附件三

屏東縣第 60 屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：解密－單位分數的拆與和

關 鍵 詞：分數拆分、因數、比（最多三個）

編號：

製作說明：

1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。

2.編號：由承辦學校統一編列。

3.封面編排由參展作者自行設計。

作品名稱：解密—單位分數的拆與和

摘　要

本研究是要找出$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$的解題策略，首先藉由分數減法與分數擴分來拼湊出其中一解的規律，即 A 是 C 加 1，B 則是前兩項乘積，但因為還未求得所有解，所以繼續透過擴分拼湊找出其他解（此法較減法拼湊有簡易計算過程及規律可求）。經由不斷假設與驗證，我們發現要成功將單位分數拆分成任兩個相異單位分數之和的關鍵點，是拆分後的兩個分子要是原分母的因數組合，藉由數據整理後確認原問題式有以下三點解題步驟：

1. 找出 C 的所有因數，兩兩一組並依具有相同最簡整數比進行排列。
2. 在相同的最簡整數比中，選取前項與後項的和是最大值當做放大倍數。
3. 將此放大倍數乘以同項的最簡整數比，所得的兩個數分別是拆分後的兩個分母。

壹、研究動機

之前在上數學課的質因數分解時，老師有提到一則有趣的數學題目並且提示與因數分解有相關，我記下題目後找其他兩位有興趣的學生向老師詢問相關細節，更是引發我們探究興趣。題目相當的簡單，即是$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$，把一個單位分數表示成任意兩個相異單位分數的和。於是開啟這次科展研究的數學解題了，希望藉由這次研究可以找出解題策略。

貳、研究目的

一、嘗試找出$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$，其中 C 為 2、3、4、5、6、7 的可能解。

二、藉由以上單位分數的答案找出$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$的快速解題規律。

三、以電腦驗證解題規律的正確性。

參、研究設備及器材

鉛筆、計算紙、C^{++}語言程式網站

肆、研究過程或方法

一、問題分析

（一）單位分數的意義：分子是 1，分母是正整數的有理數。因此單位分數都是某一個正整數的倒數。(節錄自維基百科)

（二）定義所研究的問題：本次研究的問題是把一個單位分數拆成兩個相異單位分數的和，亦即$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$，其中 A≠B，並設定 A 小於 B。

二、研究過程

（一）嘗試錯誤：研究初期，不知道如何進行解題，只能透過逐一帶入數字的方法找出所求得的解是否為單位分數。

(二)提出假設的規律，進行小規模驗證：研究中期，累積更多數據後，我們開始提出假設的規律，並進行驗證，若是不支持則逐步修正。

(三)找出最後規律並進行驗證：研究後期，經由各數字的紙筆驗算已找出解題步驟，且經由程式語言網站的交叉驗證，確定提出的假設是正確無誤。

伍、研究結果與討論

一、解題方法的突破與選擇

(一)減法拼湊，嘗試錯誤

➢ 以 $\frac{1}{2}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$為例，嘗試找出所有可能解，由於不能得知是否已求盡所有解，故嘗試帶入 A 的分母值，最大為 20，再透過分數減法找出 B 值。

表 1

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ ......☑	$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ ......☒	$\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}$ ......☒	$\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$ ......☒
(A，B)=(3，6)	不符要求(A≠B)	解非單位分數	答案重複
$\frac{1}{2}=\frac{1}{7}+\frac{5}{14}$ ......☒	$\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$ ......☒	$\frac{1}{2}=\frac{1}{9}+\frac{7}{18}$ ......☒	$\frac{1}{2}=\frac{1}{10}+\frac{2}{5}$ ......☒
解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數
$\frac{1}{2}=\frac{1}{11}+\frac{9}{22}$ ......☒	$\frac{1}{2}=\frac{1}{12}+\frac{5}{12}$ ......☒	$\frac{1}{2}=\frac{1}{13}+\frac{11}{26}$ ......☒	$\frac{1}{2}=\frac{1}{14}+\frac{3}{7}$ ......☒
解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數
$\frac{1}{2}=\frac{1}{15}+\frac{13}{30}$ ......☒	$\frac{1}{2}=\frac{1}{16}+\frac{7}{16}$ ......☒	$\frac{1}{2}=\frac{1}{17}+\frac{15}{34}$ ......☒	$\frac{1}{2}=\frac{1}{18}+\frac{4}{9}$ ......☒
解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數
$\frac{1}{2}=\frac{1}{19}+\frac{17}{38}$ ......☒	$\frac{1}{2}=\frac{1}{20}+\frac{9}{20}$ ......☒		
解非單位分數	解非單位分數		

◆ 綜上整理，對於$\frac{1}{2}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$，在 A 小於 20 的所有解中，僅有 1 解

● $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

➢ 以 $\frac{1}{3}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$為例，嘗試找出所有可能解，由於不能得知是否已求盡所有解，故嘗試帶入 A 的分母值，最大為 20，再透過分數減法找出 B 值。

表 2

$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ ......☑	$\frac{1}{3}=\frac{1}{5}+\frac{2}{15}$ ......☒	$\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ ......☒	$\frac{1}{3}=\frac{1}{7}+\frac{4}{21}$ ......☒
(A，B)=(4，12)	解非單位分數	不符要求(A$\neq$B)	解非單位分數
$\frac{1}{3}=\frac{1}{8}+\frac{5}{24}$ ......☒	$\frac{1}{3}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}$ ......☒	$\frac{1}{3}=\frac{1}{10}+\frac{7}{30}$ ......☒	$\frac{1}{3}=\frac{1}{11}+\frac{8}{33}$ ......☒
解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數
$\frac{1}{3}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$ ......☒	$\frac{1}{3}=\frac{1}{13}+\frac{10}{39}$ ......☒	$\frac{1}{3}=\frac{1}{14}+\frac{11}{42}$ ......☒	$\frac{1}{3}=\frac{1}{15}+\frac{4}{15}$ ......☒
答案重複	解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數
$\frac{1}{3}=\frac{1}{16}+\frac{13}{48}$ ......☒	$\frac{1}{3}=\frac{1}{17}+\frac{14}{51}$ ......☒	$\frac{1}{3}=\frac{1}{18}+\frac{5}{18}$ ......☒	$\frac{1}{3}=\frac{1}{19}+\frac{16}{57}$ ......☒
解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數
$\frac{1}{3}=\frac{1}{20}+\frac{17}{60}$ ......☒			
解非單位分數			

◆ 綜上整理，對於$\frac{1}{3}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$，在 A 小於 20 的所有解中，僅有 1 解

- $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$

➢ 以 $\frac{1}{4}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$為例，嘗試找出所有可能解，由於不能得知是否已求盡所有解，故嘗試帶入 A 的分母值，最大為 20，再透過分數減法找出 B 值。

表 3

$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ ......☑	$\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ ......☑	$\frac{1}{4}=\frac{1}{7}+\frac{3}{28}$ ......☒	$\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ ......☒
(A，B)=(5，20)	(A，B)=(6，12)	解非單位分數	不符要求(A$\neq$B)
$\frac{1}{4}=\frac{1}{9}+\frac{5}{36}$ ......☒	$\frac{1}{4}=\frac{1}{10}+\frac{3}{20}$ ......☒	$\frac{1}{4}=\frac{1}{11}+\frac{7}{44}$ ......☒	$\frac{1}{4}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$ ......☒
解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數	答案重複
$\frac{1}{4}=\frac{1}{13}+\frac{9}{52}$ ......☒	$\frac{1}{4}=\frac{1}{14}+\frac{5}{28}$ ......☒	$\frac{1}{4}=\frac{1}{15}+\frac{11}{60}$ ......☒	$\frac{1}{4}=\frac{1}{16}+\frac{3}{16}$ ......☒
解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數

