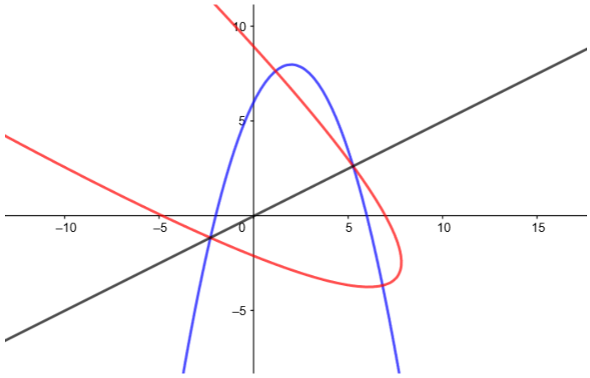
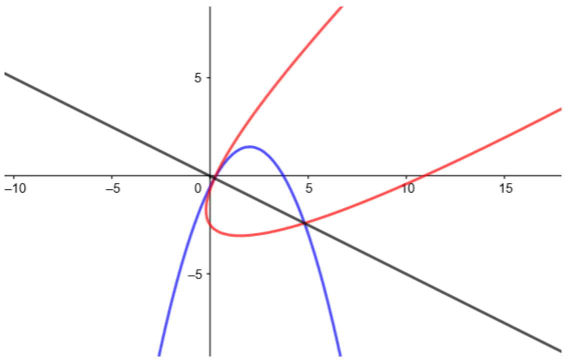
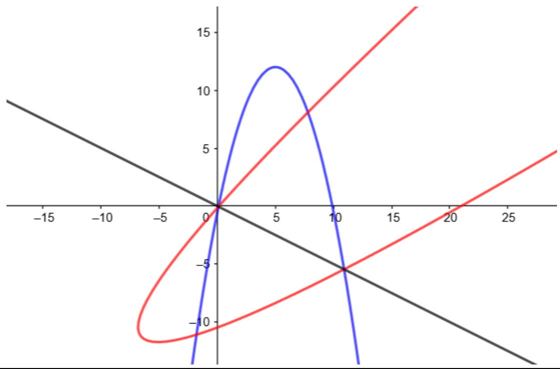
$$\Leftrightarrow \frac{-1-\mathrm{br}}{2ar} < \frac{-(b-r)+\sqrt{(b-r)^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-1-r^2}{r}\right) < \sqrt{(b-r)^2-4ac}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+r^2}{r}\right)^2 < (b+r)^2-4ac$$，則圖形有四個交點。

由(一)(二)可以知道r不論為正或負，其結果是相同的。

數據模擬

	
參數：$a=-0.5$、$b=2$、$c=1$、$r=0.5$ $\left(\frac{1+r^2}{r}\right)^2 \geq (b+r)^2-4ac>0$　兩個交點 （圖7）	參數：$a=-0.5$、$b=2$、$c=6$、$r=0.5$ $\left(\frac{1+r^2}{r}\right)^2 < (b+r)^2-4ac$　四個交點 （圖8）
	
參數：$a=-0.5$、$b=2$、$c=-2$、$r=-0.5$ $\left(\frac{1+r^2}{r}\right)^2 \geq (b+r)^2-4ac>0$　兩個交點 （圖9）	參數：$a=-0.5$、$b=5$、$c=-2$、$r=-0.5$ $\left(\frac{1+r^2}{r}\right)^2 < (b+r)^2-4ac$　四個交點 （圖10）

3. 討論一般型拋物線，經由線性變換(旋轉)後，與其對稱拋物線交點的分歧性

我們的想法是，找出一般型拋物線經由坐標旋轉後可轉為標準式，之後，對稱軸也相對應旋轉，這樣我們可套用定理三找出交點分歧性。

引理三：實係數二元二次方程式$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$，所表示的圖形為二次曲線，其中$\triangle=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}\neq 0$並滿足以下判別式$AC-B^2$:

(1)若$AC-B^2>0$，則圖形為橢圓。

(2)若$AC-B^2=0$，則圖形為拋物線。

(3)若$AC-B^2<0$，則圖形為雙曲線。

（來源:參考龍騰文化數學甲(上)教師手冊(91年3月第二版)，第50~57頁）

由引理三，我們可假設拋物線一般式為$x^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0\cdots(4)$，若圖形為拋物線，則$c-b^2=0$，$(4)\Longrightarrow x^2+2bxy+b^2y^2+2dx+2ey+f=0\cdots(5)$

引理四：當坐標軸逆時針旋轉θ角時，坐標平面上任一點的新坐標(x',y')與原坐標(x,y)的關係為

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\ ，0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

（來源:參考龍騰文化數學甲(上)教師手冊(91年3月第二版)，第99頁）

引理五：當坐標軸逆時針旋轉θ角時，原二次曲線$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$轉軸後的方程式為$A'x^2+2B'xy+C'y^2+2D'x+2E'y+F'=0$，其中:

$$A'=\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}(A-C)cos2\theta+Bsin2\theta$$

$$B'=Bcos2\theta-\frac{1}{2}(A-C)sin2\theta$$

$$C'=\frac{1}{2}(A+C)-\frac{1}{2}(A-C)cos2\theta-Bsin2\theta$$

$$D'=Dcos\theta+Esin\theta$$

$$E'=-Dsin\theta+Ecos\theta$$

若旋轉後消去xy項，則$B'=0\Leftrightarrow cot2\theta=\frac{A-C}{2B}$，$0\leq 2\theta\leq\pi$

（來源:參考龍騰文化數學甲(上)教師手冊(91年3月第二版)，第40頁）

為了讓旋轉後拋物線為標準型，我們利用引理五，使得$B' = C' = 0$

$$\begin{cases} cot2\theta = \frac{A-C}{2B} \quad (B' = 0) \\ (A+C) = (A-C)cot2\theta + 2B \end{cases} \Leftrightarrow sin2\theta = \frac{2B(A+C)}{(A-C)^2+4B^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2tan\theta}{1+tan^2\theta} = \frac{2B(A+C)}{(A-C)^2+4B^2}$$

$$\Leftrightarrow tan\theta = \frac{\mathcal{p}\pm\sqrt{\mathcal{p}^2-\mathcal{q}^2}}{\mathcal{q}}$$，其中$\mathcal{p} = (A-C)^2 + 4B^2$ 、$\mathcal{q} = 2B(A+C)$⋯(6)

由上述知道，若滿足(6)式，表示一般拋物線會旋轉成標準型拋物線，即方程式消去xy項及y^2項，若以 $tan\theta = 1(\theta = \frac{\pi}{4})$ 為例，我們可以得到:

$$tan\theta = 1 \Leftrightarrow \frac{\mathcal{p}\pm\sqrt{\mathcal{p}^2-\mathcal{q}^2}}{\mathcal{q}} = 1 \Leftrightarrow \mathcal{p} = \mathcal{q}$$

$$\Leftrightarrow (A-C)^2 + 4B^2 = 2B(A+C) \Leftrightarrow (A-C)^2 + 4B^2 = 2B(A+C) \cdots (7)$$

由(5)式知道，$A = 1$、$B = b$、$C = b^2$代入(7) $\Rightarrow (b-1)^2 = 0 \Leftrightarrow b = 1$⋯(8)

因此，(5)式利用引理四我們將坐標旋轉$\frac{\pi}{4}$得到 $\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2 + 2b(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y)(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y) + b^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2 + 2d(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y) + 2e(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y) + f = 0$⋯(9)，利用(8)與(9)式得到標準型拋物線$y = \frac{2\sqrt{2}x^2+2(d+e)x+\sqrt{2}f}{2(d-e)}$(取$d < e$，開口向下)⋯(10)，原對稱軸$y = rx$亦旋轉$\frac{\pi}{4}$得到$y = \frac{r-1}{r+1}x$⋯(11)，最後，套用定理三可以得到以下定理四:

定理四： 在$d < e$、 $b = 1$的條件下，拋物線$x^2 + 2bxy + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$對稱於$y = rx$的兩對稱拋物線，其交點分歧性為:

(1) 若$(d+er)^2 - f(r+1)^2 < 0$，圖形沒有交點。

(2) 若$(d+er)^2 - f(r+1)^2 = 0$，圖形恰有1個交點。

(3) 若$\left(\frac{(d-e)(r^2+1)}{r-1}\right)^2 \geq (d+er)^2 - f(r+1)^2 > 0$，圖形有2個交點。

其中，分歧點$X_1(\frac{e-dr}{r^2-1}, \frac{r(e-dr)}{r^2-1})$

(4) 若$(d+er)^2 - f(r+1)^2 > \left(\frac{(d-e)(r^2+1)}{r-1}\right)^2$，圖形有4個交點。

證明:

拋物線$x^2+2xy+y^2+2dx+2ey+f=0$與對稱軸$y=rx$交點分歧性討論，亦即討論

拋物線$y=\frac{2\sqrt{2}x^2+2(d+e)x+\sqrt{2}f}{2(d-e)}$$(d<e)$與對稱軸$y=\frac{r-1}{r+1}x$交點分歧性。

(1)若滿足$\left(\frac{d+e}{d-e}-\frac{r-1}{r+1}\right)^2-4\times\frac{\sqrt{2}}{d-e}\times\frac{\sqrt{2}f}{2(d-e)}<0$

$$\Leftrightarrow\left(2(d+er)\right)^2-4\left(r+1\right)^2f<0$$

$\Leftrightarrow(d+er)^2-f\left(r+1\right)^2<0$，圖形沒有交點。

(2)若滿足$\left(\frac{d+e}{d-e}-\frac{r-1}{r+1}\right)^2-4\times\frac{\sqrt{2}}{d-e}\times\frac{\sqrt{2}f}{2(d-e)}=0$

$\Leftrightarrow(d+er)^2-f\left(r+1\right)^2=0$，圖形有1個交點。

(3)若滿足$\left(\frac{1+(\frac{r-1}{r+1})^2}{\frac{r-1}{r+1}}\right)^2\geq\left(\frac{d+e}{d-e}-\frac{r-1}{r+1}\right)^2-4\times\frac{\sqrt{2}}{d-e}\times\frac{\sqrt{2}f}{2(d-e)}>0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{r+1}{r-1}+\frac{r-1}{r+1}\right)^2\geq\left(\frac{d+e}{d-e}-\frac{r-1}{r+1}\right)^2-4\times\frac{f}{(d-e)^2}>0$$

$\Leftrightarrow\left(\frac{(d-e)(r^2+1)}{r-1}\right)^2\geq(d+er)^2-f\left(r+1\right)^2>0$，圖形有2個交點。

另外，(5)式($b=1$)與對稱軸$y=rx$可以得到:$x^2+2rx+r^2x^2+2dx+2ey+f=0$

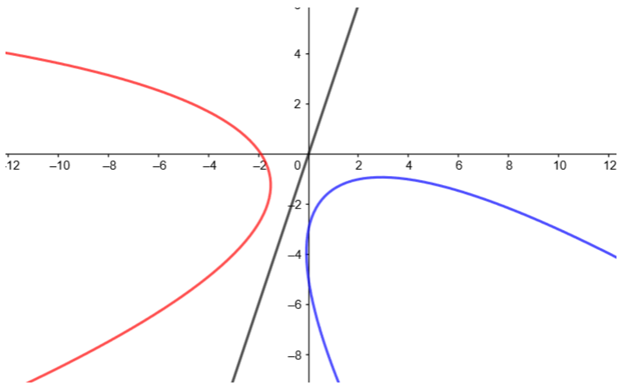
$\Leftrightarrow x=\frac{-(d+er)\pm\sqrt{(d+er)^2-f(r^2+1)}}{(r+1)^2}$(取數值較大的)$\Rightarrow x=\frac{-(d+er)+\sqrt{\frac{(d-e)^2(r^2+1)}{(r-1)^2}}}{(r+1)^2}$(分歧點條件)

$\Leftrightarrow x=\frac{e-dr}{r^2-1}$，則分歧點$X_1\left(\frac{e-dr}{r^2-1},\frac{r(e-dr)}{r^2-1}\right)$

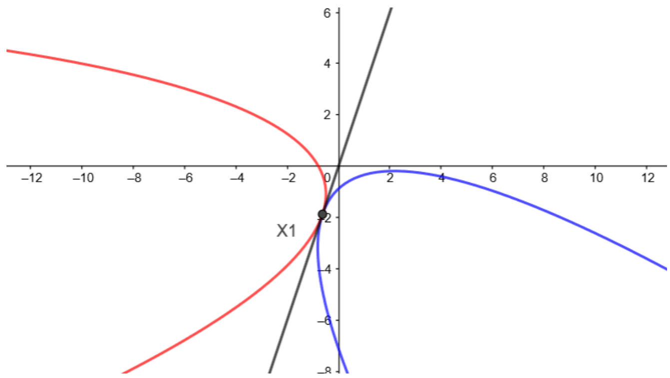
(4)若滿足$\left(\frac{d+e}{d-e}-\frac{r-1}{r+1}\right)^2-4\times\frac{\sqrt{2}}{d-e}\times\frac{\sqrt{2}f}{2(d-e)}>\left(\frac{1+(\frac{r-1}{r+1})^2}{\frac{r-1}{r+1}}\right)^2$

$\Leftrightarrow(d+er)^2-f\left(r+1\right)^2>\left(\frac{(d-e)(r^2+1)}{r-1}\right)^2$，圖形有4個交點。

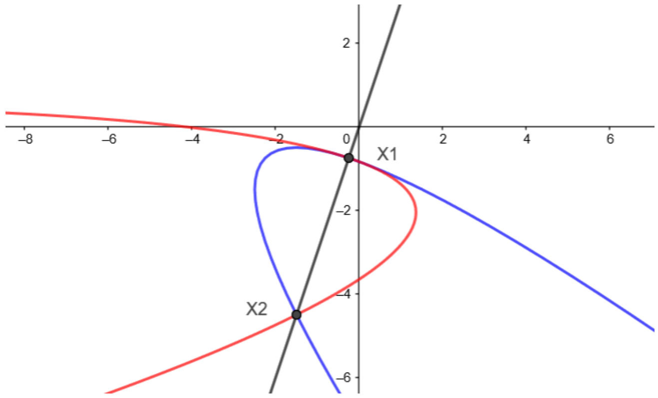
數據模擬



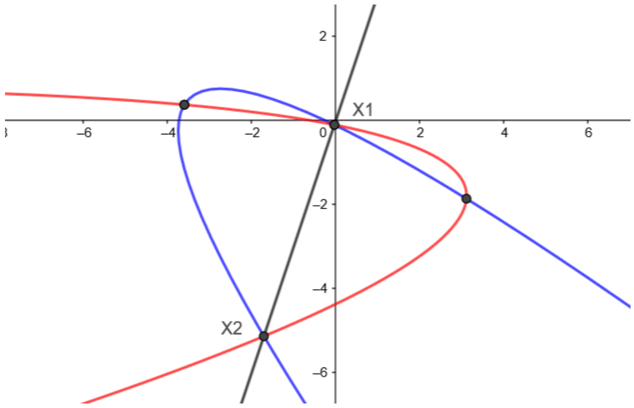
拋物線$x^2+2bxy+y^2+2dx+2ey+f=0$
參數: $b=1$、$d=-2$、$e=4$、$f=15$、$r=3$
沒有交點(圖11)



拋物線$x^2+2bxy+y^2+2dx+2ey+f=0$
參數: $b=1$、$d=-2$、$e=4$、$f=6.25$、$r=3$
1個交點(圖12)



拋物線$x^2+2bxy+y^2+2dx+2ey+f=0$
參數:$b=1$、$d=2$、$e=4$、$f=6$、$r=3$
兩個交點，其中分歧點$X_1(-0.25-0.75)$
(圖13)



