

屏東縣第 60 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：揭開「數字金字塔」的奧秘

關 鍵 詞：數字金字塔、巴斯卡三角形

編號：

作品名稱：揭開「數字金字塔」的奧秘

摘要：這原本是一個數學遊戲，利用最底層數字，兩兩相加，逐漸算出頂層數字，但表哥好似神機妙算僅用第一層數字即可推斷出最頂層數字。經過我們深入研究發現在不同階層的運算中隱含許多規律，而且和「巴斯卡三角形」的數字排列有密切關係。最後歸納「數字金字塔」在推算不同階層時的簡單公式。從遊戲中學習數學，生動有趣。

壹、研究動機

春節期間，表哥召集我們這些小朋友玩撲克牌遊戲，其中有一種稱為「數字金字塔」的登頂遊戲，最令我感到好奇。只見表哥取一至九的數字，抽取其中四張排成一行，讓我們選取兩張相加，算出上一階層的數字，最先算出頂層數字者即為優勝，但是表哥每次只根據底層數字即可推算出頂層數字，莫非他會神機妙算，或者「數字金字塔」暗藏玄機，我可不服輸呢？想揭開其中奧秘，就找幾位志同道合的夥伴，展開以下一連串的研究。

貳、研究目的

- 一、了解「數字金字塔」遊戲，在操作過程中隱藏的數學規則。
- 二、從簡單的二階層開始研究，逐層慢慢計算，歸納「數字金字塔」在 N 個階層時，找出直接計算頂層數字的公式。
- 三、了解「數字金字塔」和「巴斯卡三角形」之間的關係。
- 四、從遊戲中來學習數學，利用系統化方法來找尋規律性，培養解題能力與細心整理、分析資料的能力。

