# 屏東縣第 60 屆國中小學科學展覽會 作品說明書

科 别:數學科

組 別:國中組

作品名稱:神秘方塊

關 鍵 詞:等差級數和、上下界、不等式

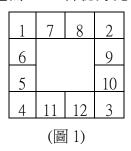
編號:

目錄 ····································
作品名稱 ····································
摘要 ····································
壹、研究動機 ····································
貳、研究目的 ······ $P_1$
參、研究設備及器材 $\cdots\cdots P_1$
肆、研究過程及方法 ····· $P_1 \sim P_{29}$
<ul><li>一、名詞定義</li><li>・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・</li></ul>
二、不同的神秘方塊,直行或橫列的數字總和 $(S_{n\times n})$ 的探討 ······ $P_3$
三、最小神秘方塊的探討 ······ $P_4$
四、神秘方塊解的探討 ······ $P_4 \sim P_{29}$
伍、研究結果 ····································
陸、討論 ····································
柒、結論 ····································
捌、參考資料及其他 ····································

### 作品名稱: 神秘方塊

### 摘要

由「數字的異想世界」一書中,看見了古戈爾博士把數字 1、2、3、4 擺在方形的四個角,接下來設法把 5、6、7、8、9、10、11、12 等 8 個數字沿著方形問圍擺放,讓每邊的數字總和都相同(如圖 1,僅為範例,其各邊總和並不相同),及古戈爾博士的提問「能找到幾種滿足上面敘述的解法?」。便想先從找出滿足古博士規則的 4\*4 神秘方塊著手,觀察其每邊的總和、四個角擺放的數字及擺放的方法數等三者之間的關係,能否得到系統性的結果。進而將結果類推至 5\*5 神秘方塊,甚而 n\*n 神秘方塊。



### 壹、研究動機

這段描述讓我們對於是否真有符合古戈爾博士敘述的擺放方式及除了 1、2、3、4 之外,能否有其他不同的擺放規則及樣態充滿興趣,配合國中課程七上—數與數線、七下——一元一次不等式、八下—等差級數…等章節,然而數字的運算結合圖形,更讓人有股欲拿起紙、筆的衝動,因此有了接下來的探討及研究。

### 貳、研究目的

希望透過分析 3×3 神秘方塊直行(横列)的數字總和、上下界及成為解時數字擺放位置的相關性,進而發展出系統性的結果,並推展至 4×4 乃至於 n×n 神秘方塊。過程中歸納整理不同神秘方塊間解的結果,期待能藉此解決古戈爾博士的問題,並將結果表列,提供參閱。

# 參、研究設備及器材

紙、筆、Excel。

## 肆、研究過程或方法

#### 一、名詞定義

#### (一)神秘方塊

沿用「古戈爾博士把數字 1、2、3、4 擺在方塊的四個角,接下來設法把 5、6、7、8、9、10、11、12 等 8 個數字沿著方塊周圍擺放,讓每邊的數字總 和都相同」這段敘述中,數字的擺放仍沿著方塊的角落及周圍的條件,但放寬 角落只能擺放 1、2、3、4 四個數字的限制,而定義出以下不同的神秘方塊。

1. 3×3 神秘方塊

:3×3的方塊中,數字沿著周圍擺放,如(圖2)

1	2	3
8		4
7	6	5

(圖 1)

2. 4×4 神秘方塊

:4×4的方塊中,數字沿著周圍擺放,如(圖 2)

		. /	
1	7	8	2
6			9
5			10
4	11	12	3

(圖 2)

3. n×n 神秘方塊

:n×n 的方塊中,數字沿著周圍擺放,如(圖 3)

1	 n
	:
3n-2	 2n-1

(圖 3)

#### (二)直行或橫列的數字總和( $S_{n\times n}$ )

1.  $S_{3\times3}$ 

 $:3\times3$  方塊中,各直行(橫列)數字總和= $S_{3\times3}=12$ ,並將該數字 12 列於方塊中間,如(圖 4)。

1	8	3
5	12	7
6	4	2

(圖 4)

 $S_{4\times4}$ 

 $:4\times4$  方塊中,各直行(橫列)數字總和= $S_{4\times4}$ =22, 並將該數字 22 列於方塊中間,如(圖 5)。

1	6	4								
7	2	5								
12	2	<i>,</i>	10							
2	8	9	3							
(圖 5)										

3.  $S_{n\times n}$ 

 $: n \times n$  方塊中,各直行(橫列)數字總和= $S_{n \times n}$ ,並將該數字 $S_{n \times n}$ 列於方塊中間,如(圖 6)。

1		n
::	$S_{n\times n}$	:
3n-2		2n-1

(圖 6)

- 二、不同的神秘方塊,直行或橫列的數字總和( $S_{n\times n}$ )的探討
  - (-)直行或橫列的數字總和 $(S_{n\times n})$ 的上下界
    - $1.3\times3$  神秘方塊的直行或橫列的數字總和( $S_{3\times3}$ )上下界:

$$11.5 \le S_{3\times3} \le 15.5$$

Pf:假設擺放於四個角的數為 a、b、c、d,如(圖7),

(圖 7)

