

屏東縣第 60 屆國中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：「直」搗黃龍
— 足球射門位置及角度之分析

關鍵詞：圓周角、圓的切割線性質、三角函數（最多三個）

編號：

目錄

內容	頁次
摘要-----	2
壹、研究動機-----	2
貳、研究目的-----	3
參、研究設備及器材-----	3
肆、研究限制及假設-----	3
伍、研究過程及方法-----	4
陸、研究結果及討論-----	13
柒、研究建議-----	16
捌、參考資料-----	17
玖、附錄-----	18

圖目錄

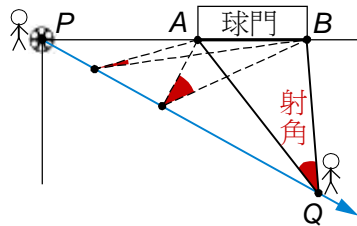
內容	頁次
圖（一）：課本題目參考圖 1-----	2
圖（二）：課本題目參考圖 2-----	2
圖（三）：足球場地圖-----	2
圖（四）：足球前場標示圖-----	3
圖（五）：射門區域劃分圖-----	4
圖（六）：圓周角、圓外角及切線圖-----	6
圖（七）：角球接球最佳射門位置軌跡圖-----	6
圖（八）：相同射門角度位置軌跡圖-----	8
圖（九）：前場上、中、下區域圖-----	8
圖（十）：上、下區域最佳射門位置軌跡圖-----	10
圖（十一）：中區域最佳射門位置軌跡圖-----	10
圖（十二）：最佳射門與得分區域疊合圖-----	13

摘要

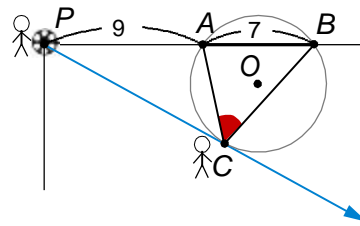
本研究是針對在足球場上，射門位置及角度來進行分析及討論。在位置方面，主要是將前場分成角球射門及場地射門，在角球射門則是在球門線兩邊角球區踢角球後，分析最佳的接球後射門位置及射門角度，並探討角球夾角與射門夾角之間的關係及哪些接球後的位置有相同的射門角度；在場地射門則是將場地分成三個區域，分析其最佳射門位置及射門角度。最後，結合文獻中的最佳得分區域，利用實際數據計算出最佳射門位置及射門角度。

壹、研究動機

當數學課學習圓的性質時，在課本該章節最後的文化櫥窗提到了一個延伸的題目，題目問到：若 \overrightarrow{PQ} 為傳球路線，要站在哪裡才有最大的射角？如圖（一）所示；接著繼續問到：若球門寬 $\overline{AB} = 7$ 公尺，學長站在邊線上 P 點離球門距離 $\overline{PA} = 9$ 公尺，學長從 P 點傳球給卡卡，試問卡卡要離 P 點多遠射門會有最大射角呢？如圖（二）所示。



圖（一）：課本題目參考圖 1



圖（二）：課本題目參考圖 2

因此，上述的題目便引發我們的興趣，想要研究在足球比賽時，要如何才能夠更有機會射門成功，且題目中同時也提到位置及射門角度，所以我們便將主題鎖定在位置及射門角度來進行研究。一般我們見到的足球比賽場地，如圖（三）所示。



圖（三）：足球場地圖

貳、研究目的

本研究主要探討的問題如下：

- 一、球員踢角球時，隊友接球的最佳射門位置為何？
- 二、踢角球夾角 (α) 與射門夾角 (β) 之間的關係為何？
- 三、場上哪些位置有相同的射門角度？
- 四、場上不同區域中，球員的最佳射門位置為何？
- 五、場上最佳得分區域中，球員的最佳射門位置及其角度為何？

參、研究設備及器材

紙、筆、計算機、電腦 (含軟體：Word、Excel、GeoGebra)。

肆、研究限制及假設

一、研究限制

- (一) 本研究僅針對場地中射門位置及角度來進行相關討論，對於球員間的生理、心理、技術層面以及場地狀況、比賽用球、戰術等各項因素皆不列入考慮範圍。
- (二) 本研究僅限於二維空間 (由 X 軸和 Y 軸所組成的平面空間) 的討論。
- (三) 本研究中所指射門行進路線僅限於直線方向，不考慮拋物線、香蕉球、抽射、吊射等射門行進路線。

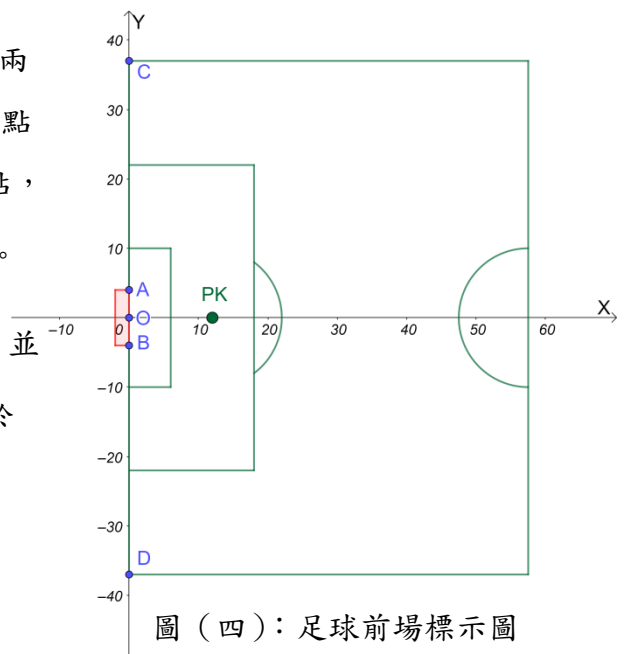
二、研究假設

- (一) 足球場地的各項標示如圖 (四) 所示， A 、 B 兩點表示球門兩球柱， C 、 D 兩點是球門線兩端點踢角球的位置 (角球區)， PK 是 12 碼罰球點，並假設 $\overline{AB} = d$ (碼)， $\overline{AC} = \overline{BD} = w$ (碼)。

- (二) 將該場地座標化，令 \overleftrightarrow{CD} (球門線) 為 y 軸，並作 \overline{AB} (球門) 的中垂線為 x 軸，且兩軸交於 O 點，則各點座標分別為：