參、研究設備及器材

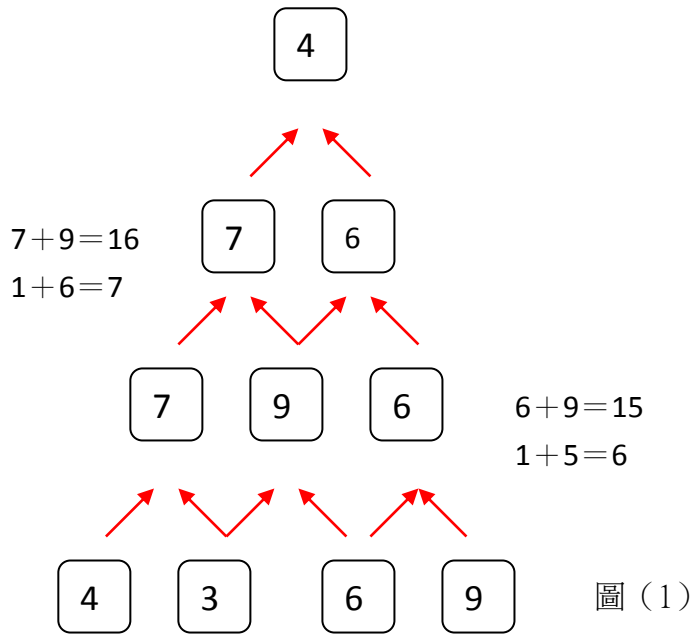
撲克牌二副、剪刀、彩色筆、計算機、紀錄紙、小白板、A4 影印紙等。

肆、研究過程或方法

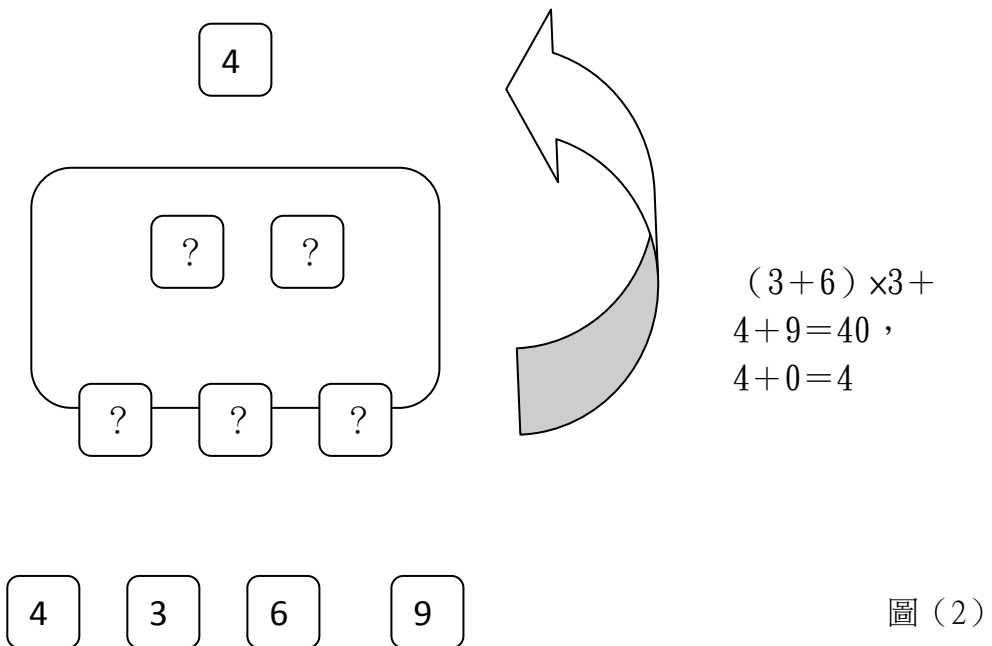
一、研究瞭解「數字金字塔」遊戲的規則

- (一)準備一副紙牌，九點以上的牌全拿走(A 當作一點)，從中抽出四張牌排成一行，其上的三行，每一張牌的點數俱為以下兩張牌點數之和，如相加結果是 10 或以上，再將答案的兩個數字拆開相加。例如下圖(1)所示：第一層的 4+3 得出第三層的 7；3+6 等於 9；6+9 等於 15，把 15 拆開為 1 和 5，再相加得到 6。按此

規則排列，最後計算至頂層的數，最早算出頂層數字的人即是勝利者。



(二)依照表哥的做法：僅用底層數字，就直接算出頂層數字。其方式是先將第一層中間的兩數相加後乘以3，然後加上最外邊的兩個數，如果得出結果是兩位數，再把數字拆開相加，直到變成一位數為止。以下圖(2)為例：第一層中間兩個數是3和6，最外邊兩個數是4和9， $(3+6) \times 3 + 4 + 9 = 40$ ，再把數字拆開相加： $4+0=4$

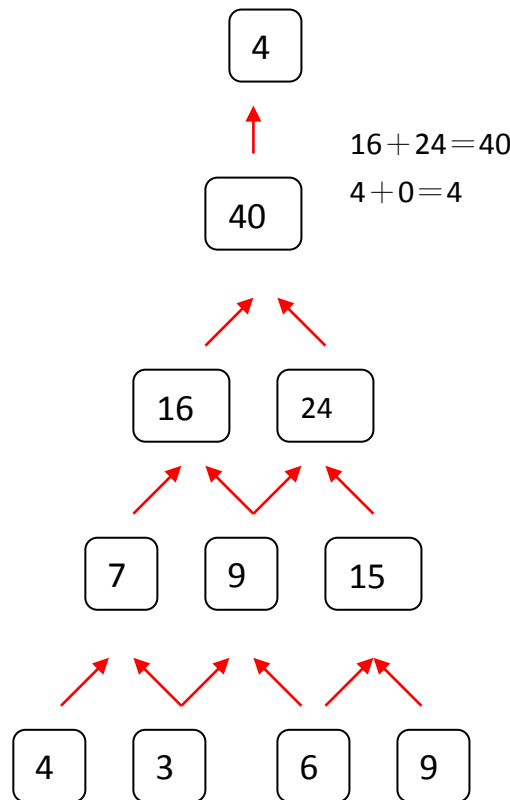


1. 「數字金字塔」遊戲有兩種玩法，一種是逐層慢慢計算，直至達到最頂層，

如圖(1);另一種是僅用第一層的數字就直接計算出最頂層的數,如圖(2)。

2.利用表哥的做法,試試在同樣四階層的「數字金字塔」遊戲,其結果經過檢驗是正確的。但在其他不同階層運算,這兩種玩法結果並不相同,因此做法(二)並不適用在其他階層的計算。但是否有其他規則可適用在不同階層的「數字金字塔」計算,以下是我們繼續的研究。