 $1 \le a \cdot b \cdot c \cdot d \le 3^2 - (3-2)^2 = 8$ 

$$1+2+\cdots+8=\frac{(1+8)\times 8}{2}=36$$

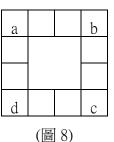
$$\text{II} \quad \frac{36 + (1 + 2 + 3 + 4)}{4} \le \frac{36 + (a + b + c + d)}{4} \le \frac{36 + (5 + 6 + 7 + 8)}{4}$$

故 11.5  $\leq S_{3\times3} \leq 15.5$ 

2.  $4 \times 4$  神秘方塊的直行或橫列的數字總和( $S_{4 \times 4}$ )上下界:

$$22 \leq S_{4\times4} \leq 30$$

Pf:假設擺放於四個角的數為 a、b、c、d,如(圖 8),



$$\overrightarrow{\text{m}}$$
  $1 \le a \cdot b \cdot c \cdot d \le 4^2 - (4-2)^2 = 12$   $\underline{\mathbb{H}}$ 

$$1+2+\cdots+12=\frac{(1+12)\times12}{2}=78$$

$$\text{II} \quad \frac{78 + (1 + 2 + 3 + 4)}{4} \le \frac{78 + (a + b + c + d)}{4} \le \frac{78 + (9 + 10 + 11 + 12)}{4}$$

故 22 
$$\leq$$
  $S_{4\times4}$   $\leq$  30

3.  $n \times n$  神秘方塊的直行或橫列的數字總和( $S_{n \times n}$ )上下界:

$$\frac{4n^2 - 7n + 8}{8} \le S_{n \times n} \le \frac{4n^2 - 5n - 2}{8}$$

Pf:假設擺放於四個角的數為 a、b、c、d(如圖 9),

a	 b
d	 С

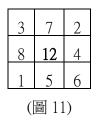
而 
$$1 \le a \cdot b \cdot c \cdot d \le n^2 - (n-2)^2 = 4n-4$$
 且 (圖 9)
$$1+2+\dots+(4n-4)=\frac{[1+(4n-4)]\times(4n-4)}{2}=8n^2-14n+6$$
則  $\frac{(8n^2-14n+6)+(1+2+3+4)}{4} \le \frac{(8n^2-14n+6)+(a+b+c+d)}{4} \le \frac{(8n^2-14n+6)+(4n-5)+(4n-4)]}{4}$ 
故  $\frac{4n^2-7n+8}{2} \le S_{n\times n} \le \frac{4n^2+n-8}{2}$ 

#### 三、最小神秘方塊的探討

#### (一) 2×2 神秘方塊不存在

(二) 3×3 神秘方塊為最小的神秘方塊

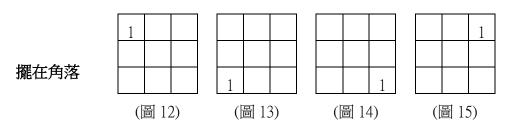
Pf:由二、(一) 2.得知, $11.5 \le S_{3\times3} \le 15.5$ ,因此  $S_{3\times3}$  可能為  $12 \times 13 \times 14 \times 15$ 。如(圖 11),即為 $S_{3\times3} = 12$  的其中一組解。故  $3\times3$  神秘方塊為最小的神秘方塊。



#### 四、神秘方塊解的探討

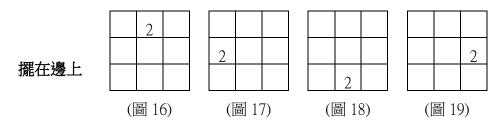
- (一)探討神秘方塊的解時,數字的擺放位置需分成<u>角落</u>及<u>邊上</u>兩類討論。
  - 1.神秘方塊為正方形,具有對稱性。
  - 2. 數字的擺放位置需分成角落及邊上兩類討論
    - (1)數字擺放在角落

由於正方形具對稱性,可透過旋轉或翻轉的方式,使得(圖 12)至(圖 15)中,數字 1 的位置重疊,故將此擺放方式視同**將數字擺在角落**一類討論。 然若(圖 12)為其中一組解的擺放方式,亦可透過旋轉或翻轉,得出如 (圖 13)至(圖 15)中,數字 1 相對應的位置並符合條件的一組解。



#### (2)數字擺放在邊上

同數字擺放在角落的論述,(圖 16)至(圖 19),彼此可透過旋轉或翻轉,使數字 2 的位置重疊,故將此視同將數字擺在邊上一類討論。若知其一為解的擺放方式,亦可透過旋轉或翻轉,得知另三種擺放方式亦為一組解。



#### (二)在不同的 $S_{3\times 3}$ 下,各數字的組合情形

1. ① $S_{3\times 3}=12$ ,各數字的組合情形,如(表 1)

A	В	С	A+B+C								
	3	8			3	7	12		1	8	
1	4	7	12	2			12	3	2	7	12
	5	6			4	6			4	5	
	1	7			1	6			1	5	
4	$\begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$	7 6	12	5 <b>→</b>			12	6			12
	3	5			3	4			2	4	
7 .	1 4	12		1		12					
7 <b>→</b>	2	3	12	8	1	3	12				
					(表	ŧ 1)		•			

 $S_{3\times 3}$ =13,各數字的組合情形,如(表 2)

