

屏東縣第64屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：混沌中的「質」之序

關 鍵 詞：質數、次方組合

編號：A1001

混沌中的「質」之序

摘要

在國小六年級當中，配合最大公因數和最小公倍數的處理，開始帶入質數和合數的概念。但在教科書中只簡單提到，質數的因數只有 1 和自己而已，但對於質數是否具有其他特徵、數量是否固定卻是隻字未提。此次研究主要是以質數為主題，討論其次方數除以個位數正整數的餘數呈現，及是否可用簡單的數字組合，進而表現出質數的多元面相。希望透過這樣的討論，學生可以對質數的概念更加清楚，並找出潛藏於數字背後的規律。

壹、前言

一、研究動機

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659

(圖片來源: <http://www.mathland.idv.tw/fun/primesquare.htm>)

在六年級的數學單元中，我們開始接觸到質數和合數的概念，其中質數所具有的因素特性，深深讓我們著迷。不同於合數的因數數量變化不定，質數的因數不管是大小，永遠只有 1 和自己兩個。而當我們研讀相關資料時，發現質數的討論相當多，但往往只有某些質數形成的數群，才能找到共通點，無法歸納到所有的質數。於是在老師的指導下，我們試著將思考簡單化，想找出質數潛藏的特性，希望可以挖掘出更多不同的觀點，讓質數「獨一無二」的表現更具特色。

二、研究目的

(一)質數在 1~6 次方的情況下，計算分別除以 2~9 後的餘數，並找出其規律

(二)討論前 500 個質數，在限定條件下，只用 2、3 的次方數組合呈現

貳、研究設備及器材

紙、筆、工程計算機

參、研究過程或方法

一、研究方法

小學對於質數的說明，只用因數只有「1 和自己」輕鬆帶過，鮮少提及其具有的其他性質。相對於合數來說，質數或許有些寡不敵眾，但我們相信，其應該還有未被發現的特性。因此我們希望回歸到單純的計算，試著找出質數在除以正整數的餘數規律，及其用固定數字及次方概念，就能呈現的方式。為讓學生在操作上更加方便，我們設定以下限制，避免學生計算上出現吃力的情況。

(一)在找出相關質數的次方數的餘數時，除數限定在 2~9，次方數最高為 6 次方，避免操作不易

(二)在前 500 個質數中，限定使用 2、3 兩個數字及其次方數組合成，組合算式最多只能用 5 個次方數組合而成

二、研究過程

在決定好上述限制後，我們將以此為基礎，分別找出

(一)質數的次方數除以個位數正整數的餘數規律

(二)質數是否能只用兩種數字及最多 5 個次方數組合而成的可能性

希望透過實作與討論，讓學生更加掌握質數的概念，並對其所潛藏的特性有更多的了解。

肆、研究結果

一、未滿 10 的質數的次方數，分別除以 2~9 的餘數討論

首先在這個區塊，我們特別把未滿 10 的質數拿出獨立討論。最大的原因，在於 2 是質數中的唯一偶數，及 5 是所有質數中，唯一一個尾數是 5 的質數，相關討論如下：

*空格中的數字為質數的次方數，分別除以 2~9 的餘數

質數&次方數		除數							
		2	3	4	5	6	7	8	9
2	一次方	0	2	2	2	2	2	2	2
	二次方	0	1	0	4	4	4	4	4
	三次方	0	2	0	3	2	1	0	8
	四次方	0	1	0	1	4	2	0	7
	五次方	0	2	0	2	2	4	0	5
	六次方	0	1	0	4	4	1	0	1

我們可以發現，除數為 2、4、8 時，因和質數 2 有因數關係，餘數在開頭時就無統一規律，只有在質數 2 的三次方後，才統一餘數為 0。其他除數部份，每兩次方循環一次的為除數 3、6，每三次方循環一次的為除數 7。當我們把次方數拉高時，可以看到餘數在除數 5 為四次方循環一次，除數 9 為六次方循環一次。由此我們可以推論，當 2 的十二次方時，除以 3、5、7、9 的餘數必為 1，唯獨除數為 6 時，只能造成餘數循環，無法得到餘數為 1 的結果。