$$O(0,0)、A(0,\frac{d}{2})、B(0,-\frac{d}{2})、C(0,w+\frac{d}{2})、$$

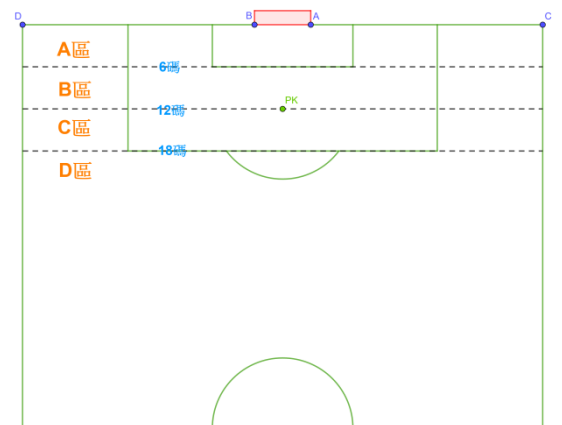
$$D(0, -(w+\frac{d}{2}))、PK(0,12)。$$



伍、研究過程及方法

一、文獻探討

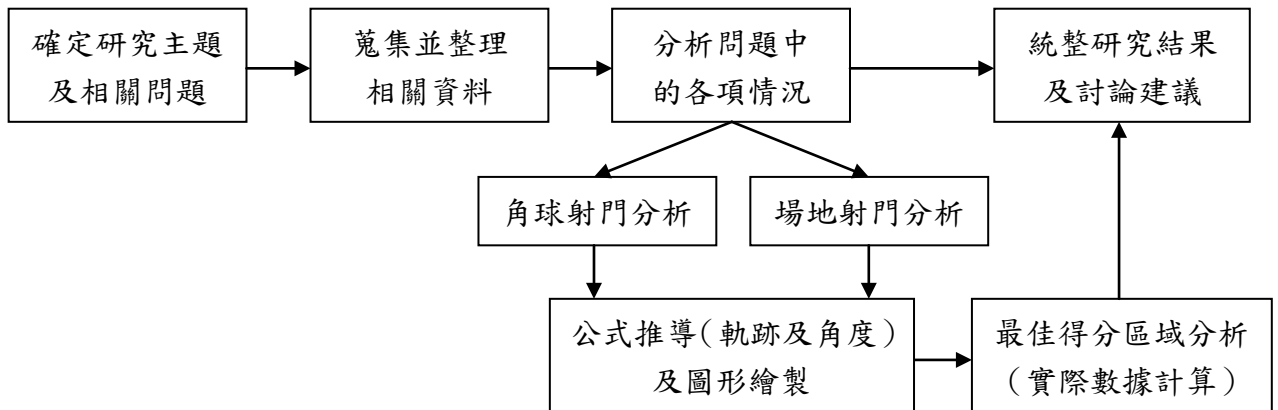
- (一) 足球場地必須是長方形，長與寬具體是多少沒有嚴格的要求，但有一個取值範圍，普通比賽場地：90 公尺（100 碼） \leq 長 \leq 120 公尺（130 碼）、45 公尺（50 碼） \leq 寬 \leq 90 公尺（100 碼）；國際比賽場地：100 公尺（110 碼） \leq 長 \leq 110 公尺（120 碼）、64 公尺（70 碼） \leq 寬 \leq 75 公尺（80 碼）。其中，球門的長度為 7.32 公尺（8 碼），高為 2.44 公尺（8 英尺）；球門區（俗稱小禁區）：長 18.32 公尺、寬 5.5 公尺（6 碼），在底線距離球門柱 5.5 公尺；罰球區（俗稱大禁區），長 40.32 公尺、寬 16.5 公尺（18 碼），在底線距離球門柱 16.5 公尺，罰球點距離球門線的距離是約 11 公尺（12 碼）。而國際足球總會世界盃（*FIFA World Cup*）的比賽場地大小是固定值：105 公尺（約 115 碼） \times 68 公尺（約 74 碼）=7140 平方公尺。
- (二) 翟寅飛、王家力、陳芳（2007）在「2006 年德國世界盃足球賽決賽階段進球情況分析」中指出，直接射門為進球最主要的方式（佔 35.04%），其次則為調整射門（佔 33.33%）；而就進球的進攻形勢而言，定位球為進球的主要形式，其次則依序為中路進攻、邊路進攻；而發動進攻的位置方面，主要為從中場（53.74%）與前場（41.50%）發動的進攻。
- (三) 梁勇能（2001）在「足球員的抉擇」中指出，球員踢角球時，其他隊友在接球後的最佳射門位置與過球門兩球柱所形成的圓大小有關，圓越大，則接球後射門的角度越小，也就是說入射角和最佳射門角度是成反比，且 $0^\circ < \text{射門的角度} < 180^\circ$ 。
- (四) 根據蔡輝炯、盧美麗（2004）「世界盃足球賽得分與射門區域之探討：以 1999、1998、2002 年三屆為例」；林美智、趙榮瑞（2007）「2006 年德國世界盃足球賽攻擊得分之分析」；陳振隆（2008）「世界盃足球賽射門技術之研究—以 2002~2006 為例—」；黃文祥（2008）「足球致勝秘笈」，綜合國內相關學者研究發現，若將半場分成四個區域及 12 碼罰球點（PK），則球門前至罰球點間（球門前 6 碼至 12 碼）與兩邊邊線所圍成的長方形區域（B 區）為射球進門的最佳得分區域，如圖（五）所示。



圖（五）：射門區域劃分圖

二、研究方法

(一) 研究流程：



(二) 研究過程：

1. 角球射門分析：

當球員踢角球時，其他隊友要在哪些位置接球，才會有最佳的射門位置，亦即要讓射門的角度 (β) 最大。

- (1) 在 C 點踢角球時，若角球直線行進的路線（直線 L ）與球門線（俗稱底線，即足球場的較短邊）的夾角 α 固定的條件下，假設 P 點是角球直線行進路線上最佳的射門位置，將 A 、 B 、 P 三點連接成一個三角形，並作 $\triangle ABP$ 的外接圓，則 $\angle APB$ 為 $\triangle ABP$ 外接圓的圓周角；另取 P_0 點為角球直線行進路線上異於 P 點的點，則 $\angle AP_0B$ 為 $\triangle ABP$ 外接圓的圓外角，如圖（六）所示，即：

$$\angle APB = \frac{1}{2} \widehat{AB} > \angle AP_0B = \frac{1}{2} (\widehat{AB} - \widehat{RS}) \Rightarrow \angle APB = \beta > \angle AP_0B$$

因此，在 α 固定的條件下， P 點必為此角球直線行進路線上最佳的射門位置，即 $\angle APB = \beta$ 為直線 L 上的最大射門角度。

- (2) 因 P 點在 $\triangle ABP$ 外接圓的圓周上，所以直線 L 即為此圓的切線，因此，根據圓的切割線性質：

$$\begin{aligned} \because \triangle ACP \sim \triangle PCB, \therefore \overline{AC} : \overline{CP} &= \overline{CP} : \overline{BC} \Rightarrow \overline{CP}^2 = \overline{AC} \times \overline{BC} \\ \Rightarrow \overline{CP} &= \sqrt{\overline{AC} \times \overline{BC}} = \sqrt{w(w+d)} \end{aligned}$$

- (3) 根據上述 (1)、(2) 的分析，若在 C 點踢角球時，在不同 α 的情況下，想要在角球直線行進的路線上（直線 L ）找到最佳的射門位置（ P 點），則直線 L 必為 $\triangle ABP$ 外接圓的切線，因此，所求得 \overline{CP} 的長度皆為 $\sqrt{w(w+d)}$ 。所以，在不同 α 的情況下 $(0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$ ，接球後的最佳射門位置即為：以 C 點為圓

心， $\sqrt{w(w+d)}$ 為半徑畫圓所形成的軌跡，如圖（七）所示。若 P 點的座標為 $P(x,y)$ ，則此軌跡方程式為：

$$\overline{CP} = \text{半徑} \Rightarrow \overline{CP}^2 = (\sqrt{w(w+d)})^2 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-(w+\frac{d}{2}))^2 = (\sqrt{w(w+d)})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + (y-(w+\frac{d}{2}))^2 = w(w+d)$$

$$(0 \leq x \leq \sqrt{w(w+d)}, (w+\frac{d}{2}) - \sqrt{w(w+d)} \leq y \leq w+\frac{d}{2})$$