$\frac{1}{4}=\frac{1}{17}+\frac{13}{68}$ ......☒	$\frac{1}{4}=\frac{1}{18}+\frac{7}{36}$ ......☒	$\frac{1}{4}=\frac{1}{19}+\frac{15}{76}$ ......☒	$\frac{1}{4}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}$ ......☒
解非單位分數	解非單位分數	解非單位分數	答案重複

◆綜上整理，對於$\frac{1}{4}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$，在 A 小於 20 的所有解中，僅有 2 解

● $\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$

➢ 觀察上述三個問題所求得的解中，我們發現這種帶入求解的方法有以下兩點發現
  ➢ 解有可能不只一個
  ➢ A 有可能是原分母(代號為 C)加 1，可湊成解，若將此表達式帶入並驗證如下

$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{B}$ ，帶入式子求 B

$\frac{1}{B}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)-n}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n\times(n+1)}$

帶入原式可得到 $\boxed{\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n\times(n+1)}}$ ⇨⇨稱第一規律

(二)利用擴分拼湊，嘗試錯誤

➢ 將 $\frac{1}{2}$ 進行擴分 2 至 10 倍，嘗試找出所有可能解，由於不能得知是否已求盡所有解，故擴分的次數以 10 次為限。

➢ 2 倍：$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$，不符要求($A\neq B$)

➢ $\boxed{3\text{ 倍}}$：$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$，$\boxed{(A，B)=(3，6)}$

➢ 4 倍：$\frac{1}{2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$，解非單位分數

$=\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$，不符要求($A\neq B$)

➢ 5 倍：$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=\frac{1}{10}+\frac{4}{10}=\frac{1}{10}+\frac{2}{5}$，解非單位分數

$=\frac{2}{10}+\frac{3}{10}$，解非單位分數

➢ $\boxed{6\text{ 倍}}$：$\frac{1}{2}=\frac{6}{12}=\frac{1}{12}+\frac{5}{12}$，解非單位分數

$=\frac{2}{12}+\frac{4}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$，$\boxed{(A，B)=(3，6)}$

$=\frac{3}{12}+\frac{3}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$，不符要求($A\neq B$)

➢ 7 倍：$\frac{1}{2}=\frac{7}{14}=\frac{1}{14}+\frac{6}{14}=\frac{1}{14}+\frac{3}{7}$，解非單位分數

$=\frac{2}{14}+\frac{5}{14}$，解非單位分數

$=\frac{3}{14}+\frac{4}{14}$，解非單位分數

➢ 8 倍：$\frac{1}{2}=\frac{8}{16}=\frac{1}{16}+\frac{7}{16}$，解非單位分數

$=\frac{2}{16}+\frac{6}{16}=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$，解非單位分數

$=\frac{3}{16}+\frac{5}{16}$，解非單位分數

$=\frac{4}{16}+\frac{4}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$，不符要求($A\neq B$)

➢ $\boxed{\text{9 倍}}$：$\frac{1}{2}=\frac{9}{18}=\frac{1}{18}+\frac{8}{18}=\frac{1}{18}+\frac{4}{9}$，解非單位分數

$=\frac{2}{18}+\frac{7}{18}$，解非單位分數

$=\frac{3}{18}+\frac{6}{18}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$，$\boxed{(A，B)=(3，6)}$

$=\frac{4}{18}+\frac{5}{18}=\frac{2}{9}+\frac{5}{18}$，不符要求($A\neq B$)

➢ 10 倍：$\frac{1}{2}=\frac{10}{20}=\frac{1}{20}+\frac{9}{20}$，解非單位分數

$=\frac{2}{20}+\frac{8}{20}=\frac{1}{10}+\frac{4}{5}$，解非單位分數

$=\frac{3}{20}+\frac{7}{20}$，解非單位分數

$=\frac{4}{20}+\frac{6}{20}=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}$，解非單位分數

$=\frac{5}{20}+\frac{5}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$，不符要求($A\neq B$)

◆綜上整理，對於$\frac{1}{2}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$，在分母擴分 2 至 10 倍的式子中，雖有 3 解，但實際上皆是同一個解答式

- $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ (原分數擴分 3,6,9 倍)

➢ 將 $\frac{1}{3}$ 進行擴分 2 至 10 倍，嘗試找出所有可能解，由於不能得知是否已求盡所有解，故擴分的次數以 10 次為限。

➢ 2 倍：$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$，不符要求($A\neq B$)

➢ 3 倍：$\frac{1}{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}$，解非單位分數

➢ $\boxed{4\text{ 倍}}$：$\frac{1}{3}=\frac{4}{12}=\frac{1}{12}+\frac{3}{12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$，$\boxed{(A，B)=(4，12)}$

$=\frac{2}{12}+\frac{2}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$，不符要求($A\neq B$)

➢ 5 倍：$\frac{1}{3}=\frac{5}{15}=\frac{1}{15}+\frac{4}{15}$，解非單位分數

$=\frac{2}{15}+\frac{3}{15}=\frac{2}{15}+\frac{1}{5}$，解非單位分數

➢ 6 倍：$\frac{1}{3}=\frac{6}{18}=\frac{1}{18}+\frac{5}{18}$，解非單位分數

$=\frac{2}{18}+\frac{4}{18}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}$，解非單位分數

$=\frac{3}{18}+\frac{3}{18}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$，不符要求($A\neq B$)

➢ 7 倍：$\frac{1}{3}=\frac{7}{21}=\frac{1}{21}+\frac{6}{21}=\frac{1}{21}+\frac{2}{7}$，解非單位分數

$=\frac{2}{21}+\frac{5}{21}$，解非單位分數

$=\frac{3}{21}+\frac{4}{21}=\frac{1}{7}+\frac{4}{21}$，解非單位分數

➢ $\boxed{8\text{ 倍}}$：$\frac{1}{3}=\frac{8}{24}=\frac{1}{24}+\frac{7}{24}$，解非單位分數

$=\frac{2}{24}+\frac{6}{24}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$，$\boxed{(A，B)=(4，12)}$

$=\frac{3}{24}+\frac{5}{24}=\frac{1}{8}+\frac{5}{24}$，解非單位分數

$=\frac{4}{24}+\frac{4}{24}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$，不符要求($A\neq B$)

➢ 9 倍：$\frac{1}{3}=\frac{9}{27}=\frac{1}{27}+\frac{8}{27}$，解非單位分數

$=\frac{2}{27}+\frac{7}{27}$，解非單位分數

$=\frac{3}{27}+\frac{6}{27}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}$，解非單位分數

$=\frac{4}{27}+\frac{5}{27}$，解非單位分數

➢ 10 倍：$\frac{1}{3}=\frac{10}{30}=\frac{1}{30}+\frac{9}{30}=\frac{1}{30}+\frac{3}{10}$，解非單位分數

$=\frac{2}{30}+\frac{8}{30}=\frac{1}{15}+\frac{4}{15}$，解非單位分數

$=\frac{3}{30}+\frac{7}{30}=\frac{1}{10}+\frac{7}{30}$，解非單位分數

$=\frac{4}{30}+\frac{6}{30}=\frac{2}{15}+\frac{1}{5}$，解非單位分數

$=\frac{5}{30}+\frac{5}{30}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$，不符要求$(A\neq B)$

◆ 綜上整理，對於$\frac{1}{3}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$，在分母擴分 2 至 10 倍的式子中，雖有 2 解，但實際上皆是同一個解答式