拋物線$x^2+2bxy+y^2+2dx+2ey+f=0$
參數:$b=1$、$d=2$、$e=4$、$f=1$、$r=3$
四個交點
(圖14)

伍、推廣討論

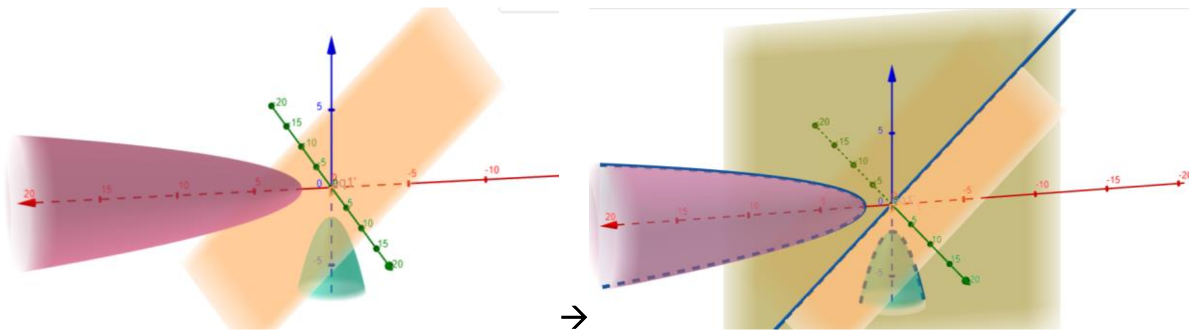
1. <u>三維空間下，探討橢圓拋物面$\Gamma: x^2+y^2=-(z-a)$對稱於平面$E: x=rz(r>0)$，其交點的分歧性:</u>

(1)空間中一點$P(m,n,l)$，利用向量找出對稱於平面$E: x=rz$之對稱點為$P'(\frac{r(mr+l)}{1+r^2},n,\frac{mr+l}{1+r^2})$，可知橢圓拋物面$\Gamma$對稱於平面E的橢圓拋物面$\Gamma': (\frac{r(rx+z)}{1+r^2})^2+y^2=-(\frac{rx+z}{1+r^2}-a)$

相交圖形為$\begin{cases}\Gamma: x^2+y^2=-(z-a)\\ \Gamma': (\frac{r(rx+z)}{1+r^2})^2+y^2=-(\frac{rx+z}{1+r^2}-a)\end{cases}\cdots(12)$，欲求(12)式，我們知道$\Gamma$與$\Gamma'$

若有交點勢必會有落在平面E上的點，我們令$y=0$，退化成二維平面來找出交點的分歧性

如(圖15)，可以得到$\begin{cases}\Gamma: x^2+y^2=-(z-a)\\ E: x=rz \qquad\cdots(13)\\ F: y=0\end{cases}$



(圖15)

由(13)式$\Longrightarrow x^2+\frac{x}{r}-a=0 \Longrightarrow rx^2+x-ar=0\cdots(14)$，再由(14)式，判別式

$\Delta=1+4ar^2$可以得到定理五:

> 定理五：三維空間下，橢圓拋物面$\Gamma: x^2+y^2=-(z-a)$，對稱於平面$E: x=rz(\mathrm{r}>0)$，
>
> 其交點分歧性:
>
> (1)若$1+4ar^2<0$，則圖形沒有交點。
>
> (2)若$1+4ar^2=0$，則圖形恰有1個交點，且交點在$M(-\frac{1}{2r},0,-\frac{1}{2r^2})$
>
> (3)若$0<1+4ar^2\leq(1+r^2)^2$，則圖形交於一橢圓曲線，其中

(i)若$r>1$(長軸為y軸)，則相交之橢圓曲線位置向量

$$r_1(t)=\text{中心點}M_1\left(-\frac{1}{2r},0,-\frac{1}{2r^2}\right)+\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}sin\theta\\ y=\dfrac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}cos\theta\\ z=\dfrac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r^2}sin\theta\end{cases}，0\le\theta\le 2\pi$$

(ii)若$0<r<1$(長軸為z軸)，則相交之橢圓曲線位置向量

$$r_1(t)=\text{中心點}M_1\left(-\frac{1}{2r},0,-\frac{1}{2r^2}\right)+\begin{cases}x=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}cos\theta\\ y=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}sin\theta\\ z=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r^2}cos\theta\end{cases}，0\le\theta\le 2\pi$$

(4)若$1+4ar^2>(1+r^2)^2$，則圖形交於兩橢圓曲線，一個為上式(3)所示，另一個如下

(i) 若$r>1$(長軸為z軸)，則相交之橢圓曲線位置向量

$$r_2(t)=\text{中心點}M_2\left(\frac{r}{2},0,\frac{1}{2}\right)+\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}cos\theta\\ y=\dfrac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}sin\theta\\ z=\dfrac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2}cos\theta\end{cases}，0\le\theta\le 2\pi$$

(ii)若$0<r<1$(長軸為y軸)，則相交之橢圓曲線位置向量

$$r_2(t)=\text{中心點}M_2(\frac{r}{2},0,\frac{1}{2})+\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}sin\theta\\ y=\dfrac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}cos\theta\\ z=\dfrac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2}sin\theta\end{cases}，0\le\theta\le 2\pi$$

其中，中心點$M_2(\frac{r}{2},0,\frac{1}{2})$為分歧點(由定理六可知)。

證明:

(I)說明定理五-(1)(2)

由(14)式的判別式可以得到定理五-(1)(2)，且(14)式的解為$x=\frac{-1}{2r}$代入(13)式可得交點$M_1(-\frac{1}{2r},0,-\frac{1}{2r^2})$。

(II)說明定理五-(3)

由(13)式得到解為$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4ar^2}}{2r}$，利用定理三，若$r>0$，則$x_1=\frac{-1+\sqrt{1+4ar^2}}{2r}$、$x_2=\frac{-1-\sqrt{1+4ar^2}}{2r}$($x_1>x_2$)，$z=f(x)=-x^2+a\Leftrightarrow f'(x)=-2x\Leftrightarrow$ $f'(x_1)=\frac{1-\sqrt{1+4ar^2}}{r}$⋯(15)，由定理三-(3)得到:

$$\text{若}-r\le f'(x_1)<\frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow -r\le\frac{1-\sqrt{1+4ar^2}}{r}<\frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow -r^2\le 1-\sqrt{1+4ar^2}<1$$

$$\Leftrightarrow 1+4ar^2\le(1+r^2)^2\text{，}$$

則對稱橢圓拋物面交於1個橢圓曲線 $r_1(t)$

引理六：三維空間中，位於xy平面之橢圓曲線的表示法:(來源:空間橢圓表示法–網路搜尋附網址)

(1)純量表示法:$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$(兩圖形的交集)

(2)向量表示法(參數式表示):橢圓曲線上任意點(x,y,z)所構成的位置向量$r(t)$，其中參數 t 表示角度之變化量。$r(t)=xi+yj+zk$，其中$x=acost$、$y=bsint$、$z=0$

如何找出相交的橢圓曲線，我們利用以下式子:

$\begin{cases}\Gamma: x^2+y^2=-(z-a)\\ E: x=rz\end{cases}$，$r>0$⋯(16)，求聯立方程式的解:

$$\Leftrightarrow r^2z^2+y^2=-z+a$$

$$\Leftrightarrow r^2z^2+z+y^2=a$$

$$\Leftrightarrow r^2(z^2+\frac{1}{r^2}z)+y^2=a$$

$$\Leftrightarrow r^2\left(z+\frac{1}{2r^2}\right)^2+y^2=\frac{4ar^2+1}{4r^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(z+\frac{1}{2r^2}\right)^2}{\frac{4ar^2+1}{4r^4}}+\frac{y^2}{\frac{4ar^2+1}{4r^2}}=1\ldots(17)$$

由(16)(17)式及引理五，可知:

(i)若$r>1$(長軸為y軸)，則相交之橢圓曲線位置向量($0\le\theta\le 2\pi$)

$$r_1(t)=\text{中心點}M_1\left(-\frac{1}{2r},0,-\frac{1}{2r^2}\right)+\begin{cases}x=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}sin\theta\\ y=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}cos\theta\\ z=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r^2}sin\theta\end{cases}$$