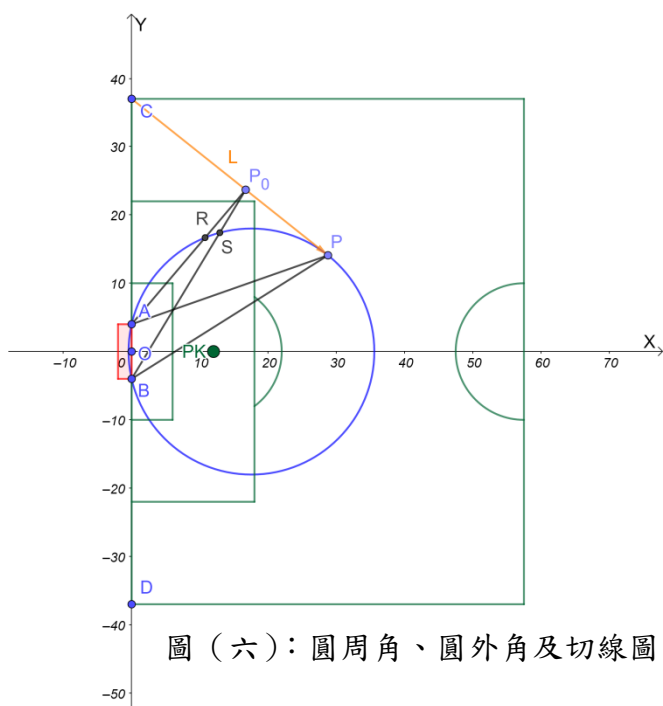
同理，若在 D 點踢角球時，以 D 點為圓心， $\overline{DP} = \sqrt{\overline{BD} \times \overline{AD}} = \sqrt{w(w+d)}$

為半徑畫圓所形成的軌跡，則此軌跡方程式為：

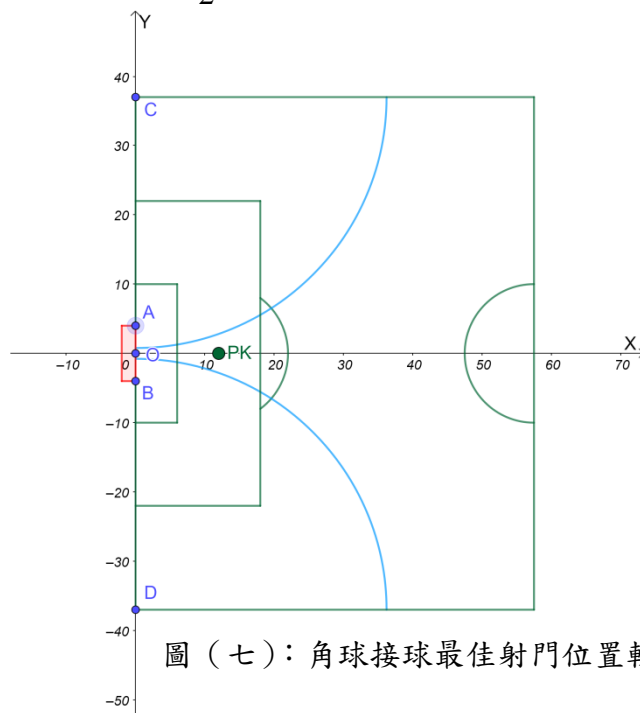
$$\overline{DP} = \text{半徑} \Rightarrow \overline{DP}^2 = (\sqrt{w(w+d)})^2 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-(-(w+\frac{d}{2})))^2 = w(w+d)$$

$$\Rightarrow x^2 + (y+(w+\frac{d}{2}))^2 = w(w+d)$$

$$(0 \leq x \leq \sqrt{w(w+d)}, -(w+\frac{d}{2}) \leq y \leq -((w+\frac{d}{2}) - \sqrt{w(w+d)}))$$



圖（六）：圓周角、圓外角及切線圖



圖（七）：角球接球最佳射門位置軌跡圖

(4) α 與 β 之間的轉換關係：

利用餘弦定理可知：

在 $\triangle ACP$ 中，

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CP}^2 - 2\overline{AC}\overline{CP}\cos\alpha} = \sqrt{w^2 + w(w+d) - 2w\sqrt{w(w+d)}\cos\alpha}$$

在 $\triangle BCP$ 中，

$$\overline{BP} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CP}^2 - 2 \overline{BC} \overline{CP} \cos \alpha} = \sqrt{(w+d)^2 + w(w+d) - 2(w+d)\sqrt{w(w+d)}\cos \alpha}$$

$$\text{令 } M = 2\sqrt{w(w+d)}, N = 2w+d$$

$$\text{且 } N^2 - M^2 = (2w+d)^2 - (2\sqrt{w(w+d)})^2 = 4w^2 + 4wd + d^2 - 4w^2 - 4wd = d^2$$

$$\text{則 } \overline{AP}^2 = (\sqrt{w^2 + w(w+d) - 2w\sqrt{w(w+d)}\cos \alpha})^2$$

$$= w^2 + w^2 + wd - 2w\sqrt{w(w+d)}\cos \alpha = 2w^2 + wd - 2w\sqrt{w(w+d)}\cos \alpha$$

$$= w(2w+d) - 2w\sqrt{w(w+d)}\cos \alpha = wN - wM\cos \alpha = w(N - M\cos \alpha)$$

$$\overline{BP}^2 = (\sqrt{(w+d)^2 + w(w+d) - 2(w+d)\sqrt{w(w+d)}\cos \alpha})^2$$

$$= (w+d)^2 + w(w+d) - 2(w+d)\sqrt{w(w+d)}\cos \alpha$$

$$= (w+d)(w+d+w-2\sqrt{w(w+d)}\cos \alpha)$$

$$= (w+d)(2w+d-2\sqrt{w(w+d)}\cos \alpha) = (w+d)(M - N\cos \alpha)$$

$$2 \overline{AP} \overline{BP} = 2\sqrt{w(N - M\cos \alpha)}\sqrt{(w+d)(N - M\cos \alpha)}$$

$$= 2\sqrt{w(N - M\cos \alpha)(w+d)(N - M\cos \alpha)} = 2\sqrt{w(w+d)(N - M\cos \alpha)^2}$$

$$= 2(N - M\cos \alpha)\sqrt{w(w+d)} = M(N - M\cos \alpha)$$

$$\therefore \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 - \overline{AB}^2 = w(N - M\cos \alpha) + (w+d)(N - M\cos \alpha) - d^2$$

$$= (N - M\cos \alpha)(2w+d) - d^2 = N(N - M\cos \alpha) - d^2$$

$$= N(N - M\cos \alpha) - (N^2 - M^2) = N^2 - MN\cos \alpha - N^2 + M^2$$

$$= M^2 - MN\cos \alpha = M(M - N\cos \alpha)$$

因此，在 $\triangle ABP$ 中，

$$\cos \beta = \frac{\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 - \overline{AB}^2}{2 \overline{AP} \overline{BP}} = \frac{M(M - N\cos \alpha)}{M(N - M\cos \alpha)} = \frac{M - N\cos \alpha}{N - M\cos \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{N\cos \beta - M}{M\cos \beta - N}$$

(5) 接球後相同射門角度的位置軌跡：

球員在踢角球時，為因應對方球員防守情況下，在無法將球踢至最佳的射門位置時，如何去選擇將球踢至有相同射門角度的不同位置，以達到讓隊友射門的其它選擇。根據弦心距性質，若將 \overline{AB} （球門）視為圓上的一弦，則 \overline{AB} 的中垂線必會通過此圓的圓心。因此，在此中垂線（ x 軸）上任取一點 O_m 作為圓心，以 $\overline{O_m A}$ （ $= \overline{O_m B}$ ）作為半徑畫圓 O_m （ $m=1, 2, 3, \dots$ ），在圓 O_m 上任取一點 P_{mn} （ $n=1, 2, 3, \dots$ ），則 $\angle AP_{mn}B$ 為圓 O_m 的圓周角，即以 \overline{AB}