A	В	С	A+B+C	A	В	С	A+B+C	A	В	С	A+B+C
	4	8			3	8			2	8	
1			13	2		7	13	3			13
	5	7			5	6			4	6	
	1	8			1	7			12	5	
4	2	7	13	5	2	6	13	6			13
	3	6			3	8			<sub>3</sub>	4	
7	1	5	12	0	1	1 4	12				
7 <b>→</b>	2	4	13	8	2	3	13				
					(=	表 2)		•			

# $S_{3\times3}$ =14,各數字的組合情形,如(表 3)

A	В	С	A+B+C	A	В	С	A+B+C	А	В	С	A+B+C
	5	8			4	8			4	7	
1			14	2	5		14	3 —	•		14
	6	7			5	7			5	6	
	2	8			1	8			1	7	
4			14	5 <b>→</b>	2	7	14	6 —	•		14
	3	7			3	6			3	5	
	1	6			1	~					
7 <b>→</b>	$\begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$	5	14	8		5	14				
	3	4			2	4					
				ı	(=	表 3)		ı			

④ $S_{3\times3}$ =15,各數字的組合情形,如(表 4)

A	В	С	A+B+C	А		В	C	A+B+C	A	В	С	A+B+C
						5	8			4	8	
1 —	<b>→</b> 6	8	15	2	<b></b>			15	3	•		15
						6	7			5	7	
	3	8				2	8			1	8	
4 —	<b></b>		15	5	<b></b>	3	7	15	6 —	<b>▶</b> 2	7	15
	5	6				4	6			4	5	
	2	6				1	6					
7 —	<b></b>		15	8	<b></b>	$\begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$	5	15				
	3	5				<sub>3</sub>	4					
				1		(表	£ 4)					

③在不同的 $S_{3\times 3}$ 下,各數字的擺放方式及解的情形

	罷放 立置	擺放方式	是否 為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否 為解	擺放方式	是否 為解
	<i>L</i> .E.		/河州		/河内 <del>十</del>		/河門十		/河片
		1 4 7 3 <b>12</b> 8	X	1 7 4 3 12 8	X	1 4 7 6 <b>12</b> 5	X	1 7 4 6 12 5	X
1	角落	1     4     7       8     12       3	X	1 7 4 8 12 3	X	1 4 7 5 12 6	X	1 7 4 5 12 6	X
		1 3 8 5 12 6	X	1     8     3       5     12     7       6     4     2	V	1 3 8 6 12 5	X	1     8     3       6     12       5	X

	<u>放</u> [置	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解
		3 2 7 1 12 8	X	3 7 2 1 12 8	X	3 4 5 1 12 8	X	3 5 4 1 12 8	X
1	邊上	5 3 4 1 12 6	X	5 4 3 1 12 6	X	4     2     6       1     12       7	X	4     6     2       1     12       7	X
		4 3 5 1 12 7	X	4 5 3 1 12 7	X				
	角落	2 3 7 4 12 6	X	2 7 3 4 12 8 6 5 1	V	2 3 7 6 <b>12</b> 4	X	2 7 3 6 12 4	X
2	邊	3 1 8 2 12 7	X	3 8 1 2 12 7	X	4 3 5 2 <b>12</b> 6	Χ	4 5 3 2 12 6	X
	上	3 5 4 2 12 7	X	3 4 5 2 12 7	X	4     1     7       2     12       6	X	4     7     1       2     12       6	X
3	角落	3 2 7 1 12 8	X	3 7 2 1 12 8	X	3 2 7 8 <b>12</b> 1	X	3     7     2       8     12     4       1     5     6	V

	態放 工置	擺放方式	是否 為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解
	角	3 2 7 4 12 5	X	3 7 2 4 12 5	X	3 2 7 5 <b>12</b> 4	X	3 7 2 5 12 4	X
	落	3 1 8 4 12 5	X	3 8 1 4 12 5	X	3 1 8 5 12 4	X	3 8 1 5 <b>12</b> 4	X
3		1 4 7 3 12 8	X	1 7 4 3 12 8	X	4     1     7       3     12       5	X	4     7     1       3     12       5	X
	邊上	2 6 4 3 12 7	X	2 4 6 3 12 7	X	4 2 6 3 12 5	X	4     6     2       3     12       5	X
		1 5 6 3 12 8	X	1 6 5 3 12 8	X				
		4 1 7 2 12 6	X	4     7     1       2     12       6	X	4 1 7 6 12 2	X	4     7     1       6     12       2	X
4	角落	4     1     7       3     12       5	X	4     7     1       3     12       5	X	4     1     7       5     12       3	X	4     7     1       5     12       3	X
		4     2     6       3     12       5	X	4     6     2       3     12       5	X	4 2 6 5 12 3	X	4     6     2       5     12       3	X