質數&次方數		除數							
		2	3	4	5	6	7	8	9
3	一次方	1	0	3	3	3	3	3	3
	二次方	1	0	1	4	3	2	1	0
	三次方	1	0	3	2	3	6	3	0
	四次方	1	0	1	1	3	4	1	0
	五次方	1	0	3	3	3	5	3	0
	六次方	1	0	1	4	3	1	1	0

我們可以發現，除數為 9 時，質數 3 的次方數要在兩次方後，才會統一為 0。除數為 2、3、6 時，餘數皆為固定。其他除數部份，每兩次方循環一次的為除數 4、8，且餘數皆相同。當我們把次方數拉高時，可以看到餘數在除數 5 為四次方循環一次，除數 7 為六次方循環一次。由此我們可以推論，當 3 的十二次方時，除以 2、4、5、7、8 的餘數必為 1，唯獨除數

為 6 時，只能造成餘數循環，無法得到餘數為 1 的結果。

質數&次方數		除數							
		2	3	4	5	6	7	8	9
5	一次方	1	2	1	0	5	5	5	5
	二次方	1	1	1	0	1	4	1	7
	三次方	1	2	1	0	5	6	5	8
	四次方	1	1	1	0	1	2	1	4
	五次方	1	2	1	0	5	3	5	2
	六次方	1	1	1	0	1	1	1	1

我們可以發現，除數為 2、4、5 時，餘數皆為固定。其他除數部份，每兩次方循環一次的為除數 3、6、8，其中除數 6、8 的餘數皆為相同。當我們把次方數拉高時，可以看到餘數在除數 7、9 皆為六次方循環一次，也可以看到當 5 的六次方時，除以 2、3、4、6、7、8、9 的餘數必為 1，這在 5 的十二次方時，也可得到相同結果。唯獨除數為 5 時，因和質數 5 有因數關係，所以無法得到餘數為 1 的結果。

質數&次方數		除數							
		2	3	4	5	6	7	8	9
7	一次方	1	1	3	2	1	0	7	7
	二次方	1	1	1	4	1	0	1	4
	三次方	1	1	3	3	1	0	7	1
	四次方	1	1	1	1	1	0	1	7
	五次方	1	1	3	2	1	0	7	4
	六次方	1	1	1	4	1	0	1	1

我們可以發現，除數為 2、3、6、7 時，餘數皆為固定。其他除數部份，兩次方循環一次的為除數 4、8，每三次方循環一次的為除數 9。當我們把次方數拉高時，可以看到餘數在除數 5 為四次方循環一次。由此我們可以推論，當質數 7 的十二次方時，除以 2、3、4、5、6、8、9 的餘數必為 1，唯獨除數為 7 時，因和質數 7 有因數關係，所以無法得到餘數為 1 的結

果。

透過上面分析，我們可以發現以下狀況：

(一)除了質數 2 以外，未滿 10 的質數不管幾次方，除以 2 的餘數永遠為 1

(二)未滿 10 的質數的次方數，扣掉有因數關係的除數，會在十二次方後，餘數皆同時循環

以上為此階段的討論狀況。

二、超過 10 的質數的次方數，分別除以 2~9 的餘數討論

當質數開始超過 10 之後，我們可以發現，尾數只會有 1、3、7、9 四種型態，但對於除數 2~9 來說，無法全面固定餘數為多少。所以此區塊的討論將改成從除數下手，以簡化相關分析，相關討論如下：

首先是當除數為 2 時，超過 10 的質數皆為奇數，不管次方數為多少，除以 2 的餘數永遠為 1，因此除數 2 不再深入討論。

除數	質數代表	餘數型式	次方數					
			一次方	二次方	三次方	四次方	五次方	六次方
3	13、19	餘數為 1	1	1	1	1	1	1
	11、17	餘數為 2	2	1	2	1	2	1