為弦的圓 O_m 上，在圓周上任何一點的接球射門位置，皆有相同的射門角度，
如圖（八）所示：

$$\angle AP_{11}B = \angle AP_{12}B = \angle AP_{13}B = \dots = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

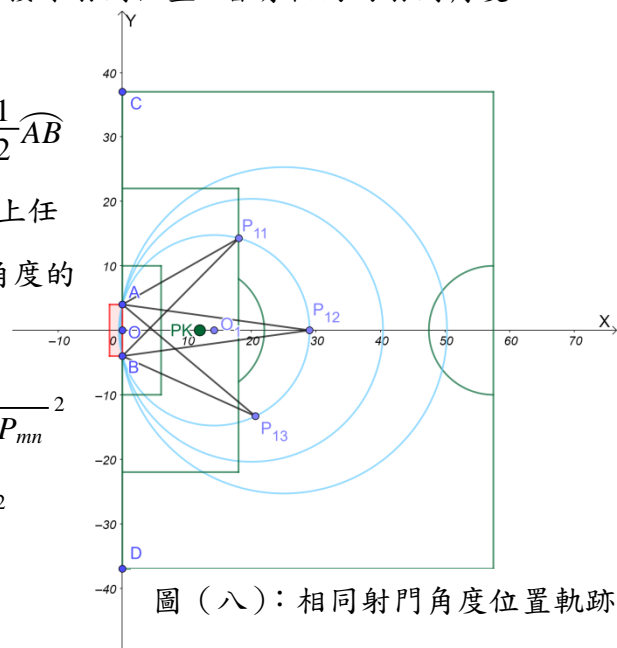
若圓 O_m 的圓心座標為 $O_m(h,0)$ ，圓周上任
一點座標為 $P_{mn}(x,y)$ ，則其相同射門角度的
位置軌跡方程式為：

$$\overline{O_mA} = \overline{O_mP_{mn}} = \text{半徑} \Rightarrow \overline{O_mA}^2 = \overline{O_mP_{mn}}^2$$

$$\Rightarrow (0-h)^2 + \left(\frac{d}{2}-0\right)^2 = (x-h)^2 + (y-0)^2$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 + y^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\left(0 \leq x \leq h + \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}, -\left(h + \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right) \leq y \leq h + \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right)$$



2. 場地射門分析：

根據文獻研究，就進攻形勢而言，定位球為
進球的主要形式，其次則依序為中路進攻、
邊路進攻；而發動進攻的位置主要為從中場
與前場（對方的後場）發動的進攻，因此，

在場地射門分析以半場為主，利用 $y = \frac{d}{2}$ 、

$y = -\frac{d}{2}$ 兩直線（過球門兩球柱作兩直線平行

x 軸），將場地分成三個區域（上、中、下），

從中路進攻、邊路進攻的形式來進行分析，

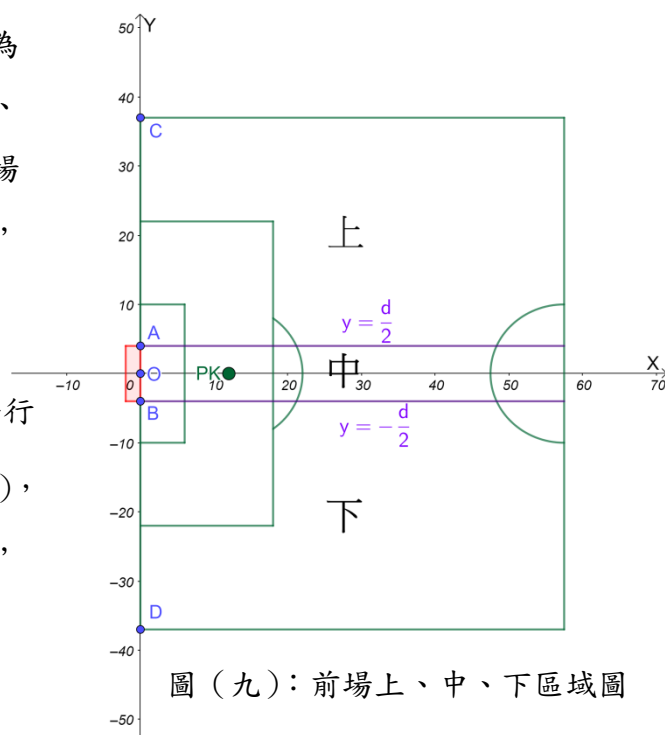
如圖（九）所示。

(1) 上區域（直線 $y = \frac{d}{2}$ 的上方區域）：

若球員在此區域內沿著平行 x 軸帶球推進至點 $P(x,y)$ ，過 P 點作 $\overline{EF} \parallel x$ 軸，

且交球門線於 E 點（ $E(x,0)$ ）、交中線於 F 點，連接 \overline{AP} 、 \overline{BP} ：

$$\therefore \angle APB = \angle EPB - \angle EPA$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \tan \angle APB &= \tan(\angle EPB - \angle EPA) = \frac{\tan \angle EPB - \tan \angle EPA}{1 + \tan \angle EPB \times \tan \angle EPA} \\ &= \frac{\frac{\overline{BE}}{x} - \frac{\overline{AE}}{x}}{1 + \frac{\overline{BE}}{x} \times \frac{\overline{AE}}{x}} = \frac{\overline{BE} - \overline{AE}}{x + \frac{\overline{BE} \overline{AE}}{x}} = \frac{\overline{AB}}{x + \frac{\overline{BE} \overline{AE}}{x}} \end{aligned}$$

根據算幾不等式（算術平均數(A.P.) ≥ 幾何平均數(G.P.)）：

$$\begin{aligned} \frac{x + \frac{\overline{BE} \overline{AE}}{x}}{2} &\geq \sqrt{x \times \frac{\overline{BE} \overline{AE}}{x}} = \sqrt{\overline{BE} \overline{AE}} \Rightarrow x + \frac{\overline{BE} \overline{AE}}{x} \geq 2\sqrt{\overline{BE} \overline{AE}} \\ \Rightarrow \tan \angle APB &= \frac{\overline{AB}}{x + \frac{\overline{BE} \overline{AE}}{x}} \leq \frac{\overline{AB}}{2\sqrt{\overline{BE} \overline{AE}}} \end{aligned}$$

又 $0^\circ \leq \angle APB < 90^\circ$ ，

$$\therefore \text{當等號成立時：} x = \frac{\overline{BE} \overline{AE}}{x} \Rightarrow x^2 = \overline{BE} \overline{AE} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\overline{BE} \overline{AE}} \quad (\text{取正值})$$

則 $\tan \angle APB$ 有最大值 $\Rightarrow \angle APB$ 有最大值，即 P 點是最佳的射門位置。

因此，在沿著平行 x 軸的最佳射門位置 $P(x,y)$ 的軌跡方程式（在每一條固定 y 值的直線上找出最佳的 x 值）為：

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\overline{BE} \overline{AE}} = \sqrt{(y - (-\frac{d}{2}))(y - \frac{d}{2})} = \sqrt{(y + \frac{d}{2})(y - \frac{d}{2})} = \sqrt{y^2 - (\frac{d}{2})^2} \\ \Rightarrow x^2 &= y^2 - (\frac{d}{2})^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = -(\frac{d}{2})^2 \quad (x \geq 0, \frac{d}{2} < y \leq \frac{d}{2} + w), \end{aligned}$$

如圖（十）所示。

(2) 下區域（直線 $y = -\frac{d}{2}$ 的下方區域）：

同上述（1）的分析結果，沿著平行 x 軸的最佳射門位置 $P(x,y)$ 的軌跡方程式（在每一條固定 y 值的直線上找出最佳的 x 值）為：

$$x^2 - y^2 = -(\frac{d}{2})^2 \quad (x \geq 0, -(\frac{d}{2} + w) \leq y < -\frac{d}{2}),$$