3.在做法(一)(二)的操作過程中,如果兩張牌點數相加的和超過10或以上,並不需要將兩個數字拆開相加,可直接計算至頂層再拆開相加,如圖(3)。但為顧慮撲克牌的點數,因此進行此遊戲之前,還是將九點以上的牌取走較適合。



圖(3)

二、探討「數字金字塔」遊戲在不同階層的類型變化

(一)準備一副撲克牌,抽掉九點以上的牌,然後利用數字的序列,當作不同階層金字塔最底層的數字,再依研究(一)第一項做法的規則,分別排列一至六階層的「數字金字塔」,觀察這遊戲在不同階層中的類型變化,如圖(4)~(9)

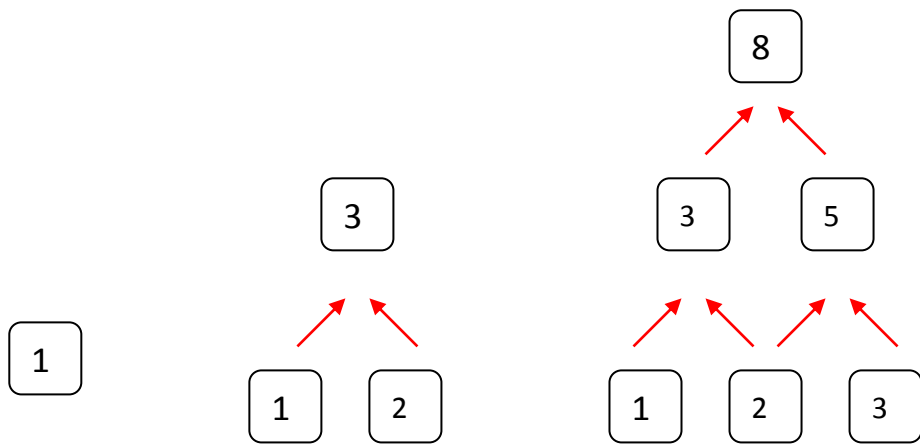