我們可以看到，當質數除以 3 的餘數為 1 時，不管幾次方，除以 3 的餘數永遠為 1。但當質數除以 3 的餘數為 2 時，其次方數除以 3 的餘數，則會兩次方循環一次。

除數	質數代表	餘數型式	次方數					
			一次方	二次方	三次方	四次方	五次方	六次方
4	13、17	餘數為 1	1	1	1	1	1	1
	11、19	餘數為 3	3	1	3	1	3	1

我們可以看到，當質數除以 4 的餘數為 1 時，不管幾次方，除以 4 的餘數永遠為 1。但當質數除以 4 的餘數為 3 時，其次方數除以 4 的餘數，則會兩次方循環一次。

除數	質數代表	餘數型式	次方數					
			一次方	二次方	三次方	四次方	五次方	六次方

5	11、31	餘數為 1	1	1	1	1	1	1
	17、37	餘數為 2	2	4	3	1	2	4
	13、53	餘數為 3	3	4	2	1	3	4
	19、59	餘數為 4	4	1	4	1	4	1

我們可以看到，當質數除以 5 的餘數為 1 時，不管幾次方，除以 5 的餘數永遠為 1。當質數除以 5 的餘數為 4 時，其次方數除以 5 的餘數，則會兩次方循環一次。當把次方數提高時，可以發現質數除以 5 的餘數為 2、3 時，其次方數除以 5 的餘數，則會四次方循環一次。

除數	質數代表	餘數型式	次方數					
			一次方	二次方	三次方	四次方	五次方	六次方
6	19、31	餘數為 1	1	1	1	1	1	1
	17、47	餘數為 5	5	1	5	1	5	1

我們可以看到，當質數除以 6 的餘數為 1 時，不管幾次方，除以 6 的餘數永遠為 1。但當質數除以 6 的餘數為 5 時，其次方數除以 6 的餘數，則會兩次方循環一次。

除數	質數代表	餘數型式	次方數					
			一次方	二次方	三次方	四次方	五次方	六次方
7	29、43	餘數為 1	1	1	1	1	1	1
	23、37	餘數為 2	2	4	1	2	4	1
	17、31	餘數為 3	3	2	6	4	5	1
	11、53	餘數為 4	4	2	1	4	2	1
	19、47	餘數為 5	5	4	6	2	3	1
	13、41	餘數為 6	6	1	6	1	6	1

我們可以看到，當質數除以 7 的餘數為 1 時，不管幾次方，除以 7 的餘數永遠為 1。當質數除以 7 的餘數為 6 時，其次方數除以 7 的餘數，則會兩次方循環一次。當質數除以 7 的餘數為 2、4 時，其次方數除以 7 的餘數，則會三次方循環一次。當把次方數提高時，可以發現質數除以 7 的餘數為 3、5 時，其次方數除以 7 的餘數，則會六次方循環一次。

除數	質數代表	餘數型式	次方數					
			一次方	二次方	三次方	四次方	五次方	六次方
8	17、41	餘數為 1	1	1	1	1	1	1
	11、19	餘數為 3	3	1	3	1	3	1
	13、29	餘數為 5	5	1	5	1	5	1
	23、31	餘數為 7	7	1	7	1	7	1

我們可以看到，當質數除以 8 的餘數為 1 時，不管幾次方，除以 8 的餘數永遠為 1。當質數除以 8 的餘數為 3、5、7 時，其次方數除以 8 的餘數，則會兩次方循環一次。

除數	質數代表	餘數型式	次方數					
			一次方	二次方	三次方	四次方	五次方	六次方
9	19、37	餘數為 1	1	1	1	1	1	1
	11、29	餘數為 2	2	4	8	7	5	1
	13、31	餘數為 4	4	7	1	4	7	1
	23、41	餘數為 5	5	7	8	4	2	1
	43、61	餘數為 7	7	4	1	7	4	1
	17、53	餘數為 8	8	1	8	1	8	1