如圖（十）所示。

(3) 中區域（介於直線 $y = \frac{d}{2}$ 及 $y = -\frac{d}{2}$ 的中間區域）：

若球員在此區域內沿著平行 x 軸帶球推進，則越靠近球門射門角度越大，但

若沿著平行 y 軸帶球移至點 $P(x,y)$ ，連接 \overline{AP} 、 \overline{BP} ：

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\overline{AP} + \overline{BP}}{2} &\geq \sqrt{\overline{AP} \overline{BP}} \Rightarrow \overline{AP} + \overline{BP} \geq 2\sqrt{\overline{AP} \overline{BP}} \\ \Rightarrow (\overline{AP} + \overline{BP})^2 &\geq (2\sqrt{\overline{AP} \overline{BP}})^2 \Rightarrow \overline{AP}^2 + 2\overline{AP} \overline{BP} + \overline{BP}^2 \geq 4\overline{AP} \overline{BP} \\ \Rightarrow \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &\geq 2\overline{AP} \overline{BP} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{則 } \cos \angle APB &= \frac{\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{AP} \overline{BP}} \geq \frac{2\overline{AP} \overline{BP} - \overline{AB}^2}{2\overline{AP} \overline{BP}} = 1 - \frac{\overline{AB}^2}{2\overline{AP} \overline{BP}} \\ &= 1 - \frac{d^2}{2\overline{AP} \overline{BP}} \end{aligned}$$

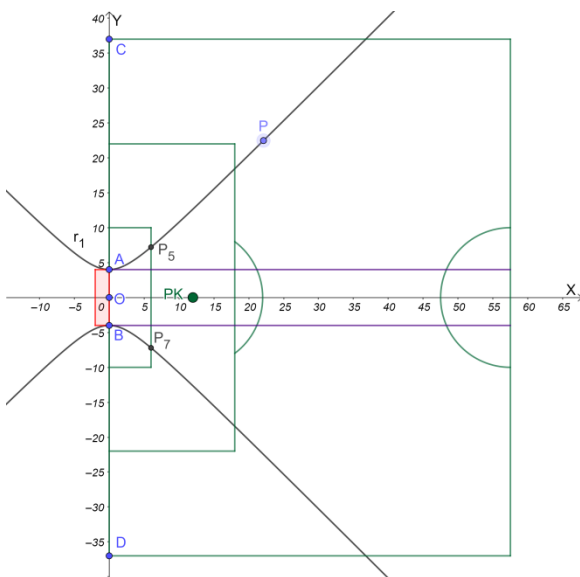
又 $0^\circ < \angle APB \leq 180^\circ$ ，

$$\therefore \text{當等號成立時：} \overline{AP} = \overline{BP} \Rightarrow \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

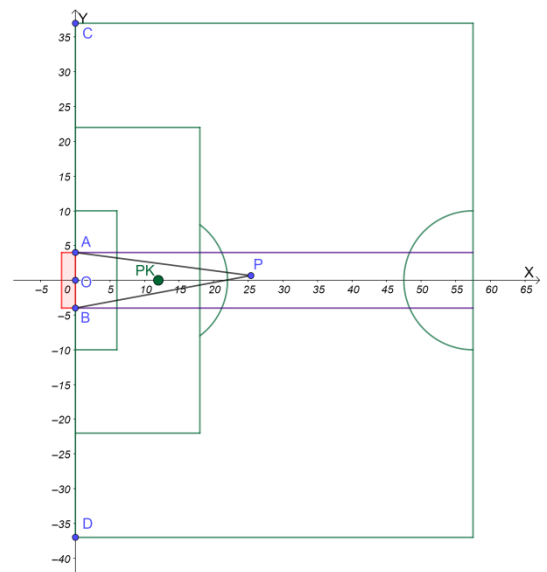
$$\begin{aligned} \Rightarrow (x-0)^2 + (y-\frac{d}{2})^2 &= (x-0)^2 + (y-(-\frac{d}{2}))^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2 \times y \times \frac{d}{2} + (\frac{d}{2})^2 &= x^2 + y^2 + 2 \times y \times \frac{d}{2} + (\frac{d}{2})^2 \\ \Rightarrow 2yd = 0 \quad (\because d \neq 0) &\Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

則 $\cos \angle APB$ 有最小值 $\Rightarrow \angle APB$ 有最大值，即 P 點是最佳的射門位置。

因此，在沿著平行 y 軸的最佳射門位置 $P(x,y)$ 的軌跡方程式（在每一條固定 x 值的直線上找出最佳的 y 值）為： $y=0$ ($x \geq 0$)，如圖（十一）所示。



圖（十）：上、下區域最佳射門位置軌跡圖



圖（十一）：中區域最佳射門位置軌跡圖

3.最佳得分區域分析

根據文獻研究，球門前至罰球點間（球門前 6 碼至 12 碼）與兩邊邊線所圍成的長方形區域為射球入門的最佳得分區域。現將國際足球總會世界盃(FIFA World Cup)比賽場地規格的各項數據($\overline{CD} = 74$ 碼、 $\overline{AB} = d = 8$ 碼、 $\overline{AC} = \overline{BD} = w = 33$ 碼)，代入上述分析，並計算角球射門及場地射門，其最佳射門位置的軌跡與最佳得分區域之間的疊合部分，如圖（十二）所示：

(1) 角球射門軌跡與最佳得分區域的疊合部分

① 以 C 點為踢角球點：

$$\text{將 } x=6 \text{ (碼) 代入軌跡方程式：} x^2 + (y - (w + \frac{d}{2}))^2 = w(w + d)$$

$$\Rightarrow 6^2 + (y - (33 + \frac{8}{2}))^2 = 33(33 + 8)$$

$$\Rightarrow y \doteq 0.71 \quad (0 \leq x \leq 36.78, 0.22 \leq y \leq 37) \Rightarrow P_1(6, 0.71)$$

$$\text{將 } x=12 \text{ (碼) 代入軌跡方程式：} x^2 + (y - (w + \frac{d}{2}))^2 = w(w + d)$$

$$\Rightarrow 12^2 + (y - (33 + \frac{8}{2}))^2 = 33(33 + 8)$$

$$\Rightarrow y \doteq 2.23 \quad (0 \leq x \leq 36.78, 0.22 \leq y \leq 37) \Rightarrow P_2(12, 2.23)$$

∴ 以 C 點為踢角球點，結合最佳得分區域，則 $P_1(6, 0.71) \sim P_2(12, 2.23)$ 之間的軌跡為最佳射門得分位置。

② 以 D 點為踢角球點：

$$\text{將 } x=6 \text{ (碼) 代入軌跡方程式：} x^2 + (y + (w + \frac{d}{2}))^2 = w(w + d)$$

$$\Rightarrow 6^2 + (y + (33 + \frac{8}{2}))^2 = 33(33 + 8)$$

$$\Rightarrow y \doteq -0.71 \quad (0 \leq x \leq 36.78, -37 \leq y \leq -0.22) \Rightarrow P_3(6, -0.71)$$

$$\text{將 } x=12 \text{ (碼) 代入軌跡方程式：} x^2 + (y + (w + \frac{d}{2}))^2 = w(w + d)$$

$$\Rightarrow 12^2 + (y + (33 + \frac{8}{2}))^2 = 33(33 + 8)$$

$$\Rightarrow y \doteq -2.23 \quad (0 \leq x \leq 36.78, -37 \leq y \leq -0.22) \Rightarrow P_4(12, -2.23)$$