圖 (4) 一個階層

圖 (5) 二個階層

圖 (6) 三個階層

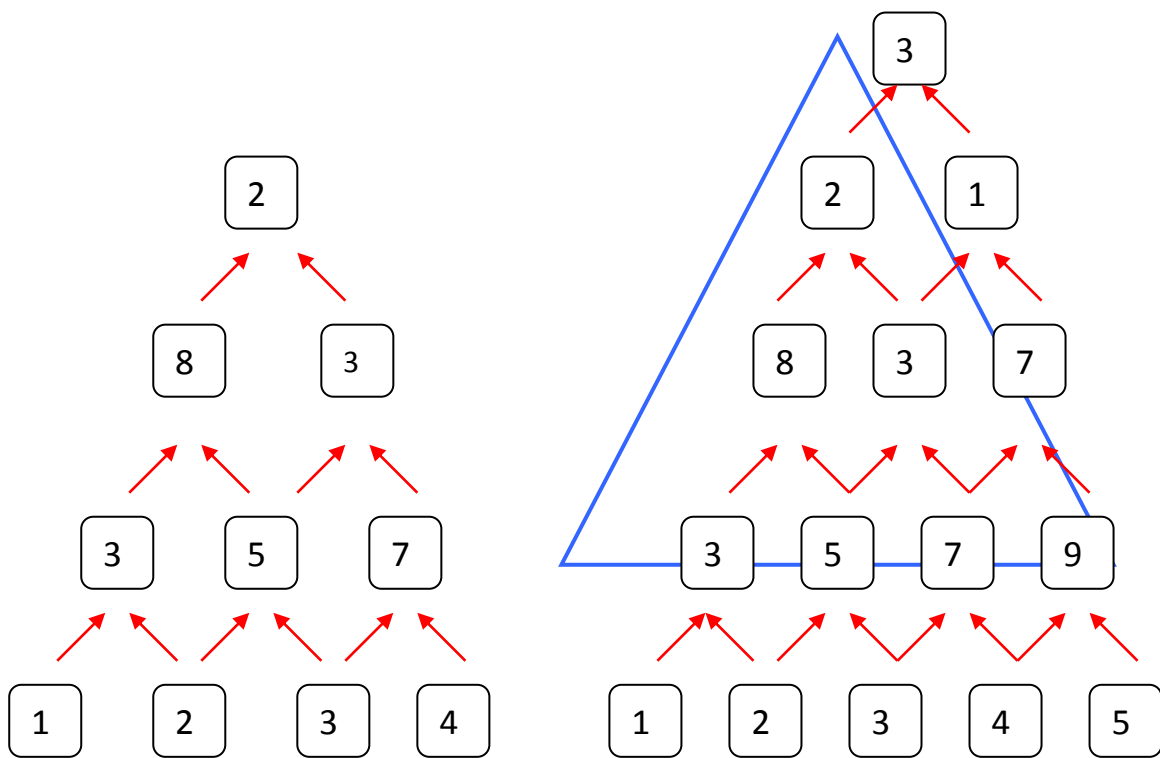


圖 (7) 四個階層

圖 (8) 五個階層

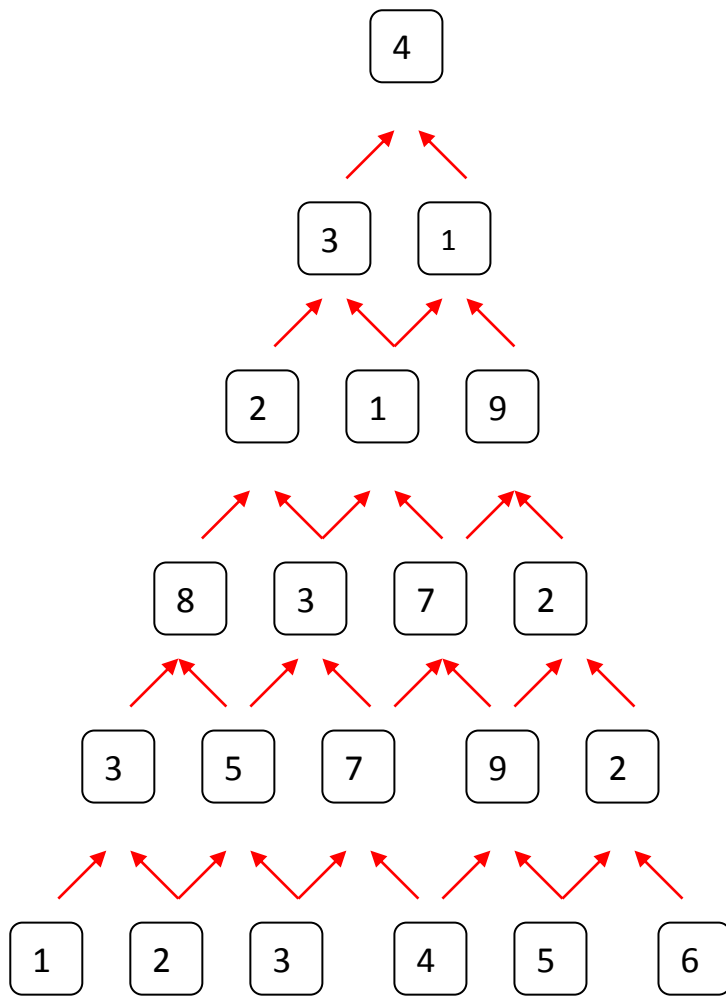


圖 (9) 六個階層

1. 「數字金字塔遊戲」至少需二個階層以上，才能進行。
2. 下一階層的數都比上一階層的數多一個。
3. 原是 N 階層的數字金字塔，每增加一個階層，是原 N 階層三角形數再增加一排 $N+1$ 個數。例如圖 (7) 和圖 (8) 的對照。