(ii)若$0<r<1$(長軸為z軸)，則相交之橢圓曲線位置向量

$$r_1(t)=\text{中心點}M_1\left(-\frac{1}{2r},0,-\frac{1}{2r^2}\right)+\begin{cases}x=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}cos\theta\\ y=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}sin\theta\\ z=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r^2}cos\theta\end{cases}$$

(II)說明定理五-(4)

由定理三-(3)得到:

$$\text{若}f'(x_1)<-r$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{1+4ar^2}}{r}<-r$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{1+4ar^2}<-r^2$$

$$\Leftrightarrow (1+r^2)^2<1+4ar^2$$

，則對稱橢圓拋物面交於2個橢圓曲線 $r_1(t)$、$r_2(t)$

如何找出另一個橢圓曲線，我們利用$\begin{cases}\Gamma: x^2+y^2=-(z-a)\\ \Gamma': (\frac{r^2x-x+2rz}{1+r^2})^2+y^2=-(\frac{2rx-r^2x+z}{1+r^2}-a)\end{cases}$…(18)，

在條件為$r>0$、$(1+r^2)^2<1+4ar^2$之下，求出聯立方程式(18):

$$(\frac{r^2x-x+2rz}{1+r^2})^2-x^2=-(\frac{2rx-r^2x+z}{1+r^2}-z)$$

$$\Leftrightarrow \big(2r(z+rx)\big)\big(2(rz-x)\big)+2r(x-rz)(1+r^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (rz-x)(2(z+rx)-(1+r^2))=0$$

$$\Leftrightarrow E_1\!: rz=x \quad 、\quad E_2\!: z+rx=\frac{(1+r^2)}{2} \text{且} E_1\perp E_2 \cdots(19)$$

由(19)式得到$\begin{cases} y=0 \\ rz=x \\ z+rx=\frac{(1+r^2)}{2}\end{cases}$，則另一個橢圓曲線$r_2(t)$中心點$M_2(\frac{r}{2}，\ 0，\frac{1}{2})\cdots(20)$

如何找出另一個橢圓曲線$r_2(t)$，我們利用以下式子:

$\begin{cases} \Gamma\!: x^2+y^2=-(z-a) \\ E_2\!: z+rx=\frac{(1+r^2)}{2}\end{cases}$，$r>0\cdots(21)$，求聯立方程式的解:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r^2}(z-\frac{1+r^2}{2})^2+y^2=-z+a$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}{4r^2}}=1 \ldots(22)$$

由(20)(22)式及引理五，可知$\Longrightarrow$

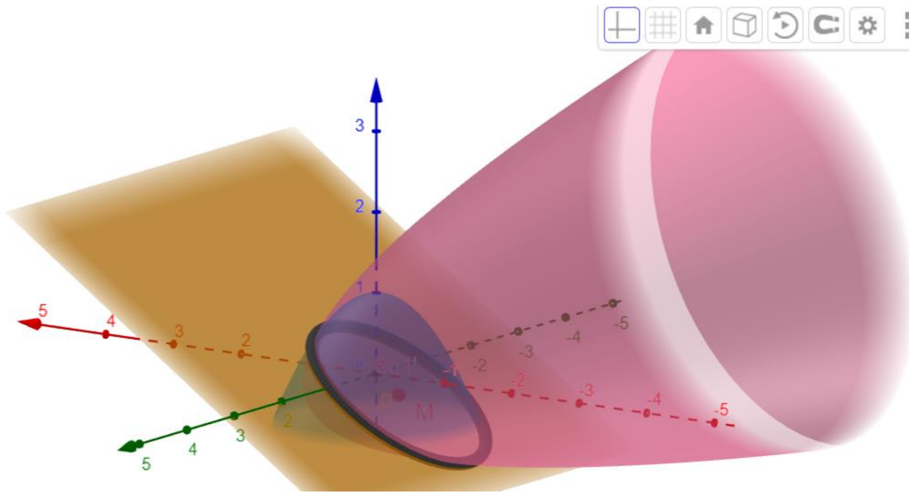
(i)若$r>1$(長軸為z軸)，則另一個橢圓曲線位置向量($0\le\theta\le 2\pi$)

$$r_2(t)=\text{中心點}M_2(\frac{r}{2},0,\frac{1}{2})+\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}cos\theta \\ y=\frac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}sin\theta \\ z=\frac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2}cos\theta \end{cases}$$

(ii)若$0<r<1$(長軸為y軸)，則另一個橢圓曲線位置向量

$$r_2(t)=\text{中心點}M_2(\frac{r}{2},0,\frac{1}{2})+\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}sin\theta \\ y=\frac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}cos\theta \\ z=\frac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2}sin\theta \end{cases}$$

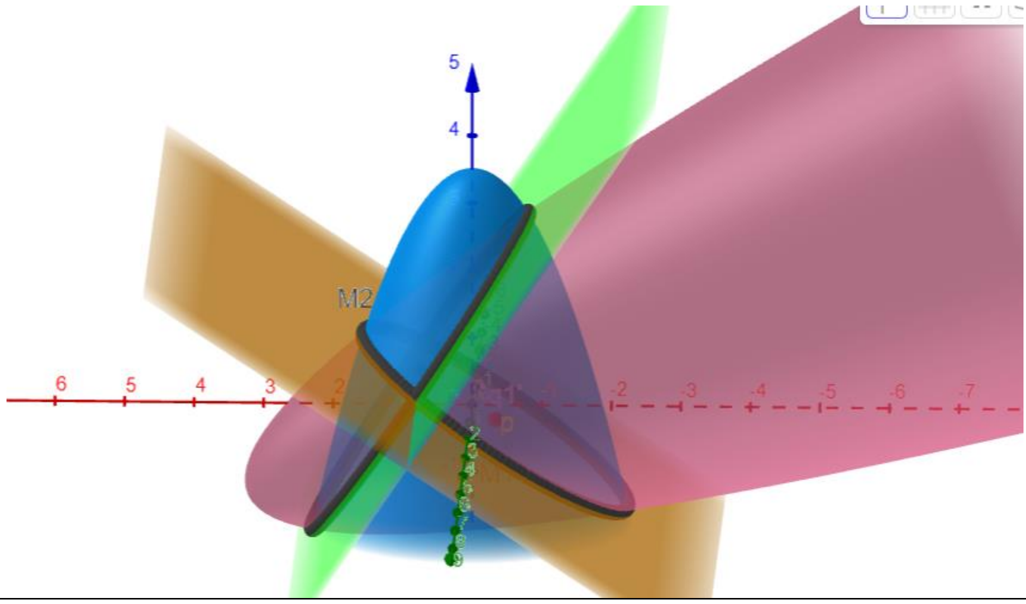
數據模擬



判別式$0 < 1 + 4ar^2 \le (1 + r^2)^2$，相交之橢圓曲線位置向量

$$r_1(t) = 中心點M_1\left(-\frac{1}{2r}, 0, -\frac{1}{2r^2}\right) + \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}sin\theta \\ y = \dfrac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}cos\theta \\ z = \dfrac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r^2}sin\theta \end{cases}，參數為a = 1、r = 1.5$$

（圖16）



判別式$1 + 4ar^2 > (1 + r^2)^2$，圖形交於兩橢圓曲線，參數為$a = 3.5$、$r = 1.5$

$$r_1(t) = 中心點M_1\left(-\frac{1}{2r}, 0, -\frac{1}{2r^2}\right) + \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}sin\theta \\ y = \dfrac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}cos\theta \\ z = \dfrac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r^2}sin\theta \end{cases}、r_2(t) = 中心點M_2\left(\frac{r}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}cos\theta \\ y = \dfrac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}sin\theta \\ z = \dfrac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2}cos\theta \end{cases}$$