∴ 以 D 點為踢角球點，結合最佳得分區域，則 $P_3(6, -0.71) \sim P_4(12, -2.23)$ 之間的軌跡為最佳得分位置。

(2) 場地射門軌跡與最佳得分區域的疊合部分

① 上區域 (直線 $y = \frac{d}{2}$ 的上方區域):

$$\text{將 } x=6 \text{ (碼) 代入軌跡方程式: } \frac{y^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{\left(\frac{8}{2}\right)^2} - \frac{6^2}{\left(\frac{8}{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow y \doteq 7.21 \quad (x \geq 0, 4 < y \leq 37) \Rightarrow P_5(6, 7.21)$$

$$\text{將 } x=12 \text{ (碼) 代入軌跡方程式: } \frac{y^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{\left(\frac{8}{2}\right)^2} - \frac{12^2}{\left(\frac{8}{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow y \doteq 12.65 \quad (x \geq 0, 4 < y \leq 37) \Rightarrow P_6(12, 12.65)$$

∴ 在上區域的最佳射門軌跡，結合最佳得分區域，則 $P_5(6, 7.21)$

~ $P_6(12, 12.65)$ 之間的軌跡為最佳得分位置。

② 下區域 (直線 $y = -\frac{d}{2}$ 的下方區域):

$$\text{將 } x=6 \text{ (碼) 代入軌跡方程式: } \frac{y^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{\left(\frac{8}{2}\right)^2} - \frac{6^2}{\left(\frac{8}{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow y \doteq -7.21 \quad (x \geq 0, -37 \leq y < -4) \Rightarrow P_7(6, -7.21)$$

$$\text{將 } x=12 \text{ (碼) 代入軌跡方程式: } \frac{y^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{\left(\frac{8}{2}\right)^2} - \frac{12^2}{\left(\frac{8}{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow y \doteq -12.65 \quad (x \geq 0, -37 \leq y < -4) \Rightarrow P_8(12, -12.65)$$

∴ 在下區域的最佳射門軌跡，結合最佳得分區域，則 $P_7(6, -7.21) \sim P_8(12,$

$-12.65)$ 之間的軌跡為最佳得分位置。

③ 中區域 (介於直線 $y = \frac{d}{2}$ 及 $y = -\frac{d}{2}$ 的中間區域):

$$\text{將 } x=6 \text{ (碼) 代入軌跡方程式: } y=0 \quad (x \geq 0) \Rightarrow P_9(6, 0)$$

$$\text{將 } x=12 \text{ (碼) 代入軌跡方程式: } y=0 \quad (x \geq 0) \Rightarrow P_{10}(12, 0)$$

∴ 在中區域的最佳射門軌跡，結合最佳得分區域，則 $P_9(6, 0) \sim P_{10}(12, 0)$ 之

間的軌跡為最佳得分位置。

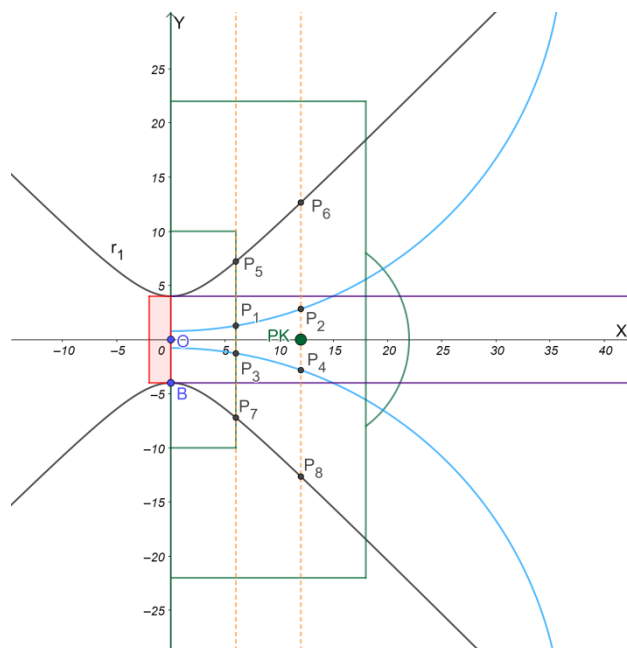


圖 (十二)：最佳射門與得分區域疊合圖

陸、研究結果及討論

本研究所得的結果及討論如下：

一、角球射門分析

(一) 當球員踢角球時，其他隊友在接球後的最佳射門位置 $P(x,y)$ ，即是以球門線兩端點

$C(0, w + \frac{d}{2})$ 、 $D(0, -(w + \frac{d}{2}))$ 為圓心， $\sqrt{w(w+d)}$ 為半徑畫圓所形成的軌跡，其方程式

如下：

1. 以 C 點為踢角球點： $x^2 + (y - (w + \frac{d}{2}))^2 = w(w+d) \Rightarrow$ 圓方程式圖形的 $\frac{1}{4}$ 部分

$$(0 \leq x \leq \sqrt{w(w+d)}, (w + \frac{d}{2}) - \sqrt{w(w+d)} \leq y \leq w + \frac{d}{2})$$

2. 以 D 點為踢角球點： $x^2 + (y + (w + \frac{d}{2}))^2 = w(w+d) \Rightarrow$ 圓方程式圖形的 $\frac{1}{4}$ 部分

$$(0 \leq x \leq \sqrt{w(w+d)}, -(w + \frac{d}{2}) \leq y \leq -((w + \frac{d}{2}) - \sqrt{w(w+d)}))$$

(二) 踢角球時，直線行進的路線與球門線的夾角 α ，與接球後射門的角度 β ，其兩者間

的轉換關係為： $\cos\beta = \frac{M - N\cos\alpha}{N - M\cos\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{N\cos\beta - M}{M\cos\beta - N}$

(其中： $M = 2\sqrt{w(w+d)}$ ， $N = 2w+d$)

(三) 當球員踢角球時，不同位置 $O_{mn}(x,y)$ 的隊友在接球後若有相同的射門角度，則不同

位置所形成的軌跡是以 $O_m(h,0)$ 為圓心、 $\overline{O_mA}$ 為半徑畫圓，其方程式如下：

$$(x-h)^2 + y^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{圓方程式圖形的一部分}$$

$$\left(0 \leq x \leq h + \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}, -\left(h + \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right) \leq y \leq h + \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right)$$

二、場地射門分析

(一) 在上區域 (直線 $y = \frac{d}{2}$ 的上方區域) 內，最佳射門位置 $P(x,y)$ 的軌跡方程式 (在每一條固定 y 值的直線上找出最佳的 x 值) 為：

$$x^2 - y^2 = -\left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{y^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow \text{等軸雙曲線方程式圖形的一部分}$$

$$\left(x \geq 0, \frac{d}{2} < y \leq \frac{d}{2} + w\right)$$

(二) 在下區域 (直線 $y = -\frac{d}{2}$ 的下方區域) 內，最佳射門位置 $P(x,y)$ 的軌跡方程式 (在每一條固定 y 值的直線上找出最佳的 x 值) 為：

$$x^2 - y^2 = -\left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{y^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow \text{等軸雙曲線方程式圖形的一部分}$$

$$\left(x \geq 0, -\left(\frac{d}{2} + w\right) \leq y < -\frac{d}{2}\right)$$

(三) 在中區域 (介於直線 $y = \frac{d}{2}$ 及 $y = -\frac{d}{2}$ 的中間區域) 內，最佳射門位置 $P(x,y)$ 的軌跡方程式 (在每一條固定 x 值的直線上找出最佳的 y 值) 為：