- $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ (原分數擴分 4,8 倍)

➢ 將 $\frac{1}{4}$ 進行擴分 2 至 10 倍，嘗試找出所有可能解，由於不能得知是否已求盡所有解，故擴分的次數以 10 次為限。

➢ 2 倍：$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$，不符要求$(A\neq B)$

➢ $\boxed{3\text{ 倍}}$：$\frac{1}{4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{12}+\frac{2}{12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$，$\boxed{(A，B)=(6，12)}$

➢ 4 倍：$\frac{1}{4}=\frac{4}{16}=\frac{1}{16}+\frac{3}{16}$，解非單位分數

$=\frac{2}{16}+\frac{2}{16}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$，不符要求$(A\neq B)$

➢ $\boxed{5\text{ 倍}}$：$\frac{1}{4}=\frac{5}{20}=\frac{1}{20}+\frac{4}{20}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$，$\boxed{(A，B)=(5，20)}$

$=\frac{2}{20}+\frac{3}{20}=\frac{1}{10}+\frac{3}{20}$，解非單位分數

➢ $\boxed{6\text{ 倍}}$：$\frac{1}{4}=\frac{6}{24}=\frac{1}{24}+\frac{5}{24}$，解非單位分數

$=\frac{2}{24}+\frac{4}{24}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$，$\boxed{(A，B)=(6，12)}$

$=\frac{3}{24}+\frac{3}{24}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$，不符要求$(A\neq B)$

➢ 7 倍：$\frac{1}{4}=\frac{7}{28}=\frac{1}{28}+\frac{6}{28}=\frac{1}{28}+\frac{3}{14}$，解非單位分數

$=\frac{2}{28}+\frac{5}{28}$，解非單位分數

$= \frac{3}{28} + \frac{4}{28} = \frac{3}{28} + \frac{1}{7}$，解非單位分數

➢ 8 倍：$\frac{1}{4} = \frac{8}{32} = \frac{1}{32} + \frac{7}{32}$，解非單位分數

$= \frac{2}{32} + \frac{6}{32} = \frac{1}{16} + \frac{3}{16}$，解非單位分數

$= \frac{3}{32} + \frac{5}{32}$，解非單位分數

$= \frac{4}{32} + \frac{4}{32} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$，不符要求(A$\neq$B)

➢ $\boxed{9\text{ 倍}}$：$\frac{1}{4} = \frac{9}{36} = \frac{1}{36} + \frac{8}{36} = \frac{1}{36} + \frac{2}{9}$，解非單位分數

$= \frac{2}{36} + \frac{7}{36} = \frac{1}{18} + \frac{7}{36}$，解非單位分數

$= \frac{3}{36} + \frac{6}{36} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$，$\boxed{(A，B)=(6，12)}$

$= \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{1}{9} + \frac{5}{36}$，解非單位分數

➢ $\boxed{10\text{ 倍}}$：$\frac{1}{4} = \frac{10}{40} = \frac{1}{40} + \frac{9}{40}$，解非單位分數

$= \frac{2}{40} + \frac{8}{40} = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$，$\boxed{(A，B)=(5，20)}$

$= \frac{3}{40} + \frac{7}{40}$，解非單位分數

$= \frac{4}{40} + \frac{6}{40} = \frac{1}{10} + \frac{3}{20}$，解非單位分數

$= \frac{5}{40} + \frac{5}{40} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$，不符要求(A$\neq$B)

◆綜上整理，對於 $\frac{1}{4} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$，在分母擴分 2 至 10 倍的式子中，雖有 4 解，但實際上皆是兩個解答式

- $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ (原分數擴分 5,10 倍)

  $= \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$(原分母擴分 3,6,9 倍)

（三）比較兩種方法與結果，嘗試找出$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$的解題規律

表 4

減法拼湊	擴分拼湊	我們的發現：
$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$	1.兩種方法，都可以找出相同的解。 2.減法拼湊需要稍加計算，擴分拼湊雖然需要計算，但過程比減法簡易(即是拆與分)。
$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$	3.減法拼湊很難確認是否已有窮盡解，擴分拼湊大約可從擴分倍數是否已重複來確認。 4.減法拼湊所得到的第一個解答式都是 A＝C+1，同時 A 也是擴分拼湊的最小倍數。
$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ $\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ $\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$	5.擴分拼湊的計算過程中，發現可以寫成解的式子，其擴分的倍數有規律性。 ★綜上所述，我們決定以擴分拼湊作為後續分析的主要方式，原因是可從上述第 4 點中的規律找出解題策略，且計算上也較為方便簡易。也寄望從此規律中，找出是否已有窮盡解？

二、嘗試找出規律並驗證

（一）從既有解答式找出規律

- 問題式為 $\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$，C 以 2，3，4 帶入時，使用擴分拼湊找出的解有

$\boxed{\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$、$\boxed{\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}$、$\boxed{\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}$

■ 觀察解答式的分母可發現，C × A＝B，可表達成$\boxed{\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{C\times A}}$⇨⇨稱第二規律

■ 若將第一規律$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n\times(n+1)}$與第二規律$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{C\times A}$做比較，可發現

◆n 即是 C，n+1 即是 A，n×(n+1)即是 B

◆第一規律與第二規律實際是表達相同意義

◆因此，我們**認為一個單位分數要表達成相異兩個單位分數之和的話，這兩個單單分數的分母，分別是原分數分母加 1 以及這兩項分母的「乘積」**。

◆然而，上述發現無法檢證或套用$\boxed{\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}$

（二）找出更多解答式，思考可能問題點

- 為了解釋 $\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$的規律性，我們繼續透過擴分拼湊的方法找出更多單位分數的解答式以求突破

- 先再次檢視以下式子$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$，以 $\frac{1}{4}$ 為例

表 5

$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$	■符合第一、第二規律，即 A=C+1=5，B=C×(C+1)=4×5=20 ■符合第二規律的 A=5 為最小倍數，原分數換成 5 的倍數之等值分數都會被表達成$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$，例如 ● 擴分 5 倍，$\frac{1}{4}=\frac{5}{20}=\frac{1}{20}+\frac{4}{20}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ ● 擴分 10 倍，$\frac{1}{4}=\frac{10}{40}=\frac{2}{40}+\frac{8}{40}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ ● 擴分 15 倍，$\frac{1}{4}=\frac{15}{60}=\frac{2}{40}+\frac{8}{40}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$
$\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$	上述已確認擴分成 5 的倍數時，都可表達出$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ ⇨我們提出一個假設，**如果連續擴分的倍數之間找不到剩下的解，代表已經無法用減法拼湊找出其他解了**。解釋如下 ✧擴分 5 倍與 10 倍都得到$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$，則在 5 至 10 倍之間的數字(6，7，8，9)帶入 A，看看可否求出另一個單位分數，如下計算 ✧帶入 6，$\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$，$\boxed{(A，B)=(6，12)}$ ✧帶入 7，$\frac{1}{4}=\frac{1}{7}+\frac{3}{28}$，解非單位分數 ✧帶入 8，$\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$，兩者需為相異單位分數 ✧帶入 9，$\frac{1}{4}=\frac{1}{9}+\frac{5}{36}$，解非單位分數

➢ 以 $\frac{1}{5}$ 為例，驗證假設是否成立

■從第一、第二規律，可找出第一個解為$\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$(擴分為 6 的倍數皆可)

✧ 最小連續擴分倍數是 6 倍與 12 倍，則在 6 至 12 之間的數字帶入 A，計算看看

✧ 帶入 7，$\frac{1}{5}=\frac{1}{7}+\frac{2}{35}$，非單位分數；帶入 8，$\frac{1}{5}=\frac{1}{8}+\frac{3}{40}$，非單位分數