（圖17）

定理六：(遇見分歧點)定理五-(3)，若$1+4ar^2=(1+r^2)^2$，在$y=0$條件下，X_1的切線斜率與直線 $x=rz$垂直，此時X_1為分歧點且同時為另一橢圓曲線$r_2(t)$的中心點$M_2\left(\frac{r}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

證明:

$$\text{若 } f'(x_1)=-r \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{1+4ar^2}}{r}=-r \Leftrightarrow 1+4ar^2=(1+r^2)^2$$

$$\Leftrightarrow r^2(r^2+2(1-2a))^2=0$$

$$\Leftrightarrow r=0 \text{、} r^2=2(2a-1)$$

$$\text{則} x_1=\frac{-1+\sqrt{1+4ar^2}}{2r} \Leftrightarrow x_1=\frac{-1+\sqrt{1+8a(2a-1)}}{2r}$$

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{-1+\sqrt{(4a-1)^2}}{2r}$$

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{r}{2}$$

2. 經尤拉角旋轉後的橢圓拋物面與對稱平面，其交點的分歧性:

引理七：尤拉角公式:任何一個三維空間旋轉皆可表示為三個基本旋轉的複合變換，所謂基本旋轉是指以坐標軸X、Y、Z作為旋轉軸，採用右手法則，θ為轉角稱為尤拉角。

$R_X(\theta)$、$R_Y(\theta)$、$R_Z(\theta)$分別代表對X、Y、Z的旋轉矩陣如下:

(來源:維基百科-歐拉角定理附網址)

$$R_X(\theta)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&cos\theta&-sin\theta\\0&sin\theta&cos\theta\end{bmatrix}\text{、}R_Y(\theta)=\begin{bmatrix}cos\theta&0&sin\theta\\0&1&0\\-sin\theta&0&cos\theta\end{bmatrix}\text{、}R_Z(\theta)=\begin{bmatrix}cos\theta&-sin\theta&0\\sin\theta&cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

只要連續兩個轉軸不相同便可產生旋轉矩陣共12種可能，所有行列式都為1的正交矩陣(群)。

$$X-Y-X\text{、}Y-X-Y\text{、}Z-X-Z$$

$$X-Z-X\text{、}Y-Z-Y\text{、}Z-Y-Z$$

$$X-Y-Z\text{、}Y-Z-X\text{、}Z-X-Y$$

$$X-Z-Y\text{、}Y-X-Z\text{、}Z-Y-X$$

利用引理六，我們取$X-Y-X$旋轉矩陣為$R(\alpha,\beta,\gamma)=R_X(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$，表示先繞$X$軸旋轉$\gamma$角，再繞$Y$軸旋轉$\beta$角，最後繞$X$軸旋轉$\alpha$角。我們角度取$\alpha=\beta=\ \gamma=45^0$得到

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&cos(\alpha)&-sin(\alpha)\\0&sin(\alpha)&cos(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos(\beta)&0&sin(\beta)\\0&1&0\\-sin(\beta)&0&cos(\beta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos(\gamma)&-sin(\gamma)\\0&sin(\gamma)&cos(\gamma)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&cos(\alpha)&-sin(\alpha)\\0&sin(\alpha)&cos(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos(\beta)&0&sin(\beta)\\0&1&0\\-sin(\beta)&0&cos(\beta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\\cos(\gamma)\cdot y-sin(\gamma)\cdot z\\sin(\gamma)\cdot y+cos(\gamma)\cdot z\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&cos(\alpha)&-sin(\alpha)\\0&sin(\alpha)&cos(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos(\beta)\cdot x+sin(\beta)sin(\gamma)\cdot y+sin(\beta)cos(\gamma)\cdot z\\\cos(\gamma)\cdot y-sin(\gamma)\cdot z\\-sin(\beta)\cdot x+cos(\beta)sin(\gamma)\cdot y+cos(\beta)cos(\gamma)\cdot z\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}cos(\beta)\cdot x+sin(\beta)sin(\gamma)\cdot y+sin(\beta)cos(\gamma)\cdot z\\cos(\alpha)\cos(\gamma)\cdot y-cos(\alpha)sin(\gamma)\cdot z+sin(\alpha)sin(\beta)\cdot x-sin(\alpha)cos(\beta)sin(\gamma)\cdot y-sin(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma)\cdot z\\sin(\alpha)\cos(\gamma)\cdot y-sin(\alpha)sin(\gamma)\cdot z-cos(\alpha)sin(\beta)\cdot x+cos(\alpha)cos(\beta)sin(\gamma)\cdot y+cos(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma)\cdot z\end{bmatrix}$$

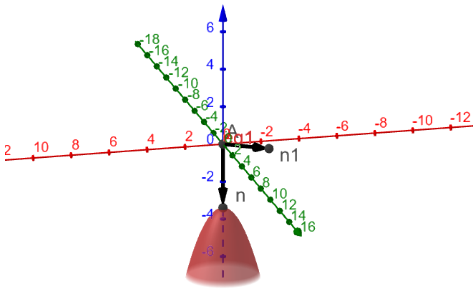
$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{2}\cdot z\\\frac{1}{2}\cdot y-\frac{1}{2}\cdot z+\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot z\\\frac{1}{2}\cdot y-\frac{1}{2}\cdot z-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot y+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{2}\cdot z\\\frac{1}{2}\cdot x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}})\cdot y-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}})\cdot z\\-\frac{1}{2}\cdot x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}})\cdot y+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}})\cdot z\end{bmatrix}\cdots(23)$$

原橢圓拋物面$\Gamma: x^2+y^2=-(z-a)$經尤拉角$R(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$旋轉後，利用(21)式可以得到，

$$\Gamma_1:(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{2}\cdot z)^2+(\frac{1}{2}\cdot x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}})\cdot y-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}})\cdot z)^2$$
$$=-(-\frac{1}{2}\cdot x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}})\cdot y+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}})\cdot z-a)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_1:\left(2\sqrt{2}x+2y+2z\right)^2+\left(2x+\left(2-\sqrt{2}\right)y-\left(2+\sqrt{2}\right)z\right)^2$$
$$=8x-4\left(2+\sqrt{2}\right)y-4\left(-2+\sqrt{2}\right)z+16a\cdots(24)$$

找對稱平面，我們取向量$\vec{n}=(0,0,a)$經尤拉角$R(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$旋轉後為$(\frac{1}{2}a,-\frac{2+\sqrt{2}}{4}a,\frac{-2+\sqrt{2}}{4}a)$，我們設定為$\overrightarrow{n_1}=(\,2\,,-\left(2+\sqrt{2}\right),\ \left(-2+\sqrt{2}\right)r\,)$，如圖(18)



(圖18)

對稱平面N_1的法向量為$\overrightarrow{n_1}$，則$N_1: 2x-(2+\sqrt{2})y+(-2+\sqrt{2})rz=0$，可以得到另一平面$N_2$且$N_1\perp N_2$，則$N_2: (2+\sqrt{2})x+2y=0$，而$N_1\cap N_2$為$L_1$: $\begin{cases} x=(2-\sqrt{2})t_1 \\ y=-t_1 \\ z=\frac{5+2\sqrt{2}}{r}t_1 \end{cases}$，

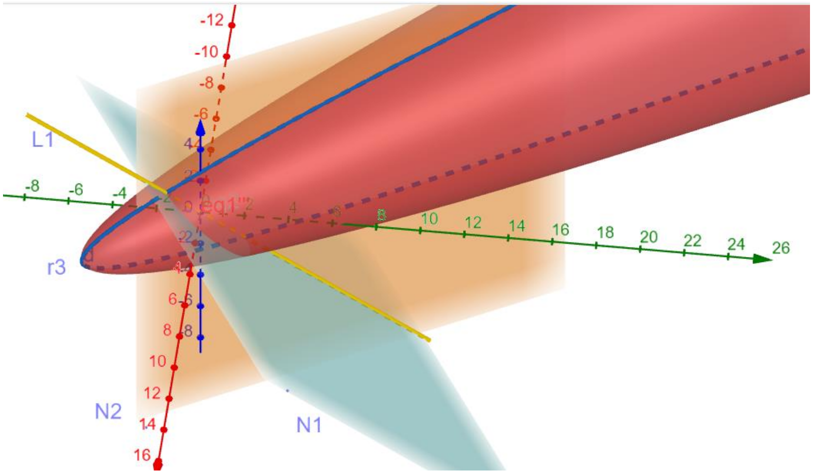
$t_1\in R$，由(22)$\cap N_2$得到拋物曲線$r_3(t)$(利用引理五純量表示法):

$$((\sqrt{2}-2)x+2z)^2+(x-(2+\sqrt{2})z)^2=4\left(5+2\sqrt{2}\right)x+4\left(2-\sqrt{2}\right)z+16a$$

