屏東縣第 60 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：n 皇后

關 鍵 詞：等差數列、二元一次方程式的圖形

編號：

n 皇后

摘要

一、在 $X \times X$ 的棋盤中，先放一棋子在任何一個方格中，之後所放的每顆棋子，都要遵循下列
則:

（一）任意兩顆或兩顆以上棋子不同行、不同列、亦不能在同一條 45° 角的斜線上。

（二）每一方格皆最多只能放一顆棋子。

二、本研究在探討若依循上述規則，在棋盤中如何能放入最多顆棋子，並研究其配置方法，
在 8×8 之棋盤中，若方法正確，則最多可在棋盤上排出 8 顆棋子，若方法錯誤，則無論如何都無法排出 8 顆棋子。

壹、 研究動機

有一天在網路上瀏覽到一個叫「八皇后」的遊戲，這遊戲有一個規則，先在任意一個方格中放一皇后(棋子)，當第二個皇后放下去時，若和第一個皇后同行、同列或在同一條斜線上，則第一個皇后就會被吃掉，第二個皇后保留在棋盤上；後來所放置的皇后，將會吃掉前面所放與其同行、同列或同一斜線的皇后，由於此遊戲的棋盤為 8×8 的方格，最多能放八個皇后，因此這遊戲稱「八皇后」，但若排錯位置，則無法排出八個皇后。而此遊戲也可從 8×8 棋盤，推廣至 $n \times n$ 棋盤。

貳、 研究目的

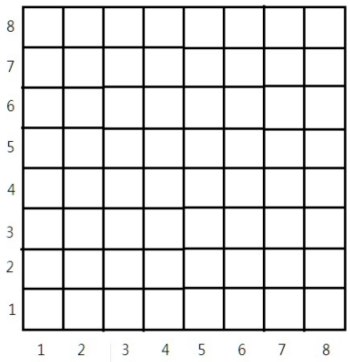
探討在 $n \times n$ 棋盤中，遵循任兩顆棋子不同行、不同列，亦不在同一斜線的規則下，最多能放置幾顆棋子，並分析棋子的配置方法。

參、 研究設備及器材

紙、筆、橡皮擦

肆、 研究過程或方法

第一，先將棋盤座標化，如下圖所示:



第二，由於任兩顆棋子不可在同行與同列，因此這 8 個點中任兩點的 x 坐標並不會相等，而且 1~8 中，每個數字都會出現一次，y 座標亦是如此。因此可以先固定 x 座標，並分成八個部分，如下圖:

一	二	三	四	五	六	七	八
(1,y)	(2,y)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)

第三，從 y=1 開始用樹狀圖討論，依序將可以放置的座標列出:

一	二	三	四	五	六	七	八
(1,1)	(2,3)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
	(2,4)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
	(2,5)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
	(2,6)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
	(2,7)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
	(2,8)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
(1,2)	(2,4)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
	(2,5)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
	(2,6)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
	(2,7)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
	(2,8)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)

一	二	三	四	五	六	七	八
(1,1)	(2,3)	(3,5)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
		(3,6)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
		(3,7)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)

	(3,8)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
(2,4)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
(2,5)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
(2,6)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
(2,7)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
(2,8)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)

(2,4)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
(2,5)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
(2,6)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
(2,7)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)
(2,8)	(3,y)	(4,y)	(5,y)	(6,y)	(7,y)	(8,y)

依此規則進行，最後共找出 92 種解法，但這些排法裡，有的排法若將其旋轉或翻轉，會與其它排法重複，因此若不考慮旋轉、對稱，則有 12 種解法，

此 12 種解法為

(1,1)(2,7)(3,4)(4,6)(5,8)(6,2)(7,5)(8,3)

(1,1)(2,7)(3,5)(4,8)(5,2)(6,4)(7,6)(8,3)

(1,2)(2,4)(3,6)(4,8)(5,3)(6,1)(7,7)(8,5)

(1,3)(2,1)(3,7)(4,5)(5,8)(6,2)(7,4)(8,6)

(1,4)(2,1)(3,5)(4,8)(5,2)(6,7)(7,3)(8,6)

(1,5)(2,1)(3,4)(4,6)(5,8)(6,2)(7,7)(8,3)

(1,5)(2,1)(3,8)(4,4)(5,2)(6,7)(7,3)(8,6)

(1,5)(2,1)(3,8)(4,6)(5,3)(6,7)(7,2)(8,4)

(1,5)(2,3)(3,1)(4,7)(5,2)(6,8)(7,6)(8,4)

(1,5)(2,7)(3,1)(4,4)(5,2)(6,8)(7,6)(8,3)

(1,6)(2,3)(3,1)(4,8)(5,4)(6,2)(7,6)(8,5)

(1,7)(2,1)(3,3)(4,8)(5,6)(6,4)(7,2)(8,5)

分析每組解的每個點之 x 座標與 y 座標的關係，

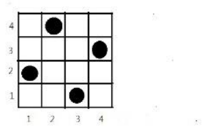
第一組	(1,1)	(2,7)	(3,4)	(4,6)	(5,8)	(6,2)	(7,5)	(8,3)
x-y	0	-5	-1	-2	-3	4	2	5
第二組	(1,1)	(2,7)	(3,5)	(4,8)	(5,2)	(6,4)	(7,6)	(8,3)
x-y	0	-5	-2	-4	3	2	1	5
第三組	(1,2)	(2,4)	(3,6)	(4,8)	(5,3)	(6,1)	(7,7)	(8,5)
x-y	-1	-2	-3	-4	2	5	0	3
第四組	(1,3)	(2,1)	(3,7)	(4,5)	(5,8)	(6,2)	(7,4)	(8,6)
x-y	-2	1	-4	-1	-3	4	3	2
第五組	(1,4)	(2,1)	(3,5)	(4,8)	(5,2)	(6,7)	(7,3)	(8,6)
x-y	-3	1	-2	-4	3	-1	4	2
第六組	(1,5)	(2,1)	(3,4)	(4,6)	(5,8)	(6,2)	(7,7)	(8,3)
x-y	-4	1	-1	-2	-3	4	0	5
第七組	(1,5)	(2,1)	(3,8)	(4,4)	(5,2)	(6,7)	(7,3)	(8,6)
x-y	-4	1	-5	0	3	-1	4	2
第八組	(1,5)	(2,1)	(3,8)	(4,6)	(5,3)	(6,7)	(7,2)	(8,4)
x-y	-4	1	-5	-2	2	-1	5	4
第九組	(1,5)	(2,3)	(3,1)	(4,7)	(5,2)	(6,8)	(7,6)	(8,4)
x-y	-4	-1	2	-3	3	-2	1	4
第十組	(1,5)	(2,7)	(3,1)	(4,4)	(5,2)	(6,8)	(7,6)	(8,3)
x-y	-4	-5	2	0	3	-2	1	5
第11組	(1,6)	(2,3)	(3,1)	(4,8)	(5,4)	(6,2)	(7,6)	(8,5)
x-y	-5	-1	2	-4	1	4	1	3
第12組	(1,7)	(2,1)	(3,3)	(4,8)	(5,6)	(6,4)	(7,2)	(8,5)
x-y	-6	1	0	-4	-1	2	5	3