我們可以看到，當質數除以 9 的餘數為 1 時，不管幾次方，除以 9 的餘數永遠為 1。當質數除以 9 的餘數為 8 時，其次方數除以 8 的餘數，則會兩次方循環一次。當質數除以 9 的餘數為 4、7 時，其次方數除以 9 的餘數，則會三次方循環一次。當把次方數提高時，可以發現質數除以 9 的餘數為 2、5 時，其次方數除以 9 的餘數，則會六次方循環一次。

我們把超過 10 的質數除以 2~9 的餘數，其次方數最高循環次數整理如下：

除數	2	3	4	5	6	7	8	9
循環次方	一次方	二次方	二次方	四次方	二次方	六次方	二次方	六次方

由此我們可以推論，超過 10 的質數的次方數，在除以 2~9 的情況下，餘數會同時在十二次方循環一次，這和未滿 10 的質數的次方數情況大同小異。

透過上面分析，我們可以發現以下狀況：

(一)對超過 10 的質數來說，當它除以 2~9 的餘數為 1 時，不管幾次方，除以相同除數的餘數永遠為 1。

(二)超過 10 的質數的次方數，除以 2~9 時，會在十二次方後，餘數皆同時循環

以上為此階段的討論狀況。

三、質數在限定條件下，只用 2、3 的次方數組合呈現

網路上對於質數的數量討論及下一個質數的搜尋，一直是一個熱門的話題。在眾多的討論中，也會提到質數的一般式呈現。可惜的是，往往找出的一般式，只能套用到某些質數所形成的數群，無法應用到每一個質數。所以我們將思考簡單化，想以質數中最小的兩個數 2、3 為基礎，以其次方數來組合成質數。為避免計算式太過浮爛，我們設定以下條件：

(一)以 2、3 的次方數組合成質數(2、3 必須各用一次)，數量以前 500 個質數為主

(二)組合的形式可以是 2^a+3^b 、 2^a-3^b 或 3^a-2^b (a、b 皆為大於等於 0 的整數)

(三)最少用 2 個次方組合，最多可用 5 個次方數組合而成

希望透過這樣的討論，可以找出所有質數同時具有的共通點，讓質數的特性更加有趣。

以下是相關次方數組合成質數的呈現：

*2、3、4、5 個次方的組合顏色分別為綠、黑、紅、紫色。若有多個式子可組合而成，將只列出一個作為代表。

質數	組合情況	質數	組合情況	質數	組合情況	質數	組合情況
2	2^0+3^0	3	2^1+3^0	5	2^1+3^1	7	2^2+3^1
11	2^1+3^2	13	2^2+3^2	17	2^3+3^2	19	2^4+3^1
23	3^3-2^2	29	2^5-3^1	31	2^2+3^3	37	2^6-3^3
41	2^5+3^2	43	2^4+3^3	47	2^7-3^4	53	$2^6-2^3-3^1$
59	2^5+3^3	61	2^6-3^1	67	2^6+3^1	71	$2^6+2^2+3^1$
73	3^4-2^3	79	3^4-2^1	83	3^4+2^1	89	3^4+2^3
97	3^4+2^4	101	2^7-3^3	103	$2^7-3^3+2^1$	107	$3^4+3^3-2^0$
109	$2^7-2^4-3^1$	113	3^4+2^5	127	2^7-3^0	131	2^7+3^1
137	2^7+3^2	139	$2^7+2^3+3^1$	149	$2^6+2^2+3^4$	151	$2^7+3^3-2^2$