✧ 帶入 9，$\frac{1}{5}=\frac{1}{9}+\frac{4}{45}$，非單位分數；帶入 10，$\frac{1}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$，非解($A\neq B$)

✧ 帶入 11，$\frac{1}{5}=\frac{1}{11}+\frac{6}{55}$，非單位分數

✧ 所以，我們認為$\frac{1}{5}$只可用擴分拼奏找出解⇨$\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$

➢ 以 $\frac{1}{6}$ 為例，驗證假設是否成立

■從第一、第二規律，可找出第一個解為$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$(擴分為 7 的倍數皆可)

✧ 最小連續擴分倍數是 7 倍與 14 倍，則在 7 至 14 之間的數字帶入 A，計算看看

✧ 帶入 8，$\frac{1}{6}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$，$\boxed{(A，B)=(8，24)}$；帶入 9，$\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$，$\boxed{(A，B)=(9，18)}$

✧ 帶入 10，$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$，$\boxed{(A，B)=(10，15)}$；帶入 11，$\frac{1}{6}=\frac{1}{11}+\frac{5}{66}$，非單位分數

✧ 帶入 12，$\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$，非解($A\neq B$)；帶入 13，$\frac{1}{6}=\frac{1}{13}+\frac{7}{78}$，解非單位分數

✧ 所以，我們認為$\frac{1}{6}$除了可用擴分拼奏找出解⇨$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$

✧ 同時，也可以透過減法拼奏找出剩下的解⇨$\frac{1}{6}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$

➢ 以此模式統計$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、……、$\frac{1}{19}$、$\frac{1}{20}$的所有解

表 6

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$	從第一、第二規律性求得 最小連續倍數解(3 與 6)間，已沒有其他解	共 1 解
$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$	從第一、第二規律性求得 最小連續倍數解(4 與 8)間，已沒有其他解	共 1 解
$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$	從第一、第二規律性求得	共 2 解
$\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$	最小連續倍數解(5 與 10)間，還有分母為 6 的解	
$\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$	從第一、第二規律性求得 最小連續倍數解(6 與 12)間，已沒有其他解	共 1 解
$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$	從第一、第二規律性求得	共 4 解
$\frac{1}{6}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$	最小連續倍數解(7 與 14)間，還有分母為 8 的解	
$\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$	最小連續倍數解(7 與 14)間，還有分母為 9 的解	
$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$	最小連續倍數解(7 與 14)間，還有分母為 10 的解	
$\frac{1}{7}=\frac{1}{8}+\frac{1}{56}$	從第一、第二規律性求得 最小連續倍數解(8 與 16)間，已沒有其他解	共 1 解
$\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}$	從第一、第二規律性求得此解	共 3 解

$\frac{1}{8}=\frac{1}{10}+\frac{1}{40}$	最小連續倍數解(9 與 18)間，還有分母為 10 的解	
$\frac{1}{8}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$	最小連續倍數解(9 與 18)間，還有分母為 12 的解	
$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{90}$	從第一、第二規律性求得此解	共 2 解
$\frac{1}{9}=\frac{1}{12}+\frac{1}{36}$	最小連續倍數解(10 與 20)間，還有分母為 12 的解	
$\frac{1}{10}=\frac{1}{11}+\frac{1}{121}$	從第一、第二規律性求得此解	共 4 解
$\frac{1}{10}=\frac{1}{12}+\frac{1}{60}$	最小連續倍數解(11 與 22)間，還有分母為 12 的解	
$\frac{1}{10}=\frac{1}{14}+\frac{1}{35}$	最小連續倍數解(11 與 22)間，還有分母為 14 的解	
$\frac{1}{10}=\frac{1}{15}+\frac{1}{30}$	最小連續倍數解(11 與 22)間，還有分母為 15 的解	
$\frac{1}{11}=\frac{1}{12}+\frac{1}{132}$	從第一、第二規律性求得 最小連續倍數解(12 與 24)間，已沒有其他解	共 1 解
$\frac{1}{12}=\frac{1}{13}+\frac{1}{156}$	從第一、第二規律性求得	共 7 解
$\frac{1}{12}=\frac{1}{14}+\frac{1}{84}$	最小連續倍數解(13 與 26)間，還有分母為 14 的解	
$\frac{1}{12}=\frac{1}{15}+\frac{1}{60}$	最小連續倍數解(13 與 26)間，還有分母為 15 的解	
$\frac{1}{12}=\frac{1}{16}+\frac{1}{48}$	最小連續倍數解(13 與 26)間，還有分母為 16 的解	
$\frac{1}{12}=\frac{1}{18}+\frac{1}{36}$	最小連續倍數解(13 與 26)間，還有分母為 18 的解	
$\frac{1}{12}=\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$	最小連續倍數解(13 與 26)間，還有分母為 20 的解	
$\frac{1}{12}=\frac{1}{21}+\frac{1}{28}$	最小連續倍數解(13 與 26)間，還有分母為 21 的解	
$\frac{1}{13}=\frac{1}{14}+\frac{1}{182}$	從第一、第二規律性求得 最小連續倍數解(14 與 28)間，已沒有其他解	共 1 解
$\frac{1}{14}=\frac{1}{15}+\frac{1}{210}$	從第一、第二規律性求得	共 4 解
$\frac{1}{14}=\frac{1}{16}+\frac{1}{112}$	最小連續倍數解(15 與 30)間，還有分母為 16 的解	

$\frac{1}{14}=\frac{1}{18}+\frac{1}{63}$	最小連續倍數解(15 與 30)間，還有分母為 18 的解	
$\frac{1}{14}=\frac{1}{21}+\frac{1}{42}$	最小連續倍數解(15 與 30)間，還有分母為 21 的解	
$\frac{1}{15}=\frac{1}{16}+\frac{1}{240}$	從第一、第二規律性求得	共 4 解
$\frac{1}{15}=\frac{1}{18}+\frac{1}{90}$	最小連續倍數解(16 與 32)間，還有分母為 18 的解	
$\frac{1}{15}=\frac{1}{20}+\frac{1}{60}$	最小連續倍數解(16 與 32)間，還有分母為 20 的解	
$\frac{1}{15}=\frac{1}{24}+\frac{1}{40}$	最小連續倍數解(16 與 32)間，還有分母為 24 的解	
$\frac{1}{16}=\frac{1}{17}+\frac{1}{272}$	從第一、第二規律性求得	共 4 解
$\frac{1}{16}=\frac{1}{18}+\frac{1}{144}$	最小連續倍數解(17 與 34)間，還有分母為 18 的解	
$\frac{1}{16}=\frac{1}{20}+\frac{1}{80}$	最小連續倍數解(17 與 34)間，還有分母為 20 的解	
$\frac{1}{16}=\frac{1}{24}+\frac{1}{48}$	最小連續倍數解(17 與 34)間，還有分母為 24 的解	
$\frac{1}{17}=\frac{1}{18}+\frac{1}{306}$	從第一、第二規律性求得 最小連續倍數解(18 與 36)間，已沒有其他解	共 1 解
$\frac{1}{18}=\frac{1}{19}+\frac{1}{342}$	從第一、第二規律性求得	共 7 解
$\frac{1}{18}=\frac{1}{20}+\frac{1}{180}$	最小連續倍數解(19 與 38)間，還有分母為 20 的解	
$\frac{1}{18}=\frac{1}{21}+\frac{1}{126}$	最小連續倍數解(19 與 38)間，還有分母為 21 的解	
$\frac{1}{18}=\frac{1}{22}+\frac{1}{99}$	最小連續倍數解(19 與 38)間，還有分母為 22 的解	
$\frac{1}{18}=\frac{1}{24}+\frac{1}{72}$	最小連續倍數解(19 與 38)間，還有分母為 24 的解	
$\frac{1}{18}=\frac{1}{27}+\frac{1}{54}$	最小連續倍數解(19 與 38)間，還有分母為 27 的解	
$\frac{1}{18}=\frac{1}{30}+\frac{1}{45}$	最小連續倍數解(19 與 38)間，還有分母為 30 的解	
$\frac{1}{19}=\frac{1}{20}+\frac{1}{380}$	從第一、第二規律性求得 最小連續倍數解(20 與 40)間，已沒有其他解	共 1 解