$$y = 0 \text{ (x 軸)} \Rightarrow \text{直線方程式圖形 (} x \geq 0 \text{)}$$

三、最佳得分區域分析

(一) 角球射門軌跡與最佳得分區域的疊合部分

1. 以 C 點為踢角球點，結合最佳得分區域，則 $P_1(6,0.71) \sim P_2(12,2.23)$ 之間的圓形軌跡為最佳射門得分位置。並利用餘弦定理，求出 $\angle A P_1 B = \beta_1$ 、 $\angle A P_2 B = \beta_2$ ，再將 β_1 、 β_2 轉換成 α_1 、 α_2 ：

$$(M = 2\sqrt{w(w+d)} = \sqrt{33(33+8)} \doteq 73.5663, N = 2w + d = 2 \times 33 + 8 = 74)$$

$$\textcircled{1} \cos \beta_1 = \frac{[(6-0)^2 + (0.71-4)^2] + [(6-0)^2 + (0.71-(-4))^2] - 8^2}{2\sqrt{(6-0)^2 + (0.71-4)^2} \sqrt{(6-0)^2 + (0.71-(-4))^2}} \doteq 0.3928$$

$$\Rightarrow \beta_1 = 66.87^\circ$$

$$\text{且 } \cos\alpha_1 = \frac{N\cos\beta_1 - M}{M\cos\beta_1 - N} = \frac{74 \times 0.3928 - 73.5663}{73.5663 \times 0.3928 - 74} \doteq 0.9866 \Rightarrow \alpha \doteq 9.39^\circ$$

$$\textcircled{2} \cos\beta_2 = \frac{[(12-0)^2 + (2.23-4)^2] + [(12-0)^2 + (2.23-(-4))^2] - 8^2}{2\sqrt{(12-0)^2 + (2.23-4)^2} \sqrt{(12-0)^2 + (2.23-(-4))^2}} \doteq 0.8108$$

$$\Rightarrow \beta_2 = 35.83^\circ$$

$$\text{且 } \cos\alpha_2 = \frac{N\cos\beta_2 - M}{M\cos\beta_2 - N} = \frac{74 \times 0.8108 - 73.5663}{73.5663 \times 0.8108 - 74} \doteq 0.9453 \Rightarrow \alpha \doteq 19.04^\circ$$

2. 以 D 點為踢角球點，結合最佳得分區域，則 $P_3(6, -0.71) \sim P_4(12, -2.23)$ 之間的圓

形軌跡為最佳得分位置。並利用餘弦定理，求出 $\angle A P_3 B = \beta_3$ 、 $\angle A P_4 B = \beta_4$ ，再

將 β_3 、 β_4 轉換成 α_3 、 α_4 ：

$$\textcircled{1} \cos\beta_3 = \frac{[(6-0)^2 + (-0.71-4)^2] + [(6-0)^2 + (-0.71-(-4))^2] - 8^2}{2\sqrt{(6-0)^2 + (-0.71-4)^2} \sqrt{(6-0)^2 + (-0.71-(-4))^2}} \doteq 0.3928$$

$$\Rightarrow \beta_3 = 66.87^\circ$$

$$\text{且 } \cos\alpha_3 = \frac{N\cos\beta_3 - M}{M\cos\beta_3 - N} = \frac{74 \times 0.3928 - 73.5663}{73.5663 \times 0.3928 - 74} \doteq 0.9866 \Rightarrow \alpha \doteq 9.39^\circ$$

$$\textcircled{2} \cos\beta_4 = \frac{[(12-0)^2 + (-2.23-4)^2] + [(12-0)^2 + (-2.23-(-4))^2] - 8^2}{2\sqrt{(12-0)^2 + (-2.23-4)^2} \sqrt{(12-0)^2 + (-2.23-(-4))^2}} \doteq 0.8108$$

$$\Rightarrow \beta_4 = 35.83^\circ$$

$$\text{且 } \cos\alpha_4 = \frac{N\cos\beta_4 - M}{M\cos\beta_4 - N} = \frac{74 \times 0.8108 - 73.5663}{73.5663 \times 0.8108 - 74} \doteq 0.9453 \Rightarrow \alpha \doteq 19.04^\circ$$

3. 由上述 1、2 討論可得：以 C 、 D 兩點為踢角球點，若角球直線行進的路線與球門

線的夾角 α 介於 $9.39^\circ \sim 19.04^\circ$ 之間，且在最佳射門軌跡接球射門，則將會在最佳

得分區域有最大的射門角度 β 介於 $35.83^\circ \sim 66.87^\circ$ 之間。

(二) 場地射門軌跡與最佳得分區域的疊合部分

1. 在上區域的最佳射門軌跡（在每一條固定 y 值的直線上找出最佳的 x 值），結合

最佳得分區域，則 $P_5(6, 7.21) \sim P_6(12, 12.65)$ 之間的等軸雙曲線圖形軌跡為最佳得

分位置。並利用餘弦定理，求出 $\angle A P_5 B = \beta_5$ 、 $\angle A P_6 B = \beta_6$ ：

$$\textcircled{1} \cos\beta_5 = \frac{[(6-0)^2 + (7.21-4)^2] + [(6-0)^2 + (7.21-(-4))^2] - 8^2}{2\sqrt{(6-0)^2 + (7.21-4)^2} \sqrt{(6-0)^2 + (7.21-(-4))^2}} \doteq 0.8321$$

$$\Rightarrow \beta_5 = 33.69^\circ$$

$$\textcircled{2} \cos\beta_6 = \frac{[(12-0)^2 + (7.21-4)^2] + [(12-0)^2 + (7.21-(-4))^2] - 8^2}{2\sqrt{(12-0)^2 + (7.21-4)^2} \sqrt{(12-0)^2 + (7.21-(-4))^2}} \doteq 0.9487$$

$$\Rightarrow \beta_6 = 18.43^\circ$$

2. 在下區域的最佳射門軌跡（在每一條固定 y 值的直線上找出最佳的 x 值），結合最佳得分區域，則 $P_7(6, -7.21) \sim P_8(12, -12.65)$ 之間的等軸雙曲線圖形軌跡為最佳得分位置。並利用餘弦定理，求出 $\angle A P_7 B = \beta_7$ 、 $\angle A P_8 B = \beta_8$ ：

$$\textcircled{1} \cos \beta_7 = \frac{[(6-0)^2 + (-7.21-4)^2] + [(6-0)^2 + (-7.21-(-4))^2] - 8^2}{2\sqrt{(6-0)^2 + (-7.21-4)^2}\sqrt{(6-0)^2 + (-7.21-(-4))^2}} \doteq 0.8321$$

$$\Rightarrow \beta_7 = 33.69^\circ$$

$$\textcircled{2} \cos \beta_8 = \frac{[(12-0)^2 + (-12.65-4)^2] + [(12-0)^2 + (-12.65-(-4))^2] - 8^2}{2\sqrt{(12-0)^2 + (-12.65-4)^2}\sqrt{(12-0)^2 + (-12.65-(-4))^2}} \doteq 0.9487$$

$$\Rightarrow \beta_8 = 18.43^\circ$$

3. 在中區域的最佳射門軌跡（在每一條固定 x 值的直線上找出最佳的 y 值），結合最佳得分區域，則 $P_9(6, 0) \sim P_{10}(12, 0)$ 之間的直線圖形軌跡為最佳得分位置。並利用餘弦定理，求出 $\angle A P_9 B = \beta_9$ 、 $\angle A P_{10} B = \beta_{10}$ ：

$$\textcircled{1} \cos \beta_9 = \frac{[(6-0)^2 + (0-4)^2] + [(6-0)^2 + (0-(-4))^2] - 8^2}{2\sqrt{(6-0)^2 + (0-4)^2}\sqrt{(6-0)^2 + (0-(-4))^2}} \doteq 0.3846$$

$$\Rightarrow \beta_9 = 67.38^\circ$$

$$\textcircled{2} \cos \beta_{10} = \frac{[(12-0)^2 + (0-4)^2] + [(12-0)^2 + (0-(-4))^2] - 8^2}{2\sqrt{(12-0)^2 + (0-4)^2}\sqrt{(12-0)^2 + (0-(-4))^2}} = 0.8$$

$$\Rightarrow \beta_{10} = 36.87^\circ$$

4. 由上述 1、2、3 討論可得：若在上、下區域的最佳射門軌跡，則將會在最佳得分區域有最大的射門角度 β 介於 $18.43^\circ \sim 33.69^\circ$ 之間；若在中區域的最佳射門軌跡，則將會在最佳得分區域有最大的射門角度 β 介於 $36.87^\circ \sim 67.38^\circ$ 之間。