	<b>E放</b>	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解
		1 5 6 4 12 7	X	1 6 5 4 12 7	X	1 3 8 4 12 7	X	1 8 3 4 12 7	X
4	邊 上	2 1 7 4 12 6	X	2 7 1 4 12 6	X	2 3 5 4 12 6	X	2 5 3 4 12 6	X
		3 1 8 4 12 5	X	3 8 1 4 12 5	X	3 2 7 4 12 5	X	3 7 2 4 12 5	X
	角落	5 1 6 3 12 4	X	5 6 1 3 12 4	X	5 1 6 4 12 3	X	5 6 1 4 12 3	X
5	邊	1 3 8 5 <b>12</b> 6	Χ	1 8 3 5 <b>12</b> 7 6 4 2	V	1 7 4 5 <b>12</b> 6	Χ	1 4 7 5 <b>12</b> 6	X
	上	3 2 7 5 12 4	X	3 7 2 5 12 4	X	3 1 8 5 12 4	X	3 8 1 5 12 4	X
6	角落	6 1 5 2 12 4	X	6 5 1 2 12 4	X	6 1 5 4 12 2	X	6 5 1 4 12 8 2 7 3	V
O	邊上	1     4     7       6     12       5	X	1 7 4 6 12 5	X	2 3 7 6 12 4	X	2 7 3 6 12 4	X
					11				

	放	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解
6	邊上	1 3 8 6 12 5	X	1 8 3 6 12 5	X				
	角落	7 1 4 2 12 3	X	7 4 1 2 12 3	X	7 1 4 3 12 2	X	7 4 1 3 12 2	X
7	邊	1 3 8 7 12 4	Χ	1 8 3 7 12 4	Χ	1 5 6 7 12 4	Χ	1 6 5 7 12 4	X
	上	2 4 6 7 12 5 3 8 1	V	2 6 4 7 12 3	X				
1	角落	1 4 8 5 <b>13</b> 7	X	1 8 4 5 13 7	X	1 4 8 7 13 3 5 6 2	V	1 8 4 7 13 3 5 2 6	V
	邊上	4 2 7 1 13 8	X	4 7 2 1 13 8	X	4 3 6 1 13 8	X	4 6 3 1 13 8	X
2	角落	2 3 8 4 13 7	X	2 8 3 4 13 7	X	2 3 8 7 13 4	X	2 8 3 7 13 4	X

 擺立位		擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解
	角	2 5 6 4 13 7	X	2 6 5 4 13 7	X	2 5 6 7 13 4	X	2 6 5 7 13 4	X
2	落	2 3 8 5 13 6	X	2 8 3 5 13 6	X	2 3 8 6 13 4 5 7 1	V	2 8 3 6 13 5	X
2	邊	3 4 6 2 13 8	X	3 6 4 2 13 8	X	4 6 3 2 13 7	X	4 3 6 2 13 7	X
	上	4 1 8 2 13 7	X	4 8 1 2 13 7	X	5 1 7 2 13 6	X	5 7 1 2 13 8 6 3 4	V
	角落	3 2 8 4 13 6	X	3 8 2 4 13 6	X	3 2 8 6 13 4	X	3 8 2 6 13 4	X
3	邊	2 5 6 3 13 8	X	2 6 5 3 13 7 8 4 1	V	2 7 4 3 13 8	X	2 4 7 3 13 8	X
	上	4     1     8       3     13       6	X	4     8     1       3     13     7       6     2     5	V	4     2     7       3     13       6	X	4     7     2       3     13       6	X
4	角落	4     1     8       2     13       7	X	4 8 1 2 13 7	X	4 1 8 7 13 2	X	4 8 1 7 13 2	X
					13				

擺)		擺放方式	是否 為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解
4	角	4     3     6       2     13       7	X	4 6 3 2 13 7	X	4 3 6 7 13 2	X	4 6 3 7 13 2	X
	落	4     1     8       3     13       6	X	4     8     1       3     13     7       6     2     5	V	4     1     8       6     13       3	X	4 8 1 6 13 3	X
4	邊	1 5 7 4 13 8	X	1 7 5 4 13 6 8 3 2	V	2 5 6 4 13 7	X	2 6 5 4 13 7	X
	上	2 3 8 4 13 7	X	2 8 3 4 13 7	X	3 2 8 4 13 6	X	3 8 2 4 13 6	X
		5 1 7 2 13 6	X	5 7 1 2 13 8 6 3 4	V	5 1 7 6 13 2	X	5 7 1 6 13 4 2 3 8	V
۶	角落	5 1 7 3 13 8	X	5 7 1 3 13 8	X	5     1     7       8     13     2       3     6     4	V	5 7 1 8 13 3	X
5		5 3 8 2 13 6	X	5 8 3 2 13 6	X	5 3 8 6 13 1 2 7 4	V	5 3 8 6 13 2	X
	邊上	1 4 8 5 13 7	X	1 8 4 5 13 7	X	2 3 8 5 13 6	X	2 8 3 5 13 6	X

	放置	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解
5	邊上	2 4 7 5 13 6	X	2 7 4 5 13 6	X	3 6 4 5 13 8	X	3 4 6 5 13 8	X
	角落	6 2 5 3 13 4	X	6 5 2 3 13 4	X	6 2 5 4 13 3	X	6 5 2 4 13 3	X
6	邊	2 8 3 6 13 5	X	2 3 8 6 13 4 5 7 1	V	2 7 4 6 13 5	X	2 4 7 6 13 5	X
	上	3 2 8 6 13 4	X	3 8 2 6 13 4	X				
	角落	7 1 5 2 13 4	X	7 5 1 2 13 4	X	7 1 5 4 13 2	X	7 5 1 4 13 2	X
7	邊	1 4 8 7 13 3 5 6 2	V	1 8 4 7 13 3 5 2 6	V	2 3 8 7 13 4	Χ	2 8 3 7 13 4	X
	上	2 5 6 7 13 4	X	2 6 5 7 13 4	X				
8	角落	8     1     4       2     13       3	X	8 4 1 2 13 3	X	8     1     4       3     13       2	X	8     4     1       3     13     7       2     6     5	v