我們以比較有規律的第三組及第九組來研究，發現第三組的前四個座標都在與 y=2x 平行的直線上，即 x 座標向右一格，y 座標向上兩格；而在第九組，前四個數對的 x-y 之值與後四個數對 x-y 之值互為相反數，且 x=8 時，y 之值為 4，剛好是 x 之值的一半。並以此探討其它 $n \times n$ 棋盤是否可由此探討，至少找出一組解。

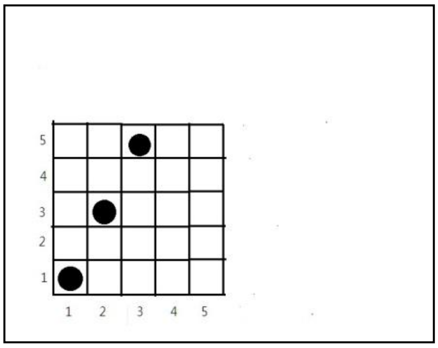
另外，由於任兩顆棋子不可在同一條 45° 斜線，因此若選第一個點為(1,1)時，則在 $y = x$ 直線上的點都不可選，因此若棋子在 y=2x+k 的直線上時，則任兩點不會在同一條斜線上。

3×3無論如何都無法找出任何解

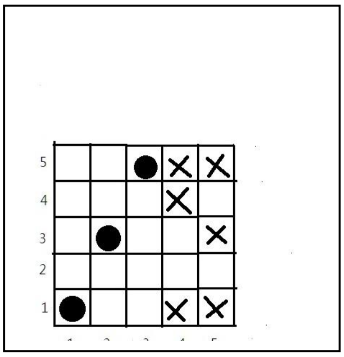
4×4 可用下列方式排出來:



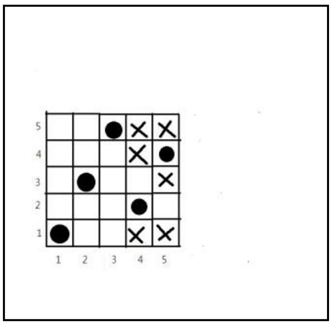
5×5 第一步:先在(1,1)上放一棋子，並依照(x 座標向右一格，y 座標向上兩格)的規則放棋子，直到最頂端。



第二步:將不可放入棋子的位置畫 X



第三步:現在由(4,2)或(4,3)放入棋子，但如果放在(4,3)，則第五行無位子可放置棋子，因此選擇(4,2)，而剩下一棋子可放入(5,4)。



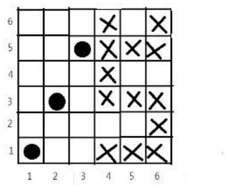
從上圖可發現，(4,2)與(5,4)連成的直線，也和 y=2x 之直線平行。

以下為所有座標 x+y 與 x-y 的關係，在 x+y 一欄中，數字不重複且上三個數字呈等差，下兩個也成等差，x-y 也有這樣的情形。

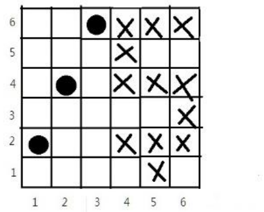
(x,y)	x+y	x-y
(1,1)	2	0
(2,3)	5	-1
(3,5)	8	-2
(4,2)	6	2
(5,4)	9	1

6×6：依照5×5 的規則，將前三欄放入棋子，但這樣一來，第四欄只能放至(4,2)，第六欄只能放

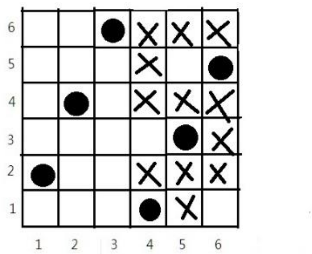
至(6,4)，但(4,2)與(6,4)在同一斜線上，因此這個方法不適用於 6×6



若將(1,1)，(2,3)，(3,5)各往上移一格，到達(1,2)、(2,4)、(3,6)，使這三點連成的直線與 y=2x 平行，並找出剩下的三點。



由於若選擇(4,3)，則會和(6,1)、(6,5)衝突，導致第六欄沒位子可選，因此選擇(4,1)，放入(4,1)後，因為若選擇(5,5)，則剩下的(6,1)與(4,1)在同一列，(6,5)與(5,5)在同一列，因此剩下的點選擇(5,3)、(6,5)。

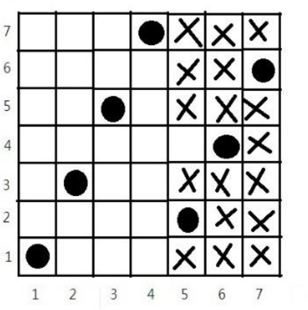


由上圖可發現，(4,1)、(5,3)、(6,5)三點接在同一直線上且連成的直線與 y=2x 平行。

下表中，x+y 一欄中，上三個與下三個各呈等差且六個數字都不重複，x-y 亦是如此。

(x,y)	x+y	x-y
(1,2)	3	-1
(2,4)	6	-2
(3,6)	9	-3
(4,1)	5	3
(5,3)	8	2
(6,5)	11	1

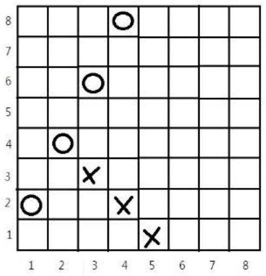
7×7:做法與 5×5 相同，所找出的點如下:



以下為7×7的座標及每個座標的 x+y 與 x-y 之值的關係，發現與5×5相似，就 y 座標而言，5×5為 1、3、5、2、4，7×7為 1、3、5、7、2、4、6

(x,y)	x+y	x-y
(1,1)	2	0
(2,3)	5	-1
(3,5)	8	-2
(4,7)	11	-3
(5,2)	7	3
(6,4)	10	2
(7,6)	13	1

因此，在此可做推測，在$n\times n$棋盤中，若 n 為奇數，則可先在(1,1)棋子，並在 y=2x-1 直線中放入棋子，直到棋子放入$(\frac{n+1}{2},n)$的位置時，為棋盤的最頂層(因為最頂層為 y=n，則代入方程式 y=2x-1 後，n=2x-1$\Rightarrow x=\frac{n+1}{2}$)，則下一個棋子可從$(\frac{n+1}{2}+1,2)$開始放置，而後來放置的棋子，也都與$(\frac{n+1}{2}+1,2)$在
y=2x-8 的直線上。
但是8×8並沒有像6×6一樣的規則，因為當我們照6×6的規則放入棋子時，會發現(2,4)與(5,1)在同一斜線上。



如何在不畫圖情況下，判斷兩顆棋子不在同一斜線上?因為若兩點在同一斜線上，則此兩點所連成的直線必與 y=x 或 y=-x 平行，例如上述的(2,4)與(5,1)，這兩點連成的直線為 y=-x+6，與 y=-x 平行，因此若任兩點連成的直線為 $y=x+k$或$y=-x+k$ ，則這兩點在同一斜線上。

而 $y=x+k \Rightarrow y-x=k$ (x 與 y 為任意一點之 x 座標與 y 座標，k 為常數)，因此若任兩點的 x 座標與 y 座標之差相同時，可知道這兩點在同一斜線上。

$y=-x+k \Rightarrow x+y=k$ (x 與 y 為任意一點之 x 座標與 y 座標，k 為常數)，若若任兩點的 x 座標與 y 座標之和相同時，可知道這兩點在同一斜線上。例如座標(2,4)與(5,1),因為 2+4=5+1=6，所以在同一斜線上。

所以除了 x 座標與 y 座標不重覆外，x 座標與 y 座標之和與 x 座標與 y 座標之差亦不可重複。

除了8×8以外，還有哪些 偶數$\times$偶數 棋盤有6×6的規則，哪些沒有呢?

討論6×6的所有座標其 x 座標與 y 座標之和與其 x 座標與 y 座標之差

$(1,2)\Rightarrow 1+2=3,1-2=-1$

$(2,4)\Rightarrow 2+4=6,2-4=-2$

$(3,6)\Rightarrow 3+6=9,3-6=-3$

$(4,1)\Rightarrow 4+1=5,4-1=3$

$(5,3)\Rightarrow 5+3=8,5-3=2$

$(6,5)\Rightarrow 6+5=11,6-5=1$

因此若 n 為偶數，則可推測若以6×6方法找點，則前三個點與後三個點的 x 與 y 座標之和各成等差，且公差為 3，而前三個點與後三個點 x 與 y 座標之差也各成等差，公差為-1。

8×8也用6×6的規則，前三組與6×6相同:

$(1,2)\Rightarrow 1+2=3,1-2=-1$

$(2,4)\Rightarrow 2+4=6,2-4=-2$

$(3,6)\Rightarrow 3+6=9,3-6=-3$

而8×8最頂層的座標為

若$(4,8)\Rightarrow 4+8=12,4-8=-4$

$x=5$開始遵照6×6的規則，y座標從1開始:

$(5,1)\Rightarrow 5+1=6,5-1=4$

$(6,3)\Rightarrow 6+3=9,6-3=3$

$(7,5)\Rightarrow 7+5=12,7-5=2$

$(8,7)\Rightarrow 8+7=15,8-7=1$

由上述可知，前四組與後四組 x 座標與 y 座標之和各成等差且公差皆為 3，因此只要找到最頂層座標後，若下一欄的點(即$x=\frac{n}{2}+1, y=1$)的 x 座標與 y 座標之和與前$\frac{n}{2}$組其中一個點相同，由於接下來要找的點的 x 與 y 座標之和會呈等差，因此會與前$\frac{n}{2}$組重覆 。如上述8×8的前四組 x 與 y 座標之和為 3,6,9,12，後四組為 6,9,12,15，數字會重複；而6×6的前三組 x 與 y 座標之和為

3,6,9，後三組為 5,8,11，數字不會重複，因此只要判斷($\frac{n}{2}+1,1$)的 x 座標與 y 座標之和是否與前$\frac{n}{2}$組任一點重覆即可。

所以其他的偶數$\times$偶數的前$\frac{n}{2}$組的點可遵照6×6的規則，即(1,2)、(2,4)、(3,6)、(4,8).......，再探討($\frac{n}{2}+1,1$)是否與前$\frac{n}{2}$組的任一點在同一斜線上，而前$\frac{n}{2}$組的每個點之 x 座標與 y 座標之和為 3,6,9,12,......，當$x=\frac{n}{2}+1, y=1$時，x+y=$\frac{n}{2}+2$，若$\frac{n}{2}+2=3,6,9,12,......$時，則($\frac{n}{2}+1,1$)會與前$\frac{n}{2}$得其中一個點在同一斜線上，所以不可放置棋子。

現在可以知道，哪些 n 值無法用此方法:

$$\frac{n}{2}+2=6,\Rightarrow n=8$$

$$\frac{n}{2}+2=9,\Rightarrow n=14$$

$$\frac{n}{2}+2=12,\Rightarrow n=20$$

$$\frac{n}{2}+2=15,\Rightarrow n=26$$

依此類推，n=8,14,20,26,32.....時，不適用於6×6此種方法，而這些 n 值成等差數列，公差為 6，所以當 n=6k+2 時(k 為任意正整數)，不適用於6×6此種方法。