柒、研究建議

經過研究，我們對於在足球場上，不同的射門位置及角度對射門進球的影響有更進一步的了解。不過，影響射門進球的因素眾多，從球員本身的心理素質、體能狀態及射門技術，就可以從質與量的方面去進行分析；另外，射門球所飛行的路線，也是影響射門進球的重要因素，在本研究中，除了僅限於二維空間之外，關於 x 座標的限制皆為 $x \geq 0$ ，但實際在直線射門的限制之下， x 不可能為 0，若 $x=0$ 就表示球員射門時的位置是在球門線上，則射門時球便會直接踢到兩邊的球門柱而彈出，因此，即使是踢角球，接球射門的角度也不可能達到 180° ，但若球飛行的路線是拋物線、香蕉球、抽射、吊射等，那射門的情況就會從二維空間成為三維空間，則就會有更多不同的分析。所以，從球員本身、射門時球飛行的路線、甚至

整體戰術的運用，都是研究的重要主題，相信若可以在這些主題去作更深入的探討，那我們對於這個世界上最受歡迎的運動將會有更專業的見解，即所謂內行看門道，外行看熱鬧。

捌、參考資料

- 一、林美智、趙榮瑞（2007）。2006年德國世界盃足球賽攻擊得分之分析。國立臺灣體育學院學報，20期，349-359。
- 二、陳振隆（2008）。世界盃足球賽射門技術之研究—以2002~2006為例—（未出版的碩士論文）。國立台東大學健康促進與休閒管理碩士班。
- 三、梁勇能（2001）。足球員的抉擇。科學教育月刊，238期，41-43。
- 四、黃文祥（2008）。足球致勝秘笈。大專體育，95，165-171。
- 五、翟寅飛、王家力、陳芳（2007）。2006年德國世界盃足球賽決賽階段進球情況分析。湖北體育科技，26卷6期，727-729。
- 六、蔡輝炯、盧美麗（2004）。世界盃足球賽得分與射門區域之探討：以1994、1998、2002年三屆為例。中華民國大專院校93年度體育學術研討會專刊，229-237。台中：台灣體育學院。
- 七、足球場地的長和寬，有具體的規定嗎？（2018年3月20日）。運動者集中營。取自 <https://kknews.cc/news/kn3xyar.html>
- 八、國際標準足球場尺寸（2018年8月15日）。運動體育產業網。取自 <https://kknews.cc/zh-tw/sports/5or6v66.html>
- 九、國中數學第五冊（民108）。南一出版社。
- 十、高中數學第三冊（民108）。南一出版社。
- 十一、高中數學第四冊（民108）。南一出版社。

玖、附錄

一、 α 與 β 之對照表

α (度)：角球直線行進的路線與球門線的

β (度)：接球後的射門角度

$$\left(\cos\beta = \frac{M - N\cos\alpha}{N - M\cos\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{N\cos\beta - M}{M\cos\beta - N}\right)$$

α	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	β	α	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	β	α	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	β
1	0.9998	-0.9495	161.71	31	0.8572	0.9264	22.12	61	0.4848	0.9832	10.52
2	0.9994	-0.8121	144.31	32	0.8480	0.9310	21.41	62	0.4695	0.9839	10.31
3	0.9986	-0.6217	128.44	33	0.8387	0.9352	20.74	63	0.4540	0.9845	10.11
4	0.9976	-0.4135	114.43	34	0.8290	0.9390	20.11	64	0.4384	0.9851	9.92
5	0.9962	-0.2131	102.31	35	0.8192	0.9426	19.51	65	0.4226	0.9856	9.73
6	0.9945	-0.0339	91.94	36	0.8090	0.9458	18.95	66	0.4067	0.9862	9.54
7	0.9925	0.1200	83.11	37	0.7986	0.9488	18.41	67	0.3907	0.9867	9.36
8	0.9903	0.2492	75.57	38	0.7880	0.9516	17.90	68	0.3746	0.9872	9.19
9	0.9877	0.3564	69.12	39	0.7771	0.9542	17.41	69	0.3584	0.9876	9.02
10	0.9848	0.4451	63.57	40	0.7660	0.9566	16.94	70	0.3420	0.9881	8.85
11	0.9816	0.5186	58.76	41	0.7547	0.9588	16.50	71	0.3256	0.9885	8.69
12	0.9781	0.5797	54.57	42	0.7431	0.9609	16.08	72	0.3090	0.9889	8.53
13	0.9744	0.6308	50.89	43	0.7314	0.9628	15.67	73	0.2924	0.9893	8.38
14	0.9703	0.6737	47.65	44	0.7193	0.9646	15.28	74	0.2756	0.9897	8.23
15	0.9659	0.7100	44.76	45	0.7071	0.9663	14.91	75	0.2588	0.9901	8.08
16	0.9613	0.7409	42.19	46	0.6947	0.9679	14.56	76	0.2419	0.9904	7.94
17	0.9563	0.7674	39.88	47	0.6820	0.9694	14.21	77	0.2250	0.9908	7.80
18	0.9511	0.7903	37.79	48	0.6691	0.9708	13.88	78	0.2079	0.9911	7.66
19	0.9455	0.8100	35.90	49	0.6561	0.9721	13.57	79	0.1908	0.9914	7.53
20	0.9397	0.8273	34.18	50	0.6428	0.9733	13.26	80	0.1736	0.9917	7.39
21	0.9336	0.8424	32.61	51	0.6293	0.9745	12.97	81	0.1564	0.9920	7.26
22	0.9272	0.8557	31.17	52	0.6157	0.9756	12.69	82	0.1392	0.9923	7.14
23	0.9205	0.8674	29.84	53	0.6018	0.9766	12.41	83	0.1219	0.9925	7.01
24	0.9135	0.8778	28.62	54	0.5878	0.9776	12.15	84	0.1045	0.9928	6.89
25	0.9063	0.8871	27.48	55	0.5736	0.9785	11.89	85	0.0872	0.9930	6.77
26	0.8988	0.8955	26.43	56	0.5592	0.9794	11.64	86	0.0698	0.9933	6.65
27	0.8910	0.9030	25.45	57	0.5446	0.9803	11.40	87	0.0523	0.9935	6.54
28	0.8829	0.9097	24.53	58	0.5299	0.9811	11.17	88	0.0349	0.9937	6.43
29	0.8746	0.9158	23.68	59	0.5150	0.9818	10.95	89	0.0175	0.9939	6.32
30	0.8660	0.9213	22.88	60	0.5000	0.9825	10.73	90	0.0000	0.9941	6.21