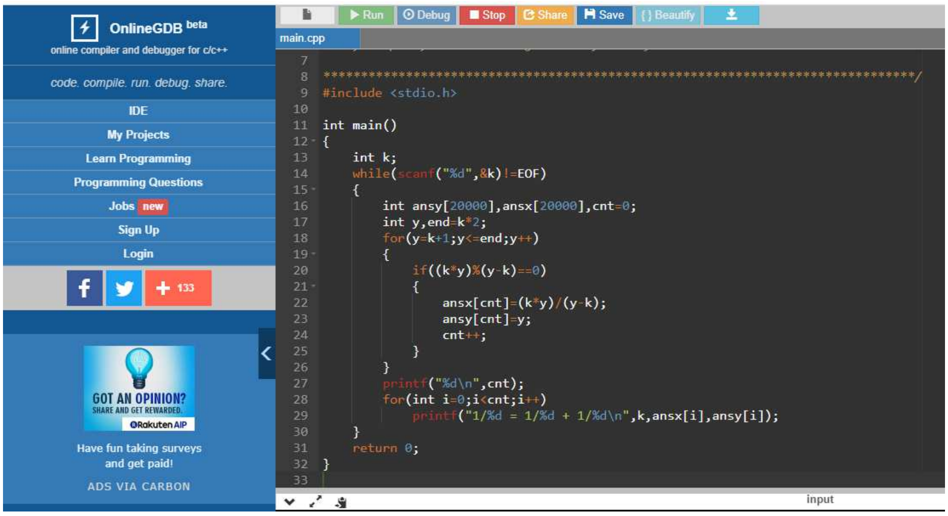
$\frac{1}{20}=\frac{1}{21}+\frac{1}{420}$	從第一、第二規律性求得	
$\frac{1}{20}=\frac{1}{22}+\frac{1}{220}$	最小連續倍數解(21 與 42)間，還有分母為 22 的解	
$\frac{1}{20}=\frac{1}{24}+\frac{1}{120}$	最小連續倍數解(21 與 42)間，還有分母為 24 的解	
$\frac{1}{20}=\frac{1}{25}+\frac{1}{100}$	最小連續倍數解(21 與 42)間，還有分母為 25 的解	共 7 解
$\frac{1}{20}=\frac{1}{28}+\frac{1}{70}$	最小連續倍數解(21 與 42)間，還有分母為 28 的解	
$\frac{1}{20}=\frac{1}{30}+\frac{1}{60}$	最小連續倍數解(21 與 42)間，還有分母為 30 的解	
$\frac{1}{20}=\frac{1}{36}+\frac{1}{45}$	最小連續倍數解(21 與 42)間，還有分母為 36 的解	

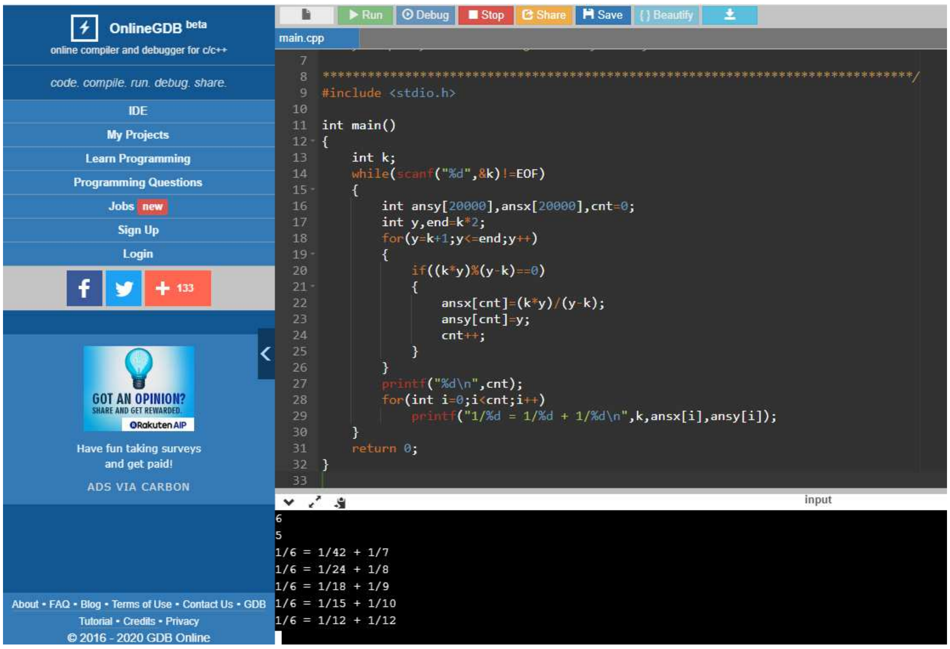
上表為透過第一規律、第二規律、減法拼湊方式找出的所有解，但無法確認是否有所遺漏或錯誤。藉由網路搜尋，我們找到一個線上 C^{++}語言程式的網站，以及網路提供的相關程式碼帶入驗證，確認上表答案的正確性。程式正確輸入後，網站會要求輸入一個數字(代表 C)，不久就回傳該分數有多少解以及哪些解答式。

◆ 線上 C^{++}語言程式的網站：https://www.onlinegdb.com/#

◆ 程式碼：https://blog.csdn.net/ratina/article/details/84059003

經由逐項檢視與輸入，上表答案完全正確，此即表示要解決$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$的問題，可透過第一規律、第二規律及利用減法拼湊找出最小連續倍數間是否還有解等三種策略就可以找出所有解答。