三、列表尋求不同階層的規律

(一) 我們利用英文字母代替數字，然後在不同階層中運算，發現其規律，並列表整理如表 (1)，進行步驟如研究 (二)。



圖 (10) 一個階層

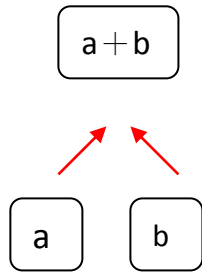


圖 (11) 二個階層

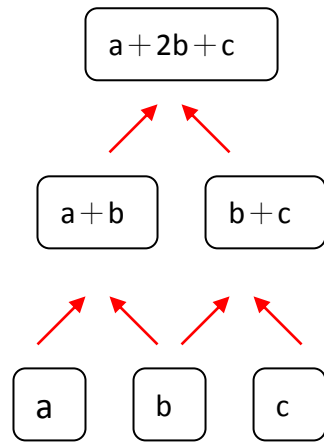


圖 (12) 三個階層

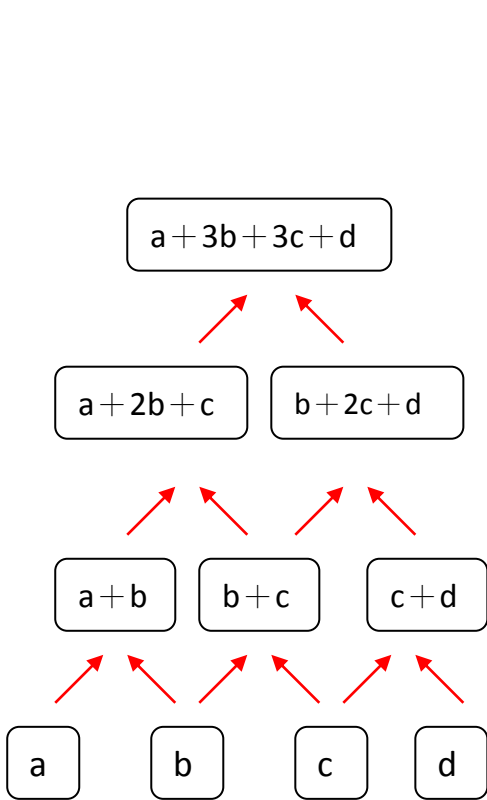


圖 (13) 四個階層

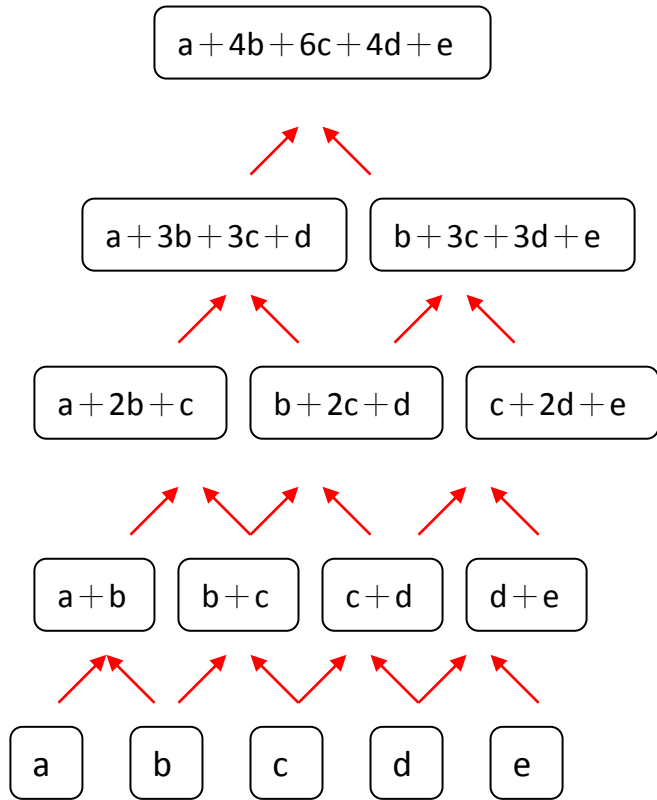
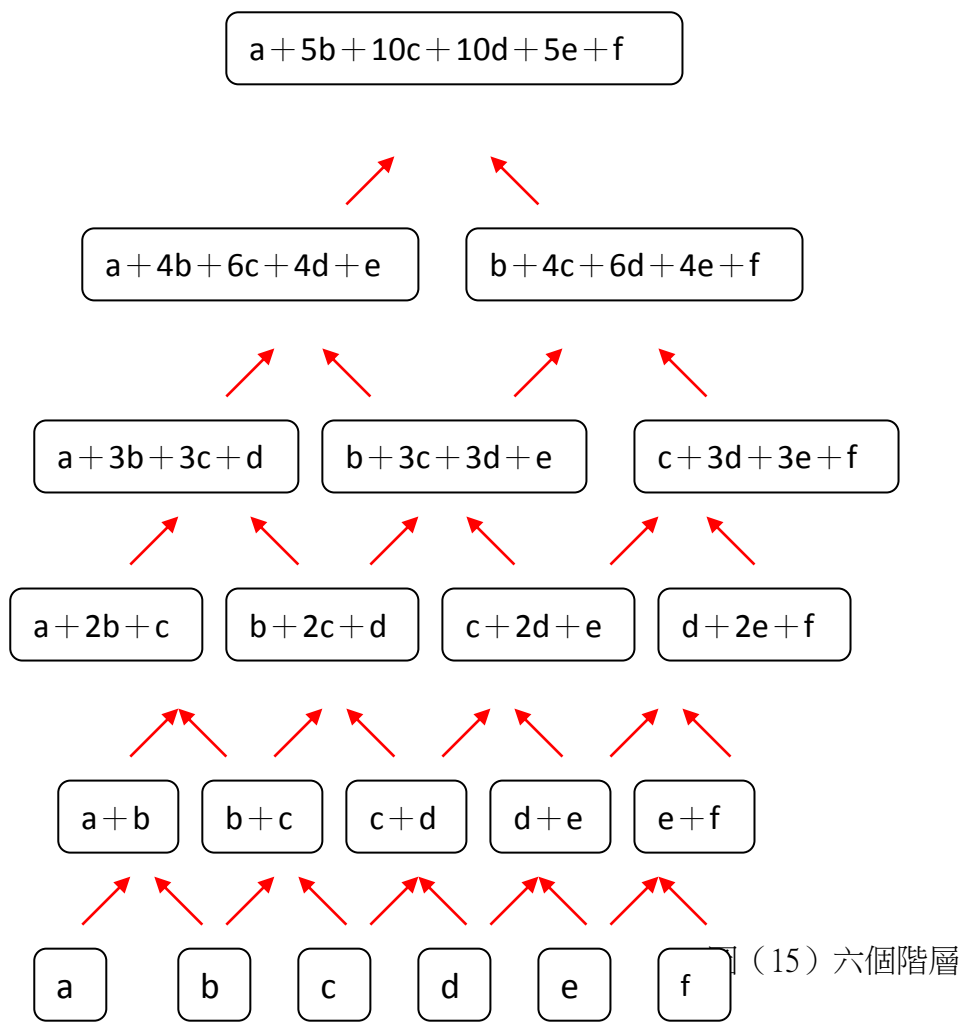