…(25)

在(25)式中，我們利用引理三(2):

$\mathrm{AC}-B^2=(7-4\sqrt{2})(10+4\sqrt{2})-\left(\sqrt{2}-6\right)^2=0$，說明為一拋物曲線。(圖19)



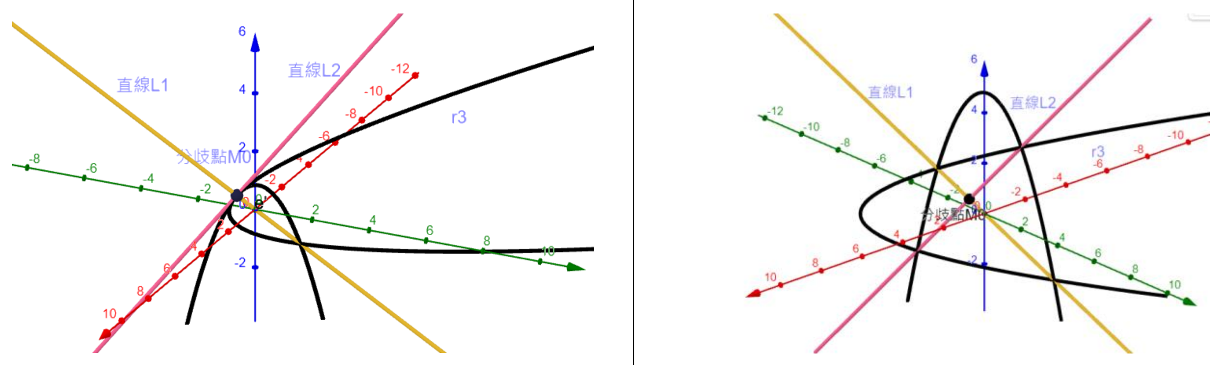
(圖19)

處理Γ_1對稱於平面N_1的分歧性，我們退化成二維來處理，亦即處理，拋物曲線$r_3(t)$與L_1的關係。利用定理六知道，分歧點X_1且同時為另一橢圓曲線的中心點$M_0(x_0,y_0,z_0)$，通過該點的方向向量$\overrightarrow{v_0}$與直線L_1及平面N_2的法向量皆垂直，所以得到

$\overrightarrow{v_0} = (10+4\sqrt{2}, -(14+9\sqrt{2}), -(6-\sqrt{2})r)$，也是$M_0$的切線向量，可以得到直線$L_2$:

$$L_2:\begin{cases} x = x_0 + (10+4\sqrt{2})t_2 \\ y = y_0 - (14+9\sqrt{2})t_2 \\ z = z_0 - (6-\sqrt{2})rt_2 \end{cases}，t_2 \in R$$

如圖20所示:



(1) (2)

(圖20)

我們把(25)式

$$((\sqrt{2}-2)x+2z)^2 + (x-(2+\sqrt{2})z)^2 = 4\left(5+2\sqrt{2}\right)x + 4\left(2-\sqrt{2}\right)z + 16a$$

$$\Leftrightarrow (7-4\sqrt{2})x^2 + \left[(2\sqrt{2}-12)z - (20+8\sqrt{2})\right]x + (10+4\sqrt{2})z^2 - (8-4\sqrt{2})z + 16a = 0$$

用參數式來表示拋物曲線$r_3(t)$:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{[(\sqrt{2}-6)t_3-(10+4\sqrt{2})]+\sqrt{(192-32\sqrt{2})t_3+132+80\sqrt{2}-(7-4\sqrt{2})\times 16a}}{4\sqrt{2}-7} \\ y = \dfrac{[(\sqrt{2}-6)t_3-(10+4\sqrt{2})]+\sqrt{(192-32\sqrt{2})t_3+132+80\sqrt{2}-(7-4\sqrt{2})\times 16a}}{4\sqrt{2}-7} \times \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ z = t_3 \end{cases}，t_3 \in R \qquad \cdots(26)$$

我們找出分歧性的方法:利用$\underline{L_1}$與拋物曲線$r_3(t)$交點數量與$\underline{L_2}$與拋物曲線$r_3(t)$交點數量，可以得到以下定理:

定理七：橢圓拋物面$\Gamma: x^2+y^2=-(z-a)$經尤拉角$X-Y-X$旋轉後，角度取$\alpha=\beta=\gamma=45^0$

得到$\Gamma_1: \left(2\sqrt{2}x+2y+2z\right)^2+\left(2x+\left(2-\sqrt{2}\right)y-\left(2+\sqrt{2}\right)z\right)^2=8x-4\left(2+\sqrt{2}\right)y-4\left(-2+\sqrt{2}\right)z+16a$，對稱平面為$N_1: 2x-\left(2+\sqrt{2}\right)y+\left(-2+\sqrt{2}\right)rz=0$

在$r=5+2\sqrt{2}$的條件下，其交點分歧性:

(1) 若$L_1\cap r_3(t)$恰有1個交點，則圖形交於1點。

（此時: $a\approx 0.186130225$）

(2) 若$L_1\cap r_3(t)$有2個交點或$L_1\cap r_3(t)$有2個交點且$L_2\cap r_3(t)$恰有1個交點為分歧點$M_0(\frac{2-\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，則圖形交於一橢圓曲線。

（此時: 約$-0.835786\le a<$約0.186130225）

(3) 若$L_1\cap r_3(t)$與$L_2\cap r_3(t)$皆有2個交點，則圖形交於兩橢圓曲線。

（此時: $a<$約-0.835786）

說明:

1. 證明定理七-(1): 在$r=5+2\sqrt{2}$的條件下，則$L_1: \begin{cases} x=(2-\sqrt{2})t_1 \\ y=-t_1 \\ z=t_1 \end{cases}$，$t_1\in R$代入(26)式

得到$\Rightarrow \begin{cases} -t_1=\dfrac{[(\sqrt{2}-6)t_3-(10+4\sqrt{2})]+\sqrt{(192-32\sqrt{2})t_3+132+80\sqrt{2}-(7-4\sqrt{2})\times 16a}}{4\sqrt{2}-7}\times\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ t_1=t_3 \end{cases}$ (y、z坐標相同)

$$\Leftrightarrow t_3=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\times\left\{-\frac{[(\sqrt{2}-6)t_3-(10+4\sqrt{2})]+\sqrt{(192-32\sqrt{2})t_3+132+80\sqrt{2}-(7-4\sqrt{2})\times 16a}}{4\sqrt{2}-7}\right\}$$

$\Leftrightarrow t_3^+\approx\dfrac{-21.49033202+\sqrt{461.8343702-115.4585925\times 21.49033021\times a}}{57.72929623}$（$t_3$數值有2個取較大的）

…(27)

由(27)式得到$\Delta=461.8343702-115.4585925\times 21.49033021\times a$

當$a\approx 0.186130225$，圖形恰有1個交點。

當$a<$約0.186130225，圖形交於一橢圓曲線。

2. 證明定理七-(2)：由(25)式且$r=5+2\sqrt{2}$的條件下得到：

$$L_2:\begin{cases} x=(2-\sqrt{2})t_3^{+}+(10+4\sqrt{2})t_2 \\ y=-t_3^{+}-(14+9\sqrt{2})t_2 \\ z=t_3^{+}-(26+7\sqrt{2})t_2 \end{cases}\text{，}t_2\in R\text{ 代入(24)式得到}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} -t_3^{+}-\left(14+9\sqrt{2}\right)t_2=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{[(\sqrt{2}-6)t_3-(10+4\sqrt{2})]+\sqrt{(192-32\sqrt{2})t_3+132+80\sqrt{2}-(7-4\sqrt{2})\times 16a}}{4\sqrt{2}-7} \\ t_3^{+}-\left(26+7\sqrt{2}\right)t_2=t_3 \end{cases}$$