三、繼續發現更有效率的解題原則

(一)以更有效率的方式進行--**利用減法拼湊找出最小連續倍數間是否還有解**

- 我們詳閱自己的研究手稿，認為使用擴分拼湊時，要使原單位分數拆成兩個相異單位分數之關鍵，在於擴分後的分子拆分成的兩個數字都是擴分後分母的因數。舉例如下
  - $\frac{1}{6}=\frac{3}{18}=\frac{1}{18}+\frac{2}{18}=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}$，擴分 3 倍，擴分後的分子 3 若拆成 1 與 2，都是擴分後的分母 18 的因數(其實也是原分母的因數)，同時兩個分母的比也是 1 比 2。
  - $\frac{1}{6}=\frac{4}{24}=\frac{1}{24}+\frac{3}{24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{8}$，擴分 4 倍，擴分後的分子 4 若拆成 1 與 3，都是擴分後的分母 24 的因數(其實也是原分母的因數)，同時兩個分母的比也是 1 比 3。
  - $\frac{1}{6}=\frac{5}{30}=\frac{2}{30}+\frac{3}{30}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}$，擴分 5 倍，擴分後的分子 5 若拆成 2 與 3，都是擴分後的分母 30 的因數(其實也是原分母的因數)，同時兩個分母的比也是 2 比 3。
  - $\frac{1}{6}=\frac{7}{42}=\frac{1}{42}+\frac{6}{42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{7}$，擴分 7 倍，擴分後的分子 7 若拆成 1 與 6，都是擴分後的分母 42 的因數(其實也是原分母的因數)，同時兩個分母的比也是 1 比 6。
  - 承上，**若要拆成兩個相異的單位分數，拆出後的兩個分子必須要是原分母的因數。由於 6 的因數有 1，2，3，6，所以拆成的分子之組合，若是分母 6 的因數組合，就可以被約分成單位分數，而且分子比的和就是擴分的倍數。**
- 以 $\frac{1}{8}$ 為例，繼續驗證上述推測是否正確。
  - $\frac{1}{8}=\frac{3}{24}=\frac{1}{24}+\frac{2}{24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}$，擴分 3 倍，擴分後的分子 3 若拆成 1 與 2，都是擴分後的分母 24 的因數(其實也是原分母的因數)，同時兩個分母的比也是 1 比 2。
  - $\frac{1}{8}=\frac{5}{40}=\frac{1}{40}+\frac{4}{40}=\frac{1}{40}+\frac{1}{10}$，擴分 5 倍，擴分後的分子 5 若拆成 1 與 4，都是

擴分後的分母 40 的因數(其實也是原分母的因數)，同時兩個分母的比也是 1 比 4。

■ $\frac{1}{8}=\frac{7}{56}=\frac{1}{56}+\frac{6}{56}=\frac{2}{56}+\frac{5}{56}=\frac{3}{56}+\frac{4}{56}$，擴分 7 倍，無論擴分後的分子 7 拆成 1 與 6、2 與 5、3 與 4，都無法和擴分後分母 24 進行同時約分。

■ $\frac{1}{8}=\frac{9}{72}=\frac{1}{72}+\frac{8}{72}=\frac{1}{72}+\frac{1}{9}$，擴分 9 倍，擴分後的分子 9 若拆成 1 與 8，都是擴分後的分母 72 的因數(其實也是原分母的因數)，同時兩個分母的比也是 1 比 8。

■ 承上，**若要拆成兩個相異的單位分數，拆成的兩個數字必須要是原分母的因數。由於 8 的因數有 1，2，4，8，所以拆成的分子之組合，若是分母 8 的因數組合，就可以被約分成單位分數，而且分子比的和就是擴分的倍數。**

(二)進行整理，找出最快的解題步驟與規律

➢ 經由上述的整理後，我們發現**原分母的因數組合，會是拆成兩個相異單位分數和的關鍵點**。

◆ **6 的因數有 1，2，3，6，相關因數組合有**

✓ [1:2]，和為 3。3 的倍數需比原分母 6 大且最接近原分母的是 9，依 1:2 的比，第二個分母是 18。所以拆成兩個相異單位分數的分母分別是 9，18。

■ $\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$

✓ [1:3]，和為 4。4 的倍數需比原分母 6 大且最接近原分母的是 8，依 1:3 的比，第二個分母是 24。所以拆成兩個相異單位分數的分母分別是 8，24。

■ $\frac{1}{6}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$

✓ [1:6]，和為 7。7 的倍數需比原分母 6 大且最接近原分母的是 7，依 1:6 的比，第二個分母是 42。所以拆成兩個相異單位分數的分母分別是 7，42。

■ $\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$

✓ [2:3]，和為 5。5 的倍數需比原分母 6 大且最接近原分母的是 10，依 2:3 的比，第二個分母是 15。所以拆成兩個相異單位分數的分母分別是 10，15。

■ $\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$

✓ [2:6]，和為 8。8 的倍數需比原分母 6 大且最接近原分母的是 8，依 2:6 的比，第二個分母是 24。所以拆成兩個相異單位分數的分母分別是 8，24。答案與[1:3]相同。

■ $\frac{1}{6}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$ ，此結果與 1:3 的答案相同

✓ [3:6]，和為 9。9 的倍數需比原分母 6 大且最接近原分母的是 9，依 3:6 的比，第二個分母是 18。所以拆成兩個相異單位分數的分母分別是 9，18。答案與[1:2]相同。

■ $\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$ ，此結果與 1:2 的答案相同

◆ **8 的因數有 1，2，4，8，相關因數組合有**

✓ [1:2]，和為 3。3 的倍數需比原分母 8 大且最接近原分母的是 9，依 1:2 的比，第二

個分母是 18。所以拆成兩個相異單位分數的分母分別是 9，18，**但是此非正解。**

- ■ $\frac{1}{8} \neq \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$

✓ [1:4]，和為 5。5 的倍數需比原分母 8 大且最接近原分母的是 10，依 1:4 的比，第二個分母是 40。所以拆成兩個相異單位分數的分母分別是 10，40。

- ■ $\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40}$

✓ [1:8]，和為 9。9 的倍數需比原分母 8 大且最接近原分母的是 9，依 1:8 的比，第二個分母是 72。所以拆成兩個相異單位分數的分母分別是 9，72。

- ■ $\frac{1}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{72}$

✓ [2:4]，和為 6。6 的倍數需比原分母 8 大且最接近原分母的是 12，依 2:4 的比，第二個分母是 24。所以拆成兩個相異單位分數的分母分別是 12，24。

- ■ $\frac{1}{8} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$
- ■ 與[1:2]所找出的$\frac{1}{9} + \frac{1}{18}$做比較，[1:2]與[2:4]都具有相同的最簡整數比，但是只有[2:4]是正解。還需要有更多數據來驗證之。

✓ [2:8]，和為 10。6 的倍數需比原分母 8 大且最接近原分母的是 10，依 2:8 的比，第二個分母是 40。所以拆成兩個相異單位分數的分母分別是 10，40。

- ■ $\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40}$
- ■ 與[1:4]所找出的$\frac{1}{10} + \frac{1}{40}$做比較，[2:8]與[1:4]都具有相同的最簡整數比，兩者找出來的解都屬正確。

✓ [4:8]，和為 12。12 的倍數需比原分母 8 大且最接近原分母的是 12，依 4:8 的比，第二個分母是 24。所以拆成兩個相異單位分數的分母分別是 12，24。

- ■ $\frac{1}{8} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$
- ■ 與[1:2]所找出的$\frac{1}{9} + \frac{1}{18}$及[2:4]所找出的$\frac{1}{12} + \frac{1}{24}$做比較，發現[4:8]與[1:2]找出的解不同，而[4:8]與[2:4]找出的解才是正確的。
- ■ 根據上述發現，**我們認為在因數組合中，具有相同最簡整數比的因數組合中，要選同比值中前後項有最大和的(避免產生不同解)，做為放大的倍數，再依序依最簡整數比找出拆分後的兩個分母。**
- ■ 以 10 為例，繼續驗證是否正確

◆ 10 的因數有 1，2，5，10，因數組合有[1:2]、[1:5]、[1:10]、[2:5]、[2:10]、[5:10]