	放置	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解
8	邊	1 5 7 8 13 4	X	1 7 5 8 13 2 4 3 6	V	2 4 7 8 13 3	X	2 7 4 8 13 3	X
	上	2 5 6 8 13 3	X	2 6 5 8 13 3	X				
	角落	1 5 8 6 14 2 7 3 4	V	1 8 5 6 14 7	X	1 5 8 7 14 6	X	1 8 5 7 14 6	X
1	邊	5     2     7       1     14       8	X	5 7 2 1 14 8	X	5     3     6       1     14       8	X	5     6     3       1     14     7       8     2     4	V
	上	6 3 5 1 14 7	X	6 5 3 1 14 7	X				
	角落	2 4 8 5 14 7	X	2 8 4 5 14 7	X	2 4 8 7 14 5	X	2 8 4 7 14 5	X
2	邊	4 3 7 2 14 6 8 5 1	V	4     7     3       2     14     6       8     1     5	V	5 3 6 2 14 7	X	5 6 3 2 14 7	X
	上	5     1     8       2     14       7	X	5     8     1       2     14       7	X 16				

	擺位	放置	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解
		角落	3 4 7 5 14 6	X	3 7 4 5 14 6	X	3 4 7 6 14 5	X	3 7 4 6 <b>14</b> 2 5 1 8	V
	3	邊	4     2     8       3     14     5       7     6     1	V	4     8     2       3     14       7	X	5 1 8 3 14 6	X	5     8     1       3     14       6	X
		上	5 2 7 3 14 6	X	5 7 2 3 14 6	X				
•	4	角落	4     2     8       3     14     5       7     6     1	V	4     8     2       3     14       7	X	4     2     8       7     14     1       3     6     5	V	4     8     2       7     14       3	X
	4	邊上	2 5 7 4 14 8	X	2 7 5 4 14 8	X	3 5 6 4 14 7	X	3 6 5 4 14 7	X
•			5 1 8 2 14 7	X	5 8 1 2 14 7	X	5 1 8 7 14 2	X	5 8 1 7 14 2	X
	5	角落	5 1 8 3 14 6	X	5     8     1       3     14       6	X	5     1     8       6     14     2       3     7     4	V	5     8     1       6     14       3	X
			5 2 7 3 14 6	X	5 7 2 3 14 6	X	5 2 7 6 14 3	X	5 7 2 6 14 3	X
	-	ı	ı		ı	17	ı		ı	

	放 置	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解
5	邊	1 6 7 5 14 3 8 2 4	V	1 7 6 5 14 8	X	3 4 7 5 14 6	X	3 7 4 5 14 6	X
	上	2 4 8 5 14 7	X	2 8 4 5 14 7	X				
6	角落	6 1 7 3 14 5	X	6 7 1 3 14 5	X	6 1 7 5 14 3	X	6 7 1 5 14 3	X
	邊上	1     5     8       6     14     2       7     3     4	V	1 8 5 6 14 7	X	3 4 7 6 14 5	X	3 7 4 6 14 2 5 1 8	V
		7 1 6 2 14 5	X	7 6 1 2 14 5	X	7 1 6 5 14 2	X	7 6 1 5 14 2	X
7	角落	7 1 6 3 14 4	X	7 6 1 3 14 5 4 2 8	V	7 1 6 4 14 3	X	7 6 1 4 14 3	X
,		7 2 5 3 14 4	X	7 5 2 3 14 4	X	7 2 5 4 14 3	X	7 5 2 4 14 3	X
	邊上	1 5 8 7 14 6	X	1 8 5 7 14 6	X	2 4 6 7 14 5	X	2 6 4 7 14 5	X

	放置	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解
7	邊上	3 5 6 7 14 4	X	3 6 5 7 14 1 4 2 8	V				
8	角落	8     1     5       2     14     6       4     7     3	V	8     5     1       2     14     6       4     3     7	V	8     1     5       4     14       2	X	8     5     1       4     14       2	X
	邊上	1 6 7 8 14 5	X	1 7 6 8 14 5	X	2 5 7 8 14 4	X	2 7 5 8 14 4	X
	角落	2 5 8 6 15 7	X	2 8 5 6 15 7	X	2 5 8 7 15 6	X	2 8 5 7 <b>15</b> 6	X
2	邊	5 3 7 2 15 8	X	5 7 3 2 15 8	X	5 4 6 2 15 8	X	5 6 4 2 15 8	X
	上	6     1     8       2     15     4       7     5     3	V	6 8 1 2 15 7	X	6 5 4 2 15 7	X	6 4 5 2 15 7	X
3	角落	3 4 8 5 <b>15</b> 1 7 2 6	V	3 8 4 5 15 7	X	3 4 8 7 15 5	X	3 8 4 7 15 5	X