由於若以6×6的找法，x 座標與 y 座標之差皆不可能重複

(前$\frac{n}{2}$組與後$\frac{n}{2}$組x座標與y座標之差互為相反數)，所以不須列入考量。

現在探討其他$n\neq6k+2$時(k 為任意正整數)，偶數$\times$偶數是否可適用於6×6的形式:

10×10:

(x,y)	x+y	x-y
(1,2)	3	-1
(2,4)	6	-2
(3,6)	9	-3
(4,8)	12	-4
(5,10)	15	-5
(6,1)	7	5
(7,3)	10	4
(8,5)	13	3
(9,7)	16	2
(10,9)	19	1

12×12

(x,y)	x+y	x-y
(1,2)	3	-1
(2,4)	6	-2
(3,6)	9	-3
(4,8)	12	-4
(5,10)	15	-5
(6,12)	18	-6
(7,1)	8	6
(8,3)	11	5
(9,5)	14	4
(10,7)	17	3
(11,9)	20	2
(12,11)	23	1

16×16

(x,y)	x+y	x-y

(1,2)	3	-1
(2,4)	6	-2
(3,6)	9	-3
(4,8)	12	-4
(5,10)	15	-5
(6,12)	18	-6
(7,14)	21	-7
(8,16)	24	-8
(9,1)	10	8
(10,3)	13	7
(11,5)	16	6
(12,7)	19	5
(13,9)	22	4
(14,11)	25	3
(15,13)	28	2
(16,15)	31	1

18×18

(x,y)	x+y	x-y
(1,2)	3	-1
(2,4)	6	-2
(3,6)	9	-3
(4,8)	12	-4
(5,10)	15	-5
(6,12)	18	-6
(7,14)	21	-7
(8,16)	24	-8
(9,18)	27	-9
(10,1)	11	9
(11,3)	14	8
(12,5)	17	7
(13,7)	20	6
(14,9)	23	5
(15,11)	26	4
(16,13)	29	3
(17,15)	32	2
(18,17)	35	1

由於每個點的 x+y 與 x-y 皆不重覆，所以可知道上述的偶數×偶數可適用於6×6的方法，而前五組與後五組皆為公差為 3 的等差數列，但兩數列的數字不可能重複，前五組為 3 的倍數，後五組

為 3 的倍數+1，既然沒有重複的情形，則
除了 $(6k+2)\times(6k+2)$ 以外(k為正整數)，其它的 偶數×偶數 為 $6k\times 6k$及$(6k+4)\times(6k+4)$ ，都可用公式來找出一組解。由於前 $\frac{n}{2}$

組的 y 座標成等差且公差為 2，因此前 $\frac{n}{2}$ 組的解都在直線 y=2x 上；而後 $\frac{n}{2}$

組也成等差，但是的後 $\frac{n}{2}$ 組解所形成的直線不同，因此要分開探討:

6×6的後3個點在直線$y=2x-7$上
12×12的後6個點在直線$y=2x-13$上
16×16的後8個點在直線$y=2x-17$上
18×18的後9個點在直線$y=2x-19$上

若依此規則，可推測其它 $6k\times 6k$及$(6k+4)\times(6k+4)$ 的後 $\frac{n}{2}$ 組解在直線 $y=2x-(n+1)$上 。

而 8×8 在上述八皇后的解已探討過，現在以 8×8 比較有規律的的第九組去探討其他 $(6k+2)\times(6k+2)$ 的解

8×8第九組:

(x,y)	x+y	x-y
(1,5)	6	-4
(2,3)	5	-1
(3,1)	4	2
(4,7)	11	-3
(5,2)	7	3
(6,8)	14	-2
(7,6)	13	1
(8,4)	12	4

8×8第九組 的前三組與後三組的 y 座標各成等差，且公差為-2；而當 x=4 時，若 y=-1，則前四組可成等差，但是 y 不可為負數，但我們可將 7 想成是-1+8 所形成，也就是說，若依循前三組等差的規則，發現 x=4 時，y 若是負數，則加上 8 使 y 變為正整數；而當 x=5 時，若 y=10 也可使後四組成等差，但 y=10 已超過 8，我們可將 2 想成是 10-8 形成，也就是說，若依此等差規則，當 y 不在 1~8 範圍內時，以+8 或-8 調整。

當探討其他 $(6k+2)\times(6k+2)$ 時，可照 8×8第九組 的方法找解，而在 8×8第九組 中，發現當 x=1 時，x-y=-4 及 x=8 時，x-y=4，4 為 8 的一半，所以在找 $(6k+2)\times(6k+2)$ 的解時，可從 x=1，x-y=-(3k+1)，及 x=6k+2，x-y=3k+1 開始討論。

在找 14×14 時，因為 $14\div 2=7$ ，所以當 x=1，x-y=-7 及 x=14，x-y=7 開始找起，先找到(1,8)，再以 y 的公差為-2 找到前 7 組解，而後 7 組解則以(14,7)開始以 y 公差為 2 找到後七組解。在找的過程中，當 y 不在 1~14 的範圍時，以+14 或-14 使其在範圍內。

14×14

(x,y)	x+y	x-y
(1,8)	9	-7
(2,6)	8	-4
(3,4)	7	-1
(4,2)	6	2
(5,14)	19	-9
(6,12)	18	-6
(7,10)	17	-3
(8,5)	13	3
(9,3)	12	6
(10,1)	11	9
(11,13)	24	-2
(12,11)	23	1
(13,9)	22	4
(14,7)	21	7

完成上表後，會發現前七組與後七組的 x-y 互為相反數，而 x+y 在一欄裡，發現
有四組等差數列 9,8,7,6、19,18,17、13,12,11、及 24,23,22,21。
若要確定任意兩個 x+y 的值皆不重複，我們可將這四組等差數列進行編組:9,8,7,6、19,18,17、13,12,11、24,23,22,21