圖 (14) 五個階層



根據上述，利用字母推算「數字金字塔」遊戲在各個階層的頂層數字，經老師提示：發現其係數與一種稱為「巴斯卡三角形」的數字排列方式雷同，於是繼續進行研究（四），想瞭解「數字金字塔」和「巴斯卡三角形」之間有何關係？

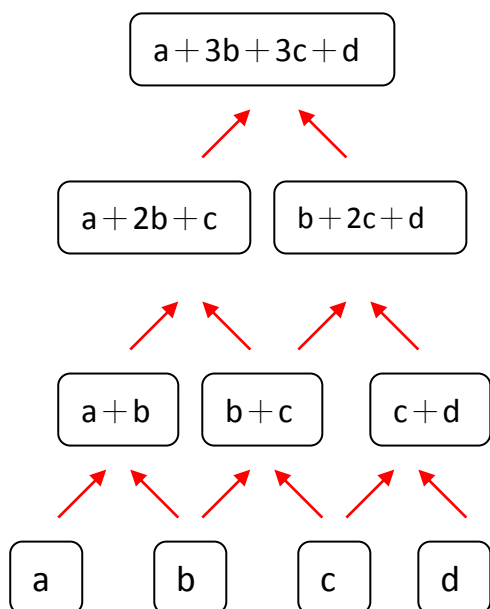
階層數	一	二	三	四	五	六
最頂層數	a	a+b	a+2b+c	a+3b+3c+d	a+4b+6c+4d+e	a+5b+10c+10d+5e+f
係數	1	1, 1	1, 2, 1	1, 3, 3, 1	1, 4, 6, 4, 1	1, 5, 10, 10, 5, 1

表 (1)