◆ 由於具有相同最簡整數比會有不同的解，將因數組合依據相同比值改寫如下

■[1:2]、[5:10]，比值同，但最大的和是[5:10]這組，即以 15 做為拆分後的倍數。

✧ 依[1:2]的比，拆分後的分母是 15 與 30。$\frac{1}{10}=\frac{1}{15}+\frac{1}{30}$

✧ 依[5:10]的比，拆分後的分母是 15 與 30。$\frac{1}{10}=\frac{1}{15}+\frac{1}{30}$

■[1:5]、[2:10]，比值同，但最大的和是[2:10]這組，即以 12 做為拆分後的倍數。

✧ 依[1:5]的比，拆分後的分母是 12 與 60。$\frac{1}{10}=\frac{1}{12}+\frac{1}{60}$

✧ 依[2:10]的比，拆分後的分母是 12 與 60。$\frac{1}{10}=\frac{1}{12}+\frac{1}{60}$

■[1:10]，此組的和是 11，即以 11 做為拆分後的第一個分母。

✧ 依[1:10]的比，拆分後的分母是 11 與 110。$\frac{1}{10}=\frac{1}{11}+\frac{1}{110}$

■[2:5]，此組的和是 7，即以 11 做為拆分後的第一個分母。

✧ 依[2:5]的比，拆分後的分母是 14 與 35。$\frac{1}{10}=\frac{1}{14}+\frac{1}{35}$

(三)確立$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$的解題步驟並驗證

➢ 經由以上過程後，我們將$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$的解題步驟化為下列步驟

  ➢ 找出 C 的所有因數，兩兩一組再依具有相同最簡整數比進行排列。
  ➢ 在相同的最簡整數比中，選取前後項的和是最大值的當做放大倍數。
  ➢ 將此放大倍數乘以同項的最簡整數比，所得的兩個數分別是拆分後的兩個分母。

➢ 我們隨機抽 15、24、28 等數帶入 C，驗證上述步驟，看看是否可寫成$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$

➢ 15⇨因數有 1、3、5、15⇨因數組合依序挑選出[1:3]、[1:5]、[1:15]、[3:5]、[3:15]、[5:15]

  ➢ [1:3]、[5:15]都有相同最簡整數比，這兩組中前、後項最大的和是 20，將 20 乘以最簡整數比 1:3，得到的兩個數是 20、60。$\frac{1}{15}=\frac{1}{20}+\frac{1}{60}$

  ➢ [1:5]、[3:15]都有相同最簡整數比，這兩組中前、後項最大的和是 18，將 18 乘以最簡整數比 1:5，得到的兩個數是 18、90。$\frac{1}{15}=\frac{1}{18}+\frac{1}{90}$

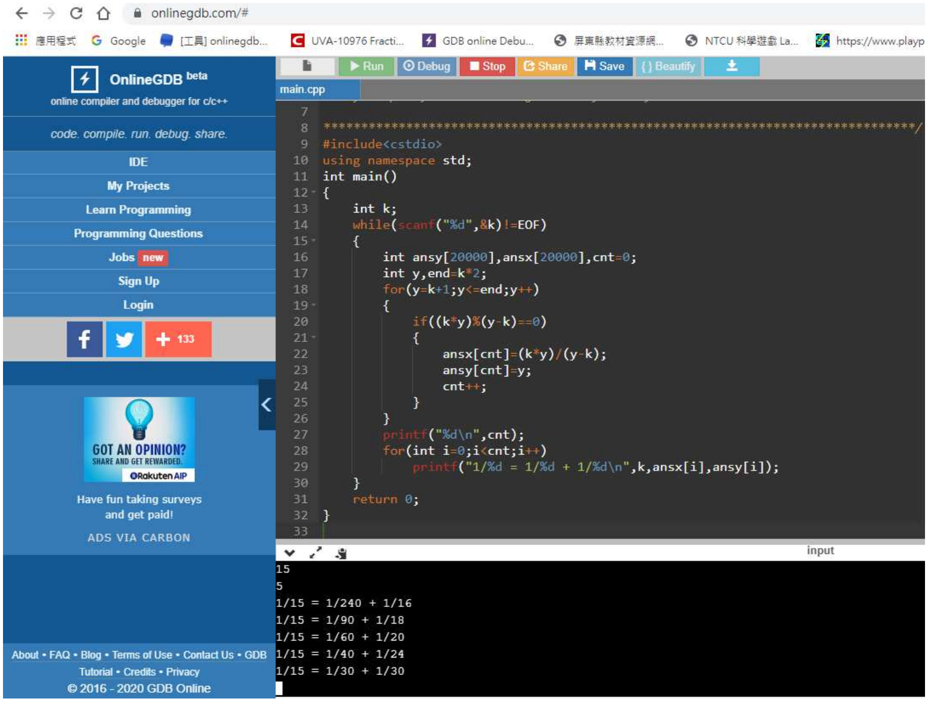
  ➢ [1:15]的和為 16，將 16 乘以最簡整數比 1:15，得到的兩個數是 16、240。