(y、z坐標相同)

$$\Leftrightarrow -t_3^{+}\times\frac{2\left(4\sqrt{2}-7\right)}{2+\sqrt{2}}-\frac{\left(14+9\sqrt{2}\right)\times 2\left(4\sqrt{2}-7\right)}{\left(26+7\sqrt{2}\right)\times\left(2+\sqrt{2}\right)}\times(t_3^{+}-t_3)-\left(\sqrt{2}-6\right)t_3+\left(10+4\sqrt{2}\right)$$
$$=\sqrt{\left(192-32\sqrt{2}\right)t_3+132+80\sqrt{2}-\left(7-4\sqrt{2}\right)\times 16a}$$

由圖(20)-1，我們找出$L_1\cap r_3(t)$的交點$M_0((2-\sqrt{2})t_3^{+},-t_3^{+},t_3^{+})$，得到通過$M_0$且垂直$L_1$的直線$L_2$，利用$L_2\cap r_3(t)$恰有1個交點時，判別式為零求得$a$值，利用定理六得知此時的$M_0$為分歧點。

$$\Leftrightarrow [\frac{\left(14+9\sqrt{2}\right)\times 2\left(4\sqrt{2}-7\right)}{\left(26+7\sqrt{2}\right)\times\left(2+\sqrt{2}\right)}-\left(\sqrt{2}-6\right)]\times t_3-[\frac{2\left(4\sqrt{2}-7\right)}{2+\sqrt{2}}+\frac{\left(14+9\sqrt{2}\right)\times 2\left(4\sqrt{2}-7\right)}{\left(26+7\sqrt{2}\right)\times\left(2+\sqrt{2}\right)}]\times t_3^{+}$$
$$+\left(10+4\sqrt{2}\right)=\sqrt{\left(192-32\sqrt{2}\right)t_3+132+80\sqrt{2}-\left(7-4\sqrt{2}\right)\times 16a}$$

$$\Leftrightarrow 4t_3+1.372583002t_3^{+}+15.65685425$$
$$=\sqrt{146.754166t_3+245.137085-21.49033021\times a}\ \ldots(28)$$

若$a\approx-0.835786$，則$t_3^{+}\approx\frac{1}{2}$且(28)式$\Rightarrow 16t_3^2-16.009t_3+4.00001088=0$

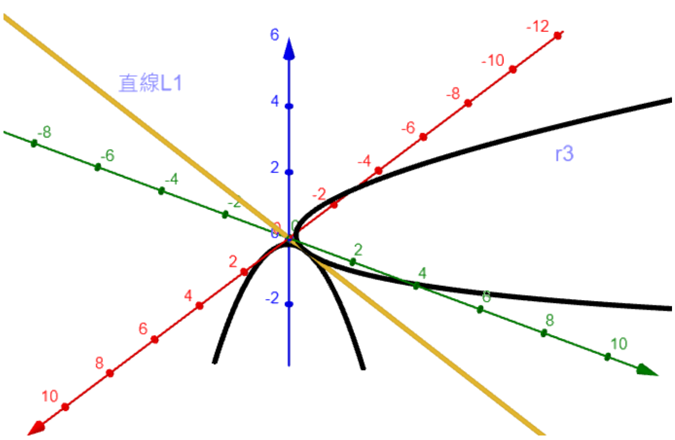
忽略誤差取至整數位$\Rightarrow 16t_3^2-16t_3+4=0$，則$\Delta\approx 0$

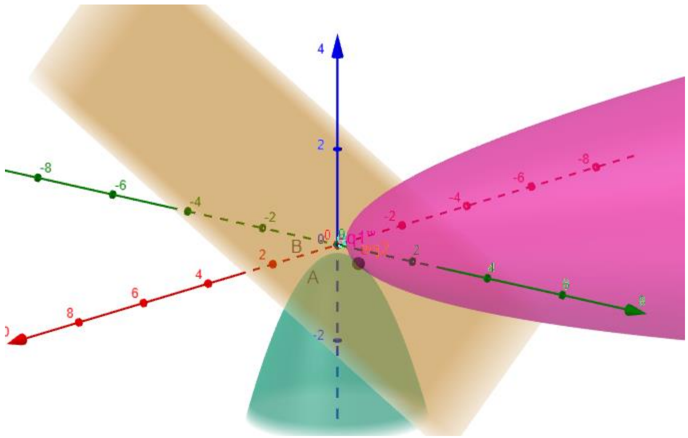
因此，約$-0.835786\leq a<$ 約0.186130225，圖形交於一橢圓曲線，分歧點為

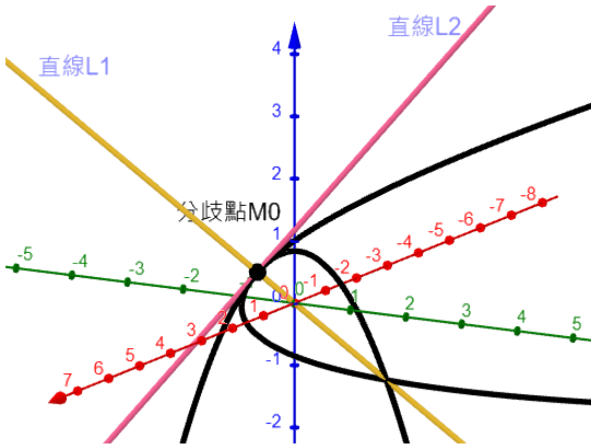
$M_0(\frac{2-\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。

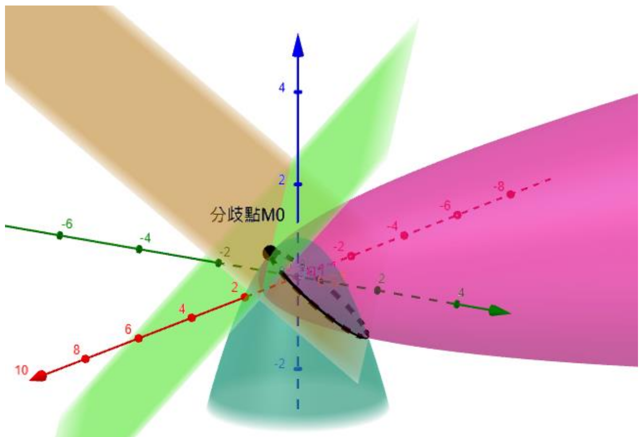
3. <u>證明定理七-(3)</u>:由(28)式知道，若$a < -0.835786$，則$\Delta > 0$表示$L_2 \cap r_3(t)$有2個交點，圖形交於兩個橢圓曲線。

數據模擬

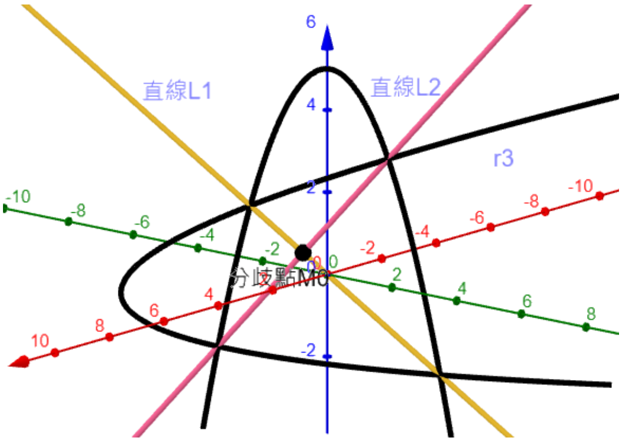
<table>
<tr><th>二維示意圖</th><th>三維示意圖</th></tr>
<tr><td>