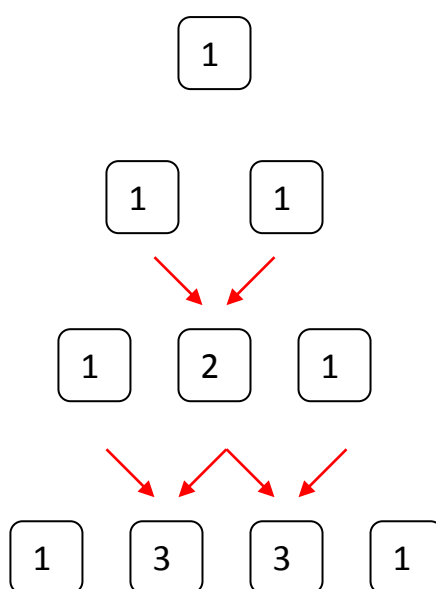
四、探討「數字金字塔」和「巴斯卡三角形」之間的關係。

(一)上網搜尋有關「巴斯卡三角形」的介紹及原理。「巴斯卡三角形」是 17C 法國數學家巴斯卡發現這個數字排列方式非常特殊的三角形，如圖（16），

(二)進行「數字金字塔」和「巴斯卡三角形」的對照，如下圖（16）及圖（17）。



圖（17）「數字金字塔」四階層
的計算過程



圖（16）巴斯卡三角形
排列方式

- 1.觀察「巴斯卡三角形」裡，兩側都是 1；而其餘的每個數字都是前一行裡最靠近它的兩個數字之和，這與「數字金字塔」遊戲規則：除了最底層的數字外，每一張牌的點數俱為以下兩張牌的點數之和，是相同的計算方式。。
- 2.「巴斯卡三角形」每一階層的數字排列，相等於「數字金字塔」不同階層中底層數字相乘的係數，由此即可推算頂層的數字。

五、發展推算「數字金字塔」頂層數字的簡單公式。

從上述的研究問題，我們歸納出「數字金字塔」遊戲原理是與「巴斯卡三角形」數字排列方式相同的。在本遊戲中，僅用第一層數字，然後利用「巴斯卡三角形」排列的數字充作係數相乘，即可直接算出最頂層數字。

步驟：先了解進行的「數字金字塔」遊戲是屬於幾階層？再對照「巴斯卡三角形」數字排列的第幾行。取其一行數字，即為「數字金字塔」底層數字相乘的係數，再相加即可得到頂層數字。

例如：「數字金字塔」底層數字分別為 8、3、6、7、2，是屬於五階層的金字塔登峰遊戲，如何計算其頂層數字呢？

做法：依照上述案例，應對照「巴斯卡三角形」的第五行數字排列，其第五行數字分別為 1、4、6、4、1，將利用為「數字金字塔」底層數字相乘的係數，結果為： $8 \times 1 + 3 \times 4 + 6 \times 6 + 7 \times 4 + 2 \times 1 = 86 = 8 + 6 = 14 = 1 + 4 = 5$ ，經過驗算後，答案是正確的。

伍、研究結果

一、「數字金字塔」遊戲有兩種玩法，一種是逐層慢慢計算，另一種是僅用第一層數字就直接計算出最頂層的數字。表哥並沒有說明其方法是如何推算的，而且僅適用在四階層，在其他階層的運算結果並不正確。

二、「數字金字塔遊戲」如果底層是 N 個數字，其階層是 N 行；每增加一個階層，是原 N 階層三角形數再增加一排 N+1 個數。

三、利用英文字母代替數字，分別在不同階層中運算，列表整理後發現：不同階層的頂層數字都是由第一層數字分別乘上規律的係數相加而得來的。

四、「巴斯卡三角形」每一階層的數字排列，與同階層「數字金字塔」中頂層數字的係數相同。

五、綜合上述研究，在進行「數字金字塔」遊戲時，不管是多少階層，只要對照「巴斯卡三角形」相對應階層的數字排列，取其為底層數字相乘的係數，再相加即可算出頂層的數字，。

六、我們從實際操作中尋得推算「數字金字塔」頂層數字的規則，是這次學習最主要的收穫。我們終於解開「數字金字塔」的奧秘了。

陸、討論

一、綜合上述研究，在進行「數字金字塔」遊戲時，不管是多少階層，只要對照「巴斯卡三角形」相對應階層的數字排列，取其為底層數字相乘的係數，再相加即可算出頂層的數字，。

二、我們從實際操作中尋得推算「數字金字塔」頂層數字的規則，是這次學習最主要的收穫。我們終於解開「數字金字塔」的奧秘了。

柒、結論

「巴斯卡三角形」每一階層的數字排列，與同階層「數字金字塔」中頂層數字的係數相同。

捌、參考資料及其他

「智力遊戲集錦」 讀者文摘遠東有限公司出版 2004。