第一組　第二組　第三組　第四組

$$\text{第四組} \geq 14\times\frac{3}{2} > \text{第二組} > 14 > \text{第三組} > 14\times\frac{1}{2}+2 \geq \text{第一組}$$

因為這四組等差數列都在一定的範圍內，所以我們可以確定 x+y 任意兩個值都不會重複。

而在14×14的表格中，因為 x、y、x+y 及 x-y 皆沒有重複的情形，因此可確定任兩點不在同一行、同一列及不在同一斜線上。

而20×20也可以用上述找法:

(x,y)	x+y	x-y
(1,11)	12	-10
(2,9)	11	-7
(3,7)	10	-4
(4,5)	9	-1
(5,3)	8	2
(6,1)	7	5
(7,19)	26	-12
(8,17)	25	-9
(9,15)	24	-6

(10,13)	23	-3
(11,8)	19	3
(12,6)	18	6
(13,4)	17	9
(14,2)	16	12
(15,20)	35	-5
(16,18)	34	-2
(17,16)	33	1
(18,14)	32	4
(19,12)	31	7
(20,10)	30	10

因為 20×20 的表格中，x,y,x+y 及 x-y 都沒有重複的情形，所以可以確定可用 14×14 的方法。而 x+y 也有四組等差數列，若要確定任意兩個 x+y 的值不重複，我們先將它們編組:

12,11,10,9,8,7、26,25,24,23、19,18,17,16、35,34,33,32,31,30

第一組　　　第二組　　　第三組　　　第四組

而這四組等差數列，剛好都有範圍，所以都不會與其他組的數字重複。

$$\text{第四組}\geq 20\times1.5>\text{第二組}>20>\text{第三組}>20\times\frac{1}{2}+2\geq\text{第一組}$$

因此我們確定 x+y 的值皆不重複，

由以上 14×14 及 20×20 可知，當 $n=6k+2$ 時，可遵循以下步驟找解:

第一步:當 x=1 時，$x-y=-\frac{n}{2}\Rightarrow y=\frac{n}{2}+1$，並以 x 座標每+1，y 座標就-2 的規律往下找，在找的過程中，若發現 y 值不在 1~n 的範圍內，則以+n 或-n 解決，找出前 $\frac{n}{2}$ 組解。

第二步:當 x=n 時，$x-y=\frac{n}{2}\Rightarrow y=\frac{n}{2}$ 並以 x 座標每-1，y 座標就+2 的規律往上找，若發現 y 值不在 1~n 的範圍內，則以+n 或-n 解決，找出後 $\frac{n}{2}$ 組解。

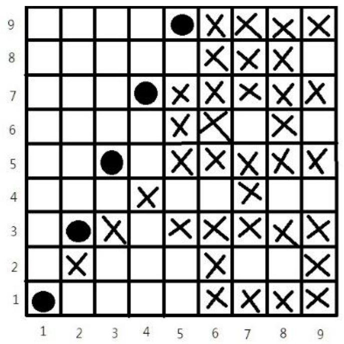
上述幾組中，與 8×8 的第九組最有關係者為 14×14 與 20×20，所以我們可知道其他 $(6k+2)\times(6k+2)$ 也有這樣的規則，如何確定任兩點不會在同一列?就 y 值而言，前 $\frac{n}{2}$ 組的 y 值皆為奇數，而且小於 $\frac{n}{2}$ 的所有奇數都有出現，剛好為 $\frac{n}{2}$ 個；後 $\frac{n}{2}$ 組的 y 值皆為偶數，而且小於或等於 $\frac{n}{2}$ 的所有偶數都有出現，剛好為 $\frac{n}{2}$ 個；因此確定不在同一行。如何確定任兩點不在同一斜線上?就 x+y 而言，可以 x+y 的值形成四組等差數列，而這四組都各在一定的範圍內:

$$\text{第四組}\geq n\times1.5>\text{第二組}>n>\text{第三組}>n\times\frac{1}{2}+2\geq\text{第一組}$$

所以 x+y 的值都不會重複。

而就 x-y 而言，前$\frac{n}{2}$組與後數字形成另類的等差數列(即有些數字+n 或-n 以後，整組形成等差數列)，所以前$\frac{n}{2}$組及後$\frac{n}{2}$組的數字皆不重複，而原來的 x-y 還沒+n 或-n 時，前$\frac{n}{2}$組及後$\frac{n}{2}$組的數字互為相反數，所以前$\frac{n}{2}$組的 x-y 的任何一個值，並不會與後$\frac{n}{2}$組重覆。

現在探討9×9有沒有像5×5、7×7的規則



依照與5×5、7×7的第一步驟放入棋子，當棋子放至最頂層(5,9)時，發現無法將下一顆棋子擲入(6,2)，因為(6,2)與(3,5)在同一斜線上。

上述的5×5及7×7的找法，是否只有9×9不適合呢?

先討論以5×5及7×7的找法，在 y=2x-1 直線上的棋子座標及其 x 座標與 y 座標之和

$(1,1) \Rightarrow 1+1=2$

$(2,3) \Rightarrow 2+3=5$

$(3,5) \Rightarrow 3+5=8$

$(4,7) \Rightarrow 4+7=11$

而增廣至9×9時，最頂層的座標為

$(5,9) \Rightarrow 5+9=14$

因此若 n 為奇數，則可推測若以前述方法找點，則這些點之和會呈等差，且公差為 3:

$(1,1) \Rightarrow 1+1=2$

$(2,3) \Rightarrow 2+3=5$

$(3,5) \Rightarrow 3+5=8$

$(4,7) \Rightarrow 4+7=11$

$(5,9) \Rightarrow 5+9=14$

而在9×9中，若 y=2，x=6，則 6+2=8 會與(3,5)在同一斜線，其他的 奇數×奇數 ，當$x=\frac{n+1}{2}+1, y=2$，若$x+y$等於 2,5,8,11,.....此等差數列任一數的話，則無法用5×5及7×7的方法。現在可以知道哪些 n 值無法用此方法:

$x=\frac{n+1}{2}+1, y=2 \Rightarrow x+y=\frac{n+1}{2}+3$

若$x+y=\frac{n+1}{2}+3=8$,則$n=9$

若$x+y=\frac{n+1}{2}+3=11$,則$n=15$

若$x+y=\frac{n+1}{2}+3=14$,則$n=21$

依此類推，發現 n 值為 9,15,21,.....時，不適用於$5\times5,7\times7$的找法，我們將這些 n 值以 6k+3 表示(k 為正整數)，而除了$(6k+3)\times(6k+3)$外，現在探討其他奇數$\times$奇數是否適用於5×5及7×7的找法:

11×11:

(x,y)	x+y	x-y
(1,1)	2	0
(2,3)	5	-1
(3,5)	8	-2
(4,7)	11	-3
(5,9)	14	-4
(6,11)	17	-5
(7,2)	9	5
(8,4)	12	4
(9,6)	15	3
(10,8)	18	2
(11,10)	21	1

13×13

(x,y)	x+y	x-y
(1,1)	2	0
(2,3)	5	-1
(3,5)	8	-2
(4,7)	11	-3
(5,9)	14	-4
(6,11)	17	-5
(7,13)	20	-6
(8,2)	10	6
(9,4)	13	5
(10,6)	16	4
(11,8)	19	3
(12,10)	22	2

(13,12)	25	1

17×17

(x,y)	x+y	x-y
(1,1)	2	0
(2,3)	5	-1
(3,5)	8	-2
(4,7)	11	-3
(5,9)	14	-4
(6,11)	17	-5
(7,13)	20	-6
(8,15)	23	-7
(9,17)	26	-8
(10,2)	12	8
(11,4)	15	7
(12,6)	18	6
(13,8)	21	5
(14,10)	24	4
(15,12)	27	3
(16,14)	30	2
(17,16)	33	1

與前面偶數×偶數得探討方法類似，上述奇數×奇數，可以 $(6k+1)\times(6k+1)$及$(6k+5)\times(6k+5)$表示(k 為正整數)，在找解時，前$\frac{n+1}{2}$組解皆在直線 $y=2x-1$ 直線上，現在探討後$\frac{n-1}{2}$組解所形成的直線:

$5\times5: y=2x-6$

$7\times7: y=2x-8$

$11\times11: y=2x-12$

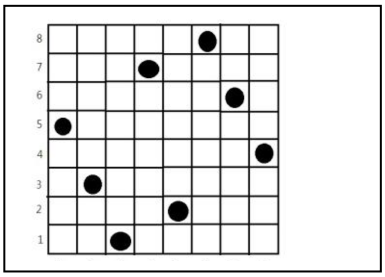
$13\times13: y=2x-14$

$17\times17: y=2x-18$

依此規則，可推測其它$(6k+1)\times(6k+1)$及$(6k+5)\times(6k+5)$的後$\frac{n-1}{2}$組解在直線 $y=2x-(n+1)$上 。

雖然9×9無法與5×5、7×7一樣，但是，9×9與8×8中的第九組圖形有關，可將第九組圖形向下增加一列，向左增加一欄，變成9×9棋盤，並增加(1,1)這個點。

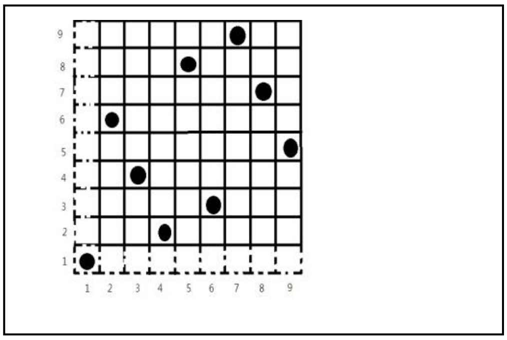
8×8第九組圖形:



往下增一列，往左增一欄後，由於沒有任何點在 x=y 直線上，因此可增加點(1,1)

9×9 :

(x,y)	x+y	x-y
(1,1)	2	0
(2,6)	8	-4
(3,4)	7	-1
(4,2)	6	2
(5,8)	13	-3
(6,3)	9	3
(7,9)	16	-2
(8,7)	15	1
(9,5)	14	4



因為所有 x 座標、y 座標、x+y 及 x-y 皆不重覆，所以因此確定此為9×9的一組解，現在以9×9探討是否可找到其他$(6k+3)\times(6k+3)$的解。

由於9×9可用8×8第九組加一欄、一列後，在加上點(1,1)找出一組解，15×15也可用上述14×14的解，依相同方法找出，因為增加一欄及一列後，並無任何點在$y=x$的直線上。

15×15

(x,y)	x+y	x-y
(1,1)	2	0
(2,9)	11	-7
(3,7)	10	-4
(4,5)	9	-1
(5,3)	8	2
(6,15)	21	-9
(7,13)	20	-6
(8,11)	19	-3
(9,6)	15	3
(10,4)	14	6
(11,2)	13	9
(12,14)	26	-2
(13,12)	25	1
(14,10)	24	4
(15,8)	23	7

因為所有 x 座標、y 座標、x+y 及 x-y 皆不重覆，因此確定此為15×15的一組解。

21×21可用20×20的解，以上述方法找出一組解:

(x,y)	x+y	x-y
(1,1)	2	0

(2,12)	14	-10
(3,10)	13	-7
(4,8)	12	-4
(5,6)	11	-1
(6,4)	10	2
(7,2)	9	5
(8,20)	28	-12
(9,18)	27	-9
(10,16)	26	-6
(11,14)	25	-3
(12,9)	21	3
(13,7)	20	6
(14,5)	19	9
(15,3)	18	12
(16,21)	37	-5
(17,19)	36	-2
(18,17)	35	1
(19,15)	34	4
(20,13)	33	7
(21,11)	32	10

因為$(6k+3)\times(6k+3)$是從$(6k+2)\times(6k+2)$增加一欄、一列，再增加一點(1,1)得來，所以既然$(6k+2)\times(6k+2)$確定用特定步驟可找出一組解，而且任何一點不在同一行、同一列及斜線上，而且增加一欄及一列後，都不會有點在直線 y=x 上，所以確定增加點(1,1)，找到$(6k+3)\times(6k+3)$最後一個點後，也不會有任何點在同一行、同一列或同一斜線上。而在找$(6k+3)\times(6k+3)$的解時，可先依循$(6k+2)\times(6k+2)$的步驟找出$(6k+2)\times(6k+2)$的解後，將每個$(6k+2)\times(6k+2)$的點的 x 座標及 y 座標都+1，再加上點(1,1)即可。