  $\frac{1}{15}=\frac{1}{16}+\frac{1}{240}$

  ➢ [3:5]的和為 8，將 8 乘以最簡整數比 3:5，得到的兩個數是 24、40。

  $\frac{1}{15}=\frac{1}{24}+\frac{1}{40}$

◆ 以上共找出四個解答，與線上 C^{++}語言程式網站 https://www.onlinegdb.com/#做比對，答案完全相符。

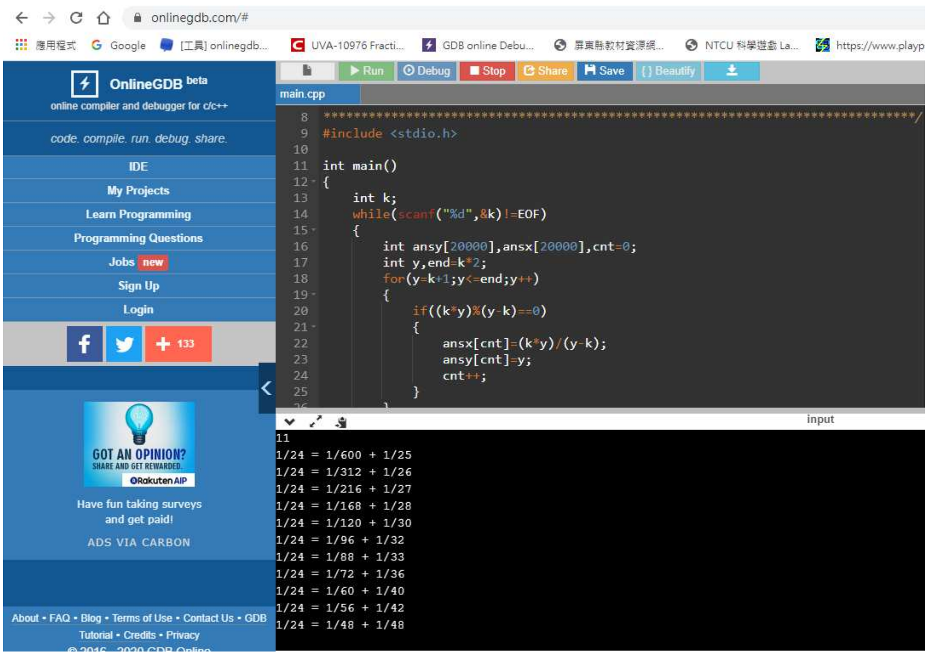


- 24⇨因數有 1、2、3、4、6、8、12、24⇨因數組合依序挑選出[1:2]、[1:3]、[1:4]、[1:6]、[1:8]、[1:12]、[1:24]、[2:3]、[2:4]、[2:6]、[2:8]、[2:12]、[2:24]、[3:4]、[3:6]、[3:8]、[3:12]、[3:24]、[4:6]、[4:8]、[4:12]、[4:24]、[6:8]、[6:12]、[6:24]、[8:12]、[8:24]、[12:24]
  - [1:2]、[2:4]、[3:6]、[4:8]、[6:12]、[12:24]都有相同最簡整數比，這兩組中前、後項最大的和是 36，將 36 乘以最簡整數比 1:2，得到的兩個數是 36、72。$\frac{1}{24}=\frac{1}{36}+\frac{1}{72}$
  - [1:3]、[2:6]、[4:12]、[8:24]都有相同最簡整數比，這兩組中前、後項最大的和是 32，將 32 乘以最簡整數比 1:3，得到的兩個數是 32、96。$\frac{1}{24}=\frac{1}{32}+\frac{1}{96}$
  - [1:4]、[2:8]、[3:12]、[6:24]都有相同最簡整數比，這兩組中前、後項最大的和是 30，將 30 乘以最簡整數比 1:4，得到的兩個數是 30、120。$\frac{1}{24}=\frac{1}{30}+\frac{1}{120}$
  - [1:6]、[2:12]、[4:24]都有相同最簡整數比，這兩組中前、後項最大的和是 28，將 28 乘以最簡整數比 1:6，得到的兩個數是 28、168。$\frac{1}{24}=\frac{1}{28}+\frac{1}{168}$
  - [1:8]、[3:24]都有相同最簡整數比，這兩組中前、後項最大的和是 27，將 27 乘以最簡整數比 1:8，得到的兩個數是 27、216。$\frac{1}{24}=\frac{1}{27}+\frac{1}{216}$
  - [1:12]、[2:24]都有相同最簡整數比，這兩組中前、後項最大的和是 26，將 26 乘以最簡整數比 1:12，得到的兩個數是 26、312。$\frac{1}{24}=\frac{1}{26}+\frac{1}{312}$
  - [1:24]都有相同最簡整數比，這兩組中前、後項最大的和是 25，將 25 乘以最簡整

數比 1:24，得到的兩個數是 25、600。$\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{600}$

- [2:3]、[4:6]、[8:12]都有相同最簡整數比，這兩組中前、後項最大的和是 20，將 20 乘以最簡整數比 2:3，得到的兩個數是 40、60。$\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{60}$
- [3:4]、[6:8]都有相同最簡整數比，這兩組中前、後項最大的和是 14，將 14 乘以最簡整數比 3:4，得到的兩個數是 42、56。$\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{42}+\dfrac{1}{56}$
- [3:8]是最簡整數比，這組前、後項的和是 11，將 11 乘以最簡整數比 3:8，得到的兩個數是 33、88。$\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{33}+\dfrac{1}{88}$

◆ 以上共找出十個解答，與線上 C++語言程式網站 https://www.onlinegdb.com/#做比對，答案完全相符。



- 28⇨因數有 1、2、4、7、14、28⇨因數組合依序挑選出[1:2]、[1:4]、[1:7]、[1:14]、[1:28]、[2:4]、[2:7]、[2:14]、[2:28]、[4:7]、[4:14]、[4:28]、[7:14]、[7:28]、[14:28]
  - [1:2]、[2:4]、[7:14]、[14:28]都有相同最簡整數比，這兩組中前、後項最大的和是 42，將 42 乘以最簡整數比 1:2，得到的兩個數是 42、84。$\dfrac{1}{28}=\dfrac{1}{42}+\dfrac{1}{84}$
  - [1:4]、[7:28]都有相同最簡整數比，這兩組中前、後項最大的和是 35，將 35 乘以最簡整數比 1:4，得到的兩個數是 35、140。$\dfrac{1}{28}=\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{140}$
  - [1:7]、[2:14]、[4:28]的和為 32，將 32 乘以最簡整數比 1:7，得到的兩個數是 32、224。$\dfrac{1}{28}=\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{224}$
  - [1:14]、[2:28]的和為 30，將 30 乘以最簡整數比 1:14，得到的兩個數是 30、420。

$$\frac{1}{28}=\frac{1}{30}+\frac{1}{420}$$

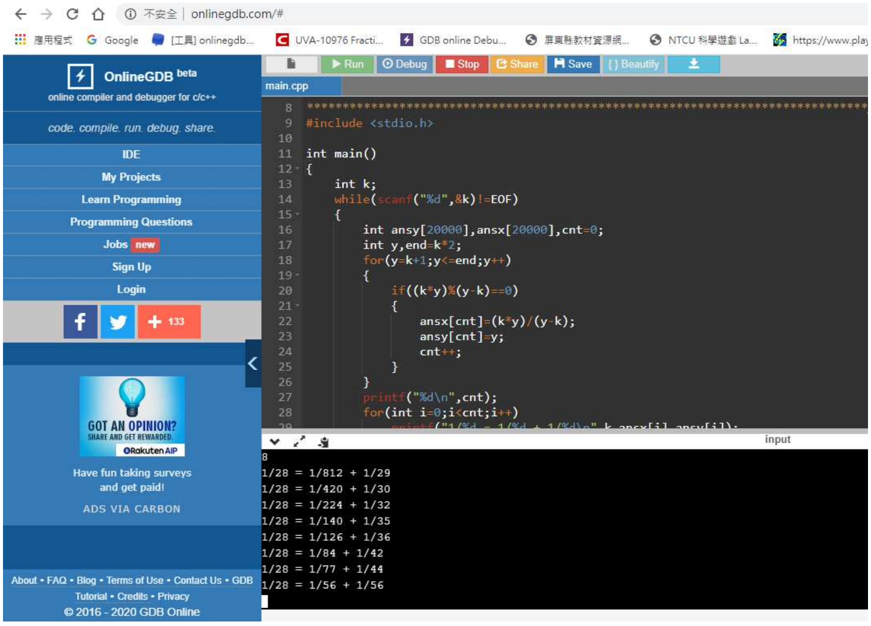
➢ [1:28]是最簡整數比，這組前、後項的和是 29，將 29 乘以最簡整數比 1:29，得到的兩個數是 29、812。$\frac{1}{28}=\frac{1}{29}+\frac{1}{812}$

➢ [2:7]、[4:14]的和為 18，將 18 乘以最簡整數比 2:7，得到的兩個數是 36、126

$$\frac{1}{28}=\frac{1}{36}+\frac{1}{126}$$

➢ [4:7]是最簡整數比，這組前、後項的和是 11，將乘以最簡整數比 4:7，得到的兩個數是 44、77。$\frac{1}{28}=\frac{1}{44}+\frac{1}{77}$

◆ 以上共找出七個解答，與線上 C^{++}語言程式網站 https://www.onlinegdb.com/#做比對，答案完全相符。



陸、結論

本研究是在找出$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$，其中 A≠B 的所有解。藉由系列性研究後，我們有下列發現

一、在嘗試錯誤的解答中，擴分拼湊比減法拼湊更為簡易也較有可能找出部分規律。

二、我們所找出的規律中，有一個解題策略是其中一解，亦即是給定一個分母 C，則剩下的 A 是**是原分母加 1，B 是前兩項分母的「乘積」**。

三、單位分數可以成功拆分成兩個相異分數的關鍵就是，拆分後的分子要被擴分後的分母約分成 1。因此，原分母 C 的所有因數就是解題關鍵。

四、根據我們的研究，已經找出$\frac{1}{C}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$之所有解的解題步驟，經驗證後是無誤

■ 找出 C 的所有因數，兩兩一組再依具有相同最簡整數比進行排列。

■ 在相同的最簡整數比中，選取前項與後項的和是最大值當做放大倍數。

■ 將此放大倍數乘以同項的最簡整數比，所得的兩個數分別是拆分後的兩個分母。

柒、參考資料及其他

一、 分數拆分-香港數學教育學會

http://www.hkame.org.hk/uploaded_files/magazine/29/455.pdf

二、 單位分數- 維基百科，自由的百科全書 – Wikipedia

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%96%AE%E4%BD%8D%E5%88%86%E6%95%B8