	擺放方式		是否 為解	擺放方式	是否 擺放方式 為解		是否 為解	擺放方式	是否為解
3	邊	4 5 6 3 15 8	X	4 6 5 3 15 8	X	5 2 8 3 15 7	X	5 8 2 3 15 7	X
	上	5     6     4       3     15       7	X	5 4 6 3 15 7	X				
	角落	4     3     8       5     15       6	X	4 8 3 5 15 6	X	4 3 8 6 15 5	X	4 8 3 6 15 5	X
4	邊	3 5 7 4 15 2 8 1 6	V	3 7 5 4 15 8	X	5 2 8 4 15 6	X	5 8 2 4 15 6	X
	上	5 3 7 4 15 6	X	5 7 3 4 15 6	X				
		5 2 8 3 15 7	X	5 8 2 3 15 7	X	5 2 8 7 <b>15</b> 3	X	5 8 2 7 15 3	X
5	角落	5 2 8 4 15 6	X	5 8 2 4 15 6	X	5 2 8 6 15 4	X	5 8 2 6 15 4	X
		5 3 7 4 15 6	X	5 7 3 4 15 6	X	5 3 7 6 15 4	X	5 7 3 6 15 4	X

	擺放 擺放方式 位置		是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否為解	擺放方式	是否 為解
5	邊	2 6 7 5 <b>15</b> 8	X	2 7 6 5 <b>15</b> 8	X	4     3     8       5     15       6	X	4     8     3       5     15       6	X
	上	3 4 8 5 <b>15</b> 1 7 2 6	V	3 8 4 5 <b>15</b> 7	X				
		6 1 8 2 15 4 7 5 3	V	6 8 1 2 15 7	X	6 1 8 7 15 2	X	6 8 1 7 15 2	X
6	角落	6 4 5 2 15 7	X	6 5 4 2 15 7	X	6 4 5 7 <b>15</b> 2	X	6 5 4 7 15 2	X
O		6 4 5 1 15 8	X	6 5 4 1 15 8	X	6 4 5 8 15 1	X	6 5 4 8 15 1	X
	邊上	1 6 15 8	X	2 5 8 6 15 7	X	4     3     8       6     15       5	X	4 8 3 6 15 5	X
7	角落	7 2 6 3 15 5	X	7 6 2 3 15 5	X	7 2 6 5 <b>15</b> 1 3 4 8	V	7 6 2 5 15 3	X
,	邊上	2 5 8 7 15 6	Χ	2 8 5 7 <b>15</b> 6	Χ	3 4 8 7 15 5	Χ	3 8 4 7 15 5	X

擺位		擺放方式	是否為解	<b>擺</b> 放方式	是否為解	推放方式 加速	是否為解	擺放方式	是否為解
		8     1     6       2     15       5	X	8     6     1       2     15       5	X	8 1 6 5 <b>15</b> 2	X	8     6     1       5     15       2	X
	角落	8     3     4       2     15       5	X	8     4     3       2     15       5	X	8 3 4 5 <b>15</b> 2	X	8     4     3       5     15       2	X
8		8 3 4 1 <b>15</b> 6	X	8     4     3       1     15     5       6     2     7	V	8 3 4 6 <b>15</b> 1	X	8 4 3 6 <b>15</b> 1	X
	邊	1 8 15 6 2 7	X	1 8 15 6 7 2	X	1 8 15 6 4 5	X	1 8 15 6 5 4	X
	上	3 5 7 8 15 4	X	3 7 5 8 15 4	X	2 6 7 8 15 5	X	2 7 6 8 15 5	X

(三)由於 $S_{4\times4}$ 的情形較為複雜,以下就幾種情形進行分析討論:

#### 1.1、2、3、4擺放在角落

1	G	Н	2
F	c		A
Е	$S_4$	×4	В
4	D	С	3

①(i)  $S_{4\times4}$ =22,各數字的組合情形,如(表 5)

C D		C+D	А	В	A+B	G	Н	G+H
C	С Б	C+D	Е	F	E+F	J	П	U+Π
5	10	15	5	12	17	7	12	19
6	9	15	6	11	17	8	11	19
7	8	15	7	10	17	9	10	19
			8	9	17			

(表 5)

### (ii) $S_{4\times 4}$ =22 解的擺放情形:6 組解

解的擺放方式

1	7	12	2	1	7	12	2
6	9	22		8	2	2	6
11	2	,Z	9	9	2	,Z	11
4	5 10		3	4	5 10		3

8	11	2		
,	2	7		
	22			
6	9	3		
	0	22		

1	8	11	2
7		5	
10	2	22	12
4	6	9	3

1	9	10	2	1	9	10	2
6	22		5	5	7	22	
11	2	22		12	2	GZ.	11
4	7	8	3	4	7	8	3

# ②(i) $S_{4\times4}$ =24,各數字的組合情形,如(表 6)

C	D	C+D	А	В	A+B	G	Н	СтП
	D	C+D	Е	F	E+F	G	П	U+Π
5	12	17	7	12	19	9	12	21
6	11	17	8	11	19	10	11	21

С	D	C+D	А	В	A+B	G	Н	G+H
C	D	C+D	Е	F	E+F	G	П	U+N
7	10	17	9	10	19			
8	9	17						

(表6)

#### (ii) $S_{4\times4}$ =24 解的擺放情形:無

①若G和H選擇9、12,則A、B及E、F只有一組8、11可以選擇→無解

⑪若G和H選擇10、11,則A、B及E、F只有一組7、12可以選擇→無解

#### 故 $S_{4\times4}=24$ 無解的擺放情形

③(i)  $S_{4\times4}$ =26,各數字的組合情形,如(表 7)