所以在找$(6k+3)\times(6k+3)$時，可依下列步驟找出一組解:

步驟一:先依循$(6k+2)\times(6k+2)$的方法，找出$(6k+2)\times(6k+2)$的解，例如:若要找27×27的解，則先找出26×26的解。

步驟二:將$(6k+2)\times(6k+2)$的棋盤增加一欄及一列，即每個座標的 x 座標與 y 座標都+1，此時只有$6k+2$個棋子，還差一個。

步驟三:加上點(1,1)，為$(6k+3)\times(6k+3)$棋盤放下最後一顆棋子。

如何證明是對的:(1)確定每個座標的 x 座標不重複，即任兩點不在同一行。

(2)確定每個座標的 y 座標不重複，即任兩點不在同一列。

(3)確定一組解中每個座標 x+y 之值皆不重複與 x-y 之值皆不 重複，所以可知

道任兩點連成的直線絕對不會與 $y = x$或$y = -x$ 平行，即任兩點皆不在同一條斜線上。

伍、研究結果

一、如何保證任兩點不在同一行、同一列及同一斜線上?

（一） 確定每個座標的 x 座標不重複，即任兩點不在同一行。

（二）. 確定每個座標的 y 座標不重複，即任兩點不在同一列。

（三） 確定一組解中每個座標 x+y 之值皆不重複與 x-y 之值皆不 重複，所以可知道任兩點連成的直線絕對不會與 $y = x$或$y = -x$ 平行，即任兩點皆不在同一條斜線上。

二、以下為所有 $n \times n$ 棋盤(n≥ 4)的找點方法:

（一） 5×5 、 7×7 、 11×11 、 13×13 、 17×17 、......等形式為 $(6k+1) \times (6k+1)$ 與 $(6k-1) \times (6k-1)$

者歸為一類，其中 $k \geq 1$，它們的公式為

$$\text{公式: } y = \begin{cases} 2x-1, \text{若} x \leq \dfrac{n+1}{2} \\ 2x-1-n\text{，若} x > \dfrac{n+1}{2} \end{cases}$$

（二） 4×4 、 6×6 、 10×10 、 12×12 、 16×16 、 18×18 、.....等形式為 $(6k) \times (6k)$ 、 $(6k+4) \times (6k+4)$ 者歸為一類，其中 $k \geq 0$

$$\text{公式: } y = \begin{cases} 2x\text{，若} x \leq \dfrac{n}{2} \\ 2x-1-n\text{，若} x > \dfrac{n}{2} \end{cases}$$

（三） 8×8 、 14×14 、 20×20 、......等形式為 $(6k+2) \times (6k+2)$ 者歸為一類，($k \geq 1$)可依循下列步驟:

１、當 x=1 時，$x - y = -\dfrac{n}{2} \Rightarrow y = \dfrac{n}{2} + 1$，並以 x 座標每+1，y 座標就-2 的規律往下找，在找的過程中，若發現 y 值不在 1~n 的範圍內，則以+n 或-n 解決，找出前 $\dfrac{n}{2}$ 組解。

２、當 x=n 時，$x - y = \dfrac{n}{2} \Rightarrow y = \dfrac{n}{2}$ 並以 x 座標每-1，y 座標就+2 的規律往下找，若發現 y 值不在 1~n 的範圍內，則以+n 或-n 解決，找出後 $\dfrac{n}{2}$ 組解。

（四）9×9、15×15......等形式為 $(6k+3)\times(6k+3)$ 者，與 8×8、14×14 有關，可依下列步驟進行，找出一組解:

１、先將 n-1，並依循 $(6k+2)\times(6k+2)$ 的方法，找出 $(6k+2)\times(6k+2)$ 的解，例如:若要找 27×27 的解，則先找出 26×26 的解。

２、將 $(6k+2)\times(6k+2)$ 的棋盤往左增加一欄及往下增加一列，即每個座標的 x 座標與 y 座標都+1，此時只有 $6k+2$ 個棋子，還差一個。

３、加上點(1,1)，為 $(6k+3)\times(6k+3)$ 棋盤放下最後一顆棋子。

現在探討如何能將上述四種方法簡化成三種，或更少、更好找的方法。

(一)形式為 $(6k+1)\times(6k+1)$ 與 $(6k-1)\times(6k-1)$ 者，能不能適用於形式 $(6k)\times(6k)$ 、$(6k+4)\times(6k+4)$ 的方法?

5×5 棋盤裡，x=1,2,3,4,5 代入上述(二)的公式 $y=\begin{cases}2x\text{，若}x\le\frac{n}{2}\\2x-1-n\text{，若}x>\frac{n}{2}\end{cases}$ (因為 n 是奇數，所以 x 範圍修正為 $y=\begin{cases}2x\text{，若}x\le\frac{n-1}{2}\\2x-1-n\text{，若}x>\frac{n-1}{2}\end{cases}$)，看 y 值、x+y 及 x-y 之值是否重複?

(x,y)	x+y	x-y
(1,2)	3	-1
(2,4)	6	-2
(3,1)	4	2
(4,2)	6	2
(5,4)	9	1

由上圖可知，因為 y 值、x+y 及 x-y 之值皆不重複，所以 5×5 不適用於公式(二)，但是，若將公式(二) $y=\begin{cases}2x\text{，若}x\le\frac{n-1}{2}\\2x-1-n\text{，若}x>\frac{n-1}{2}\end{cases}$ 稍做修正為 $y=\begin{cases}2x\text{，若}x\le\frac{n-1}{2}\\2x-n\text{，若}x>\frac{n-1}{2}\end{cases}$ 並將此公式命名為公式(1)，看是否可行:

(x,y)	x+y	x-y
(1,2)	3	-1
(2,4)	6	-2
(3,1)	4	2

(4,3)	7	1
(5,5)	10	0

因為 y 值、x+y 及 x-y 之值皆不重複，所以5×5適用於上述公式，現在看其它形式為$(6k+1)\times(6k+1)$與$(6k-1)\times(6k-1)$者，是否可適用於公式