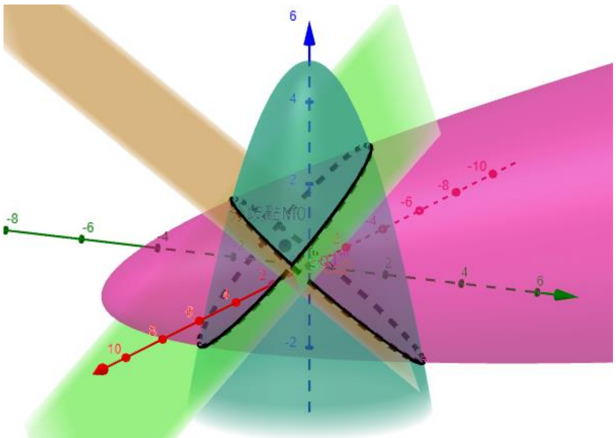
(圖21-11)</td><td>
(圖21-12)</td></tr>
<tr><td colspan="2">橢圓拋物面Γ_1與對稱平面N_1，取參數值$a = 0.186130225$、$r = 5 + 2\sqrt{2}$，兩對稱橢圓拋物面相交於1點。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>二維示意圖</th><th>三維示意圖</th></tr>
<tr><td>

(圖21-21)</td><td>

(圖21-22)</td></tr>
<tr><td colspan="2">橢圓拋物面Γ_1與對稱平面N_1，取參數值$a = -0.835786$、$r = 5 + 2\sqrt{2}$，兩對稱橢圓拋物面相交於一橢圓曲線。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>二維示意圖</th><th>三維示意圖</th></tr>
<tr><td>

(圖21-31)</td><td>
(圖21-32)</td></tr>
<tr><td colspan="2">橢圓拋物面Γ_1與對稱平面N_1，取參數值$a=-5$、$r=5+2\sqrt{2}$，兩對稱橢圓拋物面相交於兩橢圓曲線。</td></tr>
</table>

陸、結論

結論一：對稱於$y=rx$的兩拋物線：

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ \dfrac{2r}{1+r^2}x+\dfrac{r^2-1}{1+r^2}y=a\left(\dfrac{1-r^2}{1+r^2}x+\dfrac{2r}{1+r^2}y\right)^2+b\left(\dfrac{1-r^2}{1+r^2}x+\dfrac{2r}{1+r^2}y\right)+c \end{cases}，(a<0)$$

其交點分歧性為：

(1)若$(b-r)^2-4ac<0$，圖形沒有交點。

(2)若$(b-r)^2-4ac=0$，圖形恰有1個交點。

(3)若$(\frac{1+r^2}{r})^2\geq(b-r)^2-4ac>0$，圖形有2個交點。

其中，分歧點$X_1(\frac{-br-1}{2ar},\frac{-br-1}{2a})$

(4)若$(b-r)^2-4ac>(\frac{1+r^2}{r})^2$，圖形有4個交點。

結論二: 在$d<e$、$b=1$的條件下，拋物線$x^2+2bxy+y^2+2dx+2ey+f=0$對稱於$y=rx$的兩對稱拋物線，其交點分歧性為:

(1)若$(d+er)^2-f\left(r+1\right)^2<0$，圖形沒有交點。

(2)若$(d+er)^2-f\left(r+1\right)^2=0$，圖形恰有1個交點。

(3)若$\left(\frac{(d-e)(r^2+1)}{r-1}\right)^2\geq(d+er)^2-f\left(r+1\right)^2>0$，圖形有2個交點。

其中，分歧點$X_1(\frac{e-dr}{r^2-1},\frac{r(e-dr)}{r^2-1})$

(4)若$(d+er)^2-f\left(r+1\right)^2>\left(\frac{(d-e)(r^2+1)}{r-1}\right)^2$，圖形有4個交點。

結論三: 橢圓拋物面$\Gamma: x^2+y^2=-(z-a)$，對稱於平面$E: x=rz(\mathrm{r}>0)$，其交點分歧性:

(1)若$1+4ar^2<0$，則圖形沒有交點。

(2)若$1+4ar^2=0$，則圖形恰有1個交點，且交點在$M(-\frac{1}{2r},0,-\frac{1}{2r^2})$

(3)若$0<1+4ar^2\leq(1+r^2)^2$，則圖形交於一橢圓曲線，其中

(i)若$r>1$(長軸為y軸)，則相交之橢圓曲線位置向量

$$r_1(t)=\text{中心點}M_1\left(-\frac{1}{2r},0,-\frac{1}{2r^2}\right)+\begin{cases}x=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}sin\theta\\ y=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}cos\theta\\ z=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r^2}sin\theta\end{cases}，0\leq\theta\leq2\pi$$

(ii)若$0<r<1$(長軸為z軸)，則相交之橢圓曲線位置向量

$$r_1(t)=\text{中心點}M_1\left(-\frac{1}{2r},0,-\frac{1}{2r^2}\right)+\begin{cases}x=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}cos\theta\\ y=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r}sin\theta\\ z=\frac{\sqrt{4ar^2+1}}{2r^2}cos\theta\end{cases}，0\leq\theta\leq2\pi$$

(4)若$1+4ar^2>(1+r^2)^2$，則圖形交於兩橢圓曲線，一個為上式(3)所示，另一個如下

(i)若$r>1$(長軸為z軸)，則相交之橢圓曲線位置向量

$$r_2(t)=\text{中心點}M_2\left(\frac{r}{2},0,\frac{1}{2}\right)+\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}cos\theta\\ y=\frac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}sin\theta\\ z=\frac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2}cos\theta\end{cases}，0\leq\theta\leq2\pi$$

(ii)若$0<r<1$(長軸為y軸)，則相交之橢圓曲線位置向量

$$r_2(t)=\text{中心點}M_2(\frac{r}{2},0,\frac{1}{2})+\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}sin\theta\\ y=\frac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2r}cos\theta\\ z=\frac{\sqrt{(1+4ar^2)-(1+r^2)^2}}{2}sin\theta\end{cases}\text{，}0\le\theta\le 2\pi$$

其中，中心點$M_2(\frac{r}{2},0,\frac{1}{2})$為分歧點。

結論四： 橢圓拋物面經尤拉角$X-Y-X$旋轉後，角度取$\alpha=\beta=\gamma=45^0$得到

Γ_1: $\left(2\sqrt{2}x+2y+2z\right)^2+\left(2x+\left(2-\sqrt{2}\right)y-\left(2+\sqrt{2}\right)z\right)^2=8x-4\left(2+\sqrt{2}\right)y-4\left(-2+\sqrt{2}\right)z+16a$，

對稱平面為N_1: $2x-\left(2+\sqrt{2}\right)y+\left(-2+\sqrt{2}\right)rz=0$，在$r=5+2\sqrt{2}$的條件下，其交點分歧性：

(1)若$L_1\cap r_3(t)$恰有1個交點，則圖形交於1點。(此時參數 $a\approx 0.186130225$)

(2)若$L_1\cap r_3(t)$有2個交點或$L_1\cap r_3(t)$有2個交點且$L_2\cap r_3(t)$恰有1個交點為分歧點$M_0(\frac{2-\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，則圖形交於一橢圓曲線。

(此時: 約$-0.835786\le a<$約0.186130225)

(3)若$L_1\cap r_3(t)$與$L_2\cap r_3(t)$皆有2個交點，則圖形交於兩橢圓曲線。

(此時: $a<$約-0.835786)

柒、參考資料

1. 屏東縣第53屆科展國中組數學-舞動的曲線
2. 龍騰文化數學甲(上)教師手冊(91年3月第二版)，第40頁、第50~57頁、第98~99頁
3. 維基百科-歐拉角定理(網路搜尋)
   https://zh.wikipedia.org/wiki/欧拉角
4. 空間橢圓表示法(網路關鍵)
   https://ocw.chu.edu.tw/pluginfile.php/816/mod_resource/content/22/Summary_217.pdf