С	D	C+D	A	В	A+B	G	П	СтН
C	D	C+D	Е	F	E+F	G	Н	U+Π
		19	X	X	21	11	12	23
			(=	表 7)				

(ii)  $S_{4\times4}$ =26 解的擺放情形:無

若G和H選擇11、12,則A、B及E、F無合適的數字可以選擇→無解

#### 故 $S_{4\times4}=26$ 無解的擺放情形

④(i)  $S_{4\times4}$ =28,各數字的組合情形,如(表 8)

C	D	C+D	А	В	A+B	G	Н	G+H
	D	C+D	Е	F	E+F	U	П	U+Π
9	12	21	11	12	23	X	X	25
10	11	21						

(表 8)

(ii)  $S_{4\times4}$ =28 解的擺放情形:無

G、H無合適的數字可以選擇→無解

#### 故 $S_{4\times4}=28$ 無解的擺放情形

⑤(i)  $S_{4\times4}$ =30,各數字的組合情形,如(表 9)

C	D	$C_{\perp}D$	А	В	A+B E+F	C	Н	G+H
C	D	C+D	Е	F	E+F	G	П	U+N
11	12	23	X	X	25	X	X	27
(表 9)								

(ii) S<sub>4×4</sub>=30 解的擺放情形:無

A、B、E、F及G、H 皆無合適的數字可以選擇→無解

#### 故 S<sub>4×4</sub>=30 無解的擺放情形

#### 2.5、6、7、8擺放在角落

5	G	6	
F	c		A
Е	$S_4$	×4	В
8	D	С	7

①(i)  $S_{4\times4}$ =22,各數字的組合情形,如(表 10)

С	D	C+D	A	В	A+B	G	П	G+H
	D	C+D	Е	F	E+F	U	11	U+II
3	4	7	X	X	9	1	10	11
						2	9	11

(表 10)

(ii)  $S_{4\times4}$ =22 解的擺放情形:無

A、B、E、F 皆無合適的數字可以選擇→無解

#### 故 S<sub>4×4</sub>=22 無解的擺放情形

②(i)  $S_{4\times4}$ =24,各數字的組合情形,如(表 11)

С	D	C+D	А	В	A+B	G	Н	G+H
C	D	C+D	Е	F	E+F	G	П	
X	X	9	1	10	11	1	12	13
			2	9	11	2	11	13
						3	10	13
						4	9	13

(表 11)

# (ii) $S_{4\times4}$ =24 解的擺放情形:無

C、D無合適的數字可以選擇→無解

# 故 S<sub>4×4</sub>=24 無解的擺放情形

③(i)  $S_{4\times4}$ =26,各數字的組合情形,如(表 12)

С	D	$C_{\perp}D$	А	В	A+B	G	Н	G+H
	D	C+D	Е	F	E+F	U	П	
1	10	11	1	12	13	3	12	15
2	9	11	2	11	13	4	11	15
			3	10	13			
			4	9	13			

(表 12)

(ii) $S_{4\times4}$ =26解的擺放情形:4組解

解的擺放方式

5	3	12	6	5	3
2	,	26	4	4	
11	2	20	9	9	
8	1	10	7	8	1

5	3	12	6	5	4	11	6
4	26		2	1	26		3
9		O	11	12	26		10
8	1	10	7	8	2	9	7

5	4	11	6	
3	<i>(</i>	1		
10	4	26		
8	2	9	7	

④(i)  $S_{4\times4}$ =28,各數字的組合情形,如(表 13)

С	D	C+D	А	В	A+B	G	Н	G+H
	D	C+D	Е	F	E+F	U	П	
1	12	13	4	11	15	X	X	17
2	11	13						
3	10	13						
4	9	13						

(表 13)

(ii)  $S_{4\times4}$ =28 解的擺放情形:無

G、H無合適的數字可以選擇→無解

#### 故 $S_{4\times4}=28$ 無解的擺放情形

⑤(i)  $S_{4\times4}$ =30,各數字的組合情形,如(表 14)

C	D	C+D	А	В	A+B	G	Н	G+H
	D	C+D	Е	F	E+F	G	П	U+Π
3	12	15	X	X	17	X	X	19
4	11	15						

(表 14)

(ii)  $S_{4\times4}$ =30 解的擺放情形:無

A、B、E、F及G、H皆無合適的數字可以選擇→無解

#### 故 $S_{4\times4}=30$ 無解的擺放情形

3.9、10、11、12 擺放在角落

9	G	10				
F	C		Α			
Е	$\mathcal{S}_4$	$S_{4\times4}$				
12	D	С	11			

①(i)  $S_{4\times4}$ =22,各數字的組合情形,如(表 15)

C	D	$C_{\perp}D$	А	В	A+B	$\mathbf{C}$	Н	G+H
C	D	C+D	Е	F	E+F	G	П	U+N
X	X	-1	X	X	1	1	2	3
		•	' (র	長 15)	·			

(ii)  $S_{4\times4}$ =22 解的擺放情形:無

A、B、E、F及C、D皆無合適的數字可以選擇→無解

#### 故 $S_{4\times4}=22$ 無解的擺放情形

②(i)  $S_{4\times4}$ =24,各數字的組合情形,如(表 16)