7×7

(x,y)	x+y	x-y
(1,2)	3	-1
(2,4)	6	-2
(3,6)	9	-3
(4,1)	5	3
(5,3)	8	2
(6,5)	11	1
(7,7)	14	0

11×11:

(x,y)	x+y	x-y
(1,2)	2	-1
(2,4)	5	-2
(3,6)	8	-3
(4,8)	11	-4
(5,10)	14	-5
(6,1)	17	5
(7,3)	9	4
(8,5)	12	3
(9,7)	15	2
(10,9)	18	1
(11,11)	22	0

我們可發現，當代入公式(五)後，$x\le\dfrac{n-1}{2}$時，y 值、x+y 及 x-y 之值皆呈現等差數列，$x>\dfrac{n-1}{2}$時，y 值、x+y 及 x-y 之值亦呈現等差數列，但數字絕對不會與$x\le\dfrac{n-1}{2}$呈現的等差數列重複，所以公式(五)可適用於形式為$(6k+1)\times(6k+1)$ 、$(6k-1)\times(6k-1)$的形式，而公式(一)仍適用，只是公式(五)比公式(一)簡單一點，

只要先將 x 乘以 2 即是 y 值，若 y 值大於 n，則扣掉 n 形成適合的 y 值即可。

所以我們可將形式為$(6k+1)\times(6k+1)$ 、$(6k-1)\times(6k-1)$與形式為$(6k)\times(6k)$ 、$(6k+4)\times(6k+4)$進行合併，用下列方法找點:

將 x 座標代入 y=2x 公式$\Rightarrow$若 y 值算出來大於 n，則

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{若}n\text{為奇數，則算出來的y值}-n=\text{適合的y值}\\ \text{若}n\text{為偶數，則算出來的}y\text{值}-1-n=\text{適合的y值}\end{cases}$$

另外，公式(四)裡 $(6k+3)\times(6k+3)$ 的形式，也可將步驟二及步驟三做修改:
步驟二:將 $(6k+2)\times(6k+2)$ 的棋盤往右增加一欄及往上增加一列，此時只有 $6k+2$ 個棋子，還差一個。
步驟三:步驟三:加上點(n,n)，為 $(6k+3)\times(6k+3)$ 棋盤放下最後一顆棋子。(因為(n,n)與(1,1)都在直線 y=x 上，而其它點都不在此直線上，因此若擺(n,n)也不會和其他點衝突。)
公式(四)修改後，可與公式(三)合併，用下列方法找點:

若 n 為(6k+3)，則先暫時將最右一欄及最上一列先去掉，即 n 值修改為(6k+2)
若 n 為(6k+2)，則繼續前往下一步。

→

當 x=1 時，y= $\frac{n}{2}+1$
(n 為偶數)

→

接下來 x=2,3,4..以 x 座標每+1，y 座標就-2 的規律往下找，在找的過程中，若發現 y 值不在 1~n 的範圍內，則以+n 或-n 解決，找出前 $\frac{n}{2}$ 組

→

當 x=n 時，則 $y=\frac{n}{2}$ 並以 x 座標每-1，y 座標就+2 的規律往前找，若發現 y 值不在 1~n 的範圍內，則以+n 或-n 解決，找出後 $\frac{n}{2}$ 組解。

→

若原來的 n 值為偶數，則所有點已經找出來。
若原來的 n 值為奇數，則往右增加一欄及往下增加一列，即還原成 n=6k+3 的棋盤，並增加點(n,n)。

伍、 討論

我們在實驗過程中發現，如果解到第七個解時，第八個皇后無法排下去的話，我們就必須要從排的前幾個皇后重新規劃，才能排出一個合乎規則的排法，在實驗過程中也有好幾次就算重新規劃，也無法合乎規則的排出所有的皇后，但是在重重難關下，我們找到了可以合乎邏輯的公式解。

陸、結論

一、我們可將 n 皇后的解分成兩種:
（一）若棋盤每邊的格子數為 6 的倍數+2 或 6 的倍數+3，即 n=6k+2 與 n=6k+3，則可用下列方法:

	第一步	第二步	第三步	第四步	第五步
若 n 為 (6k+2)	當 x=1 時，y=	接下來 x=2,3,4.. 以 x 座	當 x=n 時，則 $y=\frac{n}{2}$ 並以 x	若原來的 n 值為偶數，則所有點已	

	$\frac{n}{2}+1$ (n 為偶數)	標每+1，y 座標就-2 的規律往下找，在找的過程中，若發現 y 值不在 1~n 的範圍內，則以+n 或-n 解決，找出前 $\frac{n}{2}$ 組解。	座標每-1，y 座標就+2 的規律往前找，若發現 y 值不在 1~n 的範圍內，則以+n 或-n 解決，找出後 $\frac{n}{2}$ 組解。	經找出來。若原來的 n 值為奇數，則往右增加一欄及往下增加一列，即還原成 n=6k+3 的棋盤，並增加點(n,n)。	
若 n 為(6k+3)	先暫時將最右一欄及最上一列先去掉，即 n 值修改為(6k+2)，並遵照 n=6k+2 的步驟。	同 n=6k+2 第一步	同 n=6k+2 第二步	同 n=6k+2 第三步	同 n=6k+2 第四步，完成第四步驟後，往右增加一欄及往下增加一列，即還原成 n=6k+3 的棋盤，並增加點(n,n)。

（二）若 n 其他形式:(n $\neq 6k+2$,而且 $n \neq 6k+3$)

第一步	第二步	第三步
將 x 座標由 1 到 n 依序寫下來，y 座標空著不寫。	將 x 座標代入 y=2x 公式	若 y 值算出來大於 n，則 $\Rightarrow \begin{cases} 若n為奇數，則算出來的y值-n=適合的y值 \\ 若n為偶數，則算出來的y值-1-n=適合的y值 \end{cases}$

二、n 皇后的解不是只有上述的方法，目前找到的是比較簡單、有規律，而且適用於任何大於 3 的 n 值的方法。