C	D	C+D	А	В	A+B	G	П	G+H
	D C-		Е	F	E+F	G	Н	U+Π
X	X	1	1	2	3	1	4	5
						2	3	5

(表 16)

(ii)  $S_{4\times4}$ =24 解的擺放情形:無

C、D無合適的數字可以選擇→無解

#### 故 $S_{4\times4}=24$ 無解的擺放情形

③(i)  $S_{4\times4}$ =26,各數字的組合情形,如(表 17)

C	D	C+D	А	В	A+B	G	Н	G+H
	D	C+D	Е	F	E+F	G	11	<u></u>
1	2	3	1	4	5	1	6	7
			2	3	5	2	5	7
						3	4	7

(表 17)

(ii)  $S_{4\times 4} = 26$  解的擺放情形:無

若  $C \cdot D$  選擇  $1 \cdot 2 \cdot \mathbb{N}$   $A \cdot B$  及  $E \cdot F$  就沒有合適的數字可以選擇  $\rightarrow$ 無解

④(i)  $S_{4\times4}$ =28,各數字的組合情形,如(表 18)

С	D	C+D	А	В	A+B	G	Н	G+H
	D	C+D	Е	F	E+F	U	Π	U+Π
1	4	5	1	6	7	1	8	9
2	3	5	2	5	7	2	7	9
			3	4	7	3	6	9
						4	5	9

(表 18)

#### (ii) $S_{4\times4}$ =28 解的擺放情形:無

- ①若  $C \times D$  選擇  $1 \times 4$  ,則  $A \times B$  或  $E \times F$  其中一組就沒有合適的數字可以選擇 $\rightarrow$ 無解
- ⑩若 C、D 選擇 2、3,則 A、B 或 E、F 其中一組就沒有合適的數字可以選擇→無解

#### 故 S<sub>4×4</sub>=28 無解的擺放情形

# ⑤(i) $S_{4\times4}$ =30,各數字的組合情形,如(表 19)

С	D	C+D	A	В	A+B	G	Н	G+H
C	D		Е	F	E+F	G	П	U+Π
1	6	7	1	8	9	3	8	11
2	5	7	2	7	9	4	7	11
3	4	7	3	6	9			
C	C D	C+D	A	В	A+B	C	TT	CHI
C			Е	F	E+F	G	Н	G+H
			4	5	9			

(表 19)

 $(ii)S_{4\times4}=30$ 解的擺放情形:4組解

解的擺放方式

9	3	8	10
2	2	4	
7	30		5
12	1	6	11

9	3	8	10
4	3	2	
5	)	7	
12	1	6	11

9	4	7	10
1	3	3	
8	3	6	
12	2	5	11

9	4	7	10
3	3	1	
6	3	8	
12	2	5	11

# 伍、研究結果

一、不同神秘方塊  $S_{n\times n}$  的上界與下界

$S_{3 imes3}$	$11.5 \le S_{3\times3} \le 15.5$
$S_{4 imes4}$	$22 \leq S_{4\times4} \leq 30$
$S_{n\times n}$	$\frac{4n^2 - 7n + 8}{8} \le S_{n \times n} \le \frac{4n^2 - 5n - 2}{8}$

二、不同神秘方塊解的個數(包含重複計算)

解的個數	擺放位置	1	2	3	4	5	6	7	8
$S_{3\times 3} = 12$		1	1	1	0	1	1	1	0
$S_{3\times 3} = 13$		2	2	2	2	4	1	2	2
$S_{3 \times 3} = 14$		2	2	2	2	2	2	2	2
$S_{3\times 3} = 15$		0	1	1	1	1	1	1	1
解的個數	擺放位置	1 . 2 .	3 • 4	5 . 6 .	7 . 8	9、	10、11	<b>.</b> 12	

解的個數	擺放位置	1 . 2 . 3 . 4	5 . 6 . 7 . 8	9 \ 10 \ 11 \ 12
$S_{4\times4}$ =22		6		
$S_{4\times4}$ =26			4	
$S_{4 \times 4} = 30$				4

.

### 陸、討論

- (一) 目前僅整理出 3×3 神秘方塊的完整解和 4×4 神秘方塊的部分解,尚未發現較有效 率的方式,能在短時間找到特定的神秘方塊所具的合適擺放方式。
- (二) 關於  $n \times n$  神秘方塊的相關性質,除了找出 $S_{n \times n}$ 的上下界之外,尚未有進一步的發現。

# 柒、結論

- (一) 找出 $S_{3\times3}$ 、 $S_{4\times4}$ 、 $S_{n\times n}$ 的上下界,縮小尋找相關訊息的範圍。
- (二) 找出 3×3 神秘方塊的完整解和 4×4 神秘方塊的部分解。
- (三) 關於古戈爾博士的提問「把數字 1、2、3、4 擺在方形的四個角,接下來設法把 5、6、7、8、9、10、11、12 等 8 個數字沿著方形問圍擺放,讓每邊的數字總和都 相同,能找到幾種滿足上面敘述的解法?」一題,透過整理出的部分解,目前找到 14 種解法,更多的解法,待日後繼續探討與研究。

### 捌、參考資料及其他

### 一、參考資料

1.柯利弗德·皮寇弗(2003) • 神秘方塊,載於數字的異想世界(33-34 頁) • 臺北市:商周出版社