質數	組合情況	質數	組合情況	質數	組合情況	質數	組合情況
157	$2^7+2^5-3^1$	163	$2^7+2^5+3^1$	167	$2^8-3^4-2^3$	173	$2^8-3^4-2^1$
179	3^5-2^6	181	$3^5-2^6+2^1$	191	$2^7+2^6-3^0$	193	$2^7+2^6+3^0$
197	$2^8-2^5-3^3$	199	$2^7+2^6+2^2+3^1$	211	3^5-2^5	223	$3^5-2^4-2^2$
227	3^5-2^4	229	$3^5-2^4+2^1$	233	$2^8-3^3+2^2$	239	3^5-2^2
241	3^5-2^1	251	3^5+2^3	257	2^8+3^0	263	$2^8+2^2+3^1$
269	$2^8+2^2+3^2$	271	$2^8+2^4-3^0$	277	$3^5+2^5+2^1$	281	$2^8+3^3-2^1$
283	2^8+3^3	293	$2^8+2^6-3^3$	307	3^5+2^6	311	$2^8+2^6-3^2$
313	$2^8+2^6-2^2-3^1$	317	$2^8+2^6-3^1$	331	$2^8+2^6+3^2+2^1$	337	2^8+3^4
347	$2^8+3^4+3^2+2^0$	349	$2^8+3^4+2^4-2^2$	353	$2^8+3^4+2^4$	359	$2^7+3^5-2^3-2^2$
367	$2^7+3^5-2^2$	373	$2^7+3^5+2^1$	379	$2^7+3^5+2^3$	383	$2^8+2^7-3^0$
389	$2^8+2^7+3^1+2^1$	397	$2^8+2^7+2^4-3^1$	401	$2^8+3^4+2^6$	409	$2^8+3^4+2^6+2^3$
419	$2^8+3^5-3^4+2^0$	421	$2^9-2^6-3^3$	431	$3^5+2^7+2^6-2^2$	433	$3^5+2^7+2^6-2^1$
439	$3^5+2^7+2^6+2^2$	443	$3^5+2^7+2^6+2^3$	449	$2^8+2^7+2^6+3^0$	457	$2^8+2^7+2^6+3^2$
461	$3^5+2^7+3^4+3^2$	463	$2^8+3^5-2^5-2^2$	467	$2^8+3^5-2^5$	479	$2^8+3^5-2^4-2^2$
487	$2^8+3^5-2^3-2^2$	491	$2^8+3^5-2^3$	499	2^8+3^5	503	2^9-3^2
509	2^9-3^1	521	2^9+3^2	523	$2^9+3^2+2^1$	541	$2^9+2^5-3^1$
547	$2^9+2^5+3^1$	557	$2^9+2^6-2^4-3^1$	563	$2^8+3^5+2^6$	569	$2^9+2^6-2^2-3^1$
571	$2^9+2^6-2^1-3^1$	577	$2^9+2^6+3^0$	587	$2^9+2^6+3^2+2^1$	593	2^9+3^4
599	$3^6-2^7-2^1$	601	3^6-2^7	607	$3^6-2^7+2^2+2^1$	613	$3^6-2^7+2^3+2^2$
617	$3^6-2^7+2^4$	619	$3^6-2^7+2^4+2^1$	631	$2^9+2^7-3^2$	641	$2^9+2^7+3^0$
643	$2^9+2^7+3^0+2^1$	647	$3^6-3^4-2^0$	653	$3^6-3^4+3^1+2^1$	659	$3^6-3^4+3^2+2^1$
661	$3^6-2^6-2^2$	673	$3^6-2^6+2^3$	677	$3^6-2^6+2^3+2^2$	683	$3^6-2^6+2^4+2^1$
691	$3^6-2^6+3^3-2^0$	701	$3^6-3^3-2^0$	709	$3^6-2^4-2^2$	719	$3^6-3^2-2^0$
727	3^6-2^1	733	3^6+2^2	739	$3^6+3^2+2^0$	743	$3^6+2^4-2^1$

質數	組合情況	質數	組合情況	質數	組合情況	質數	組合情況
751	$3^6+3^3-3^1-2^1$	757	$3^6+3^3+2^0$	761	3^6+2^5	769	$3^6+2^5+2^3$
773	$3^6+2^5+2^3+2^2$	787	$2^9+3^5+2^5$	797	$3^6+2^6+2^2$	809	$3^6+3^4-2^0$
811	$3^6+3^4+2^0$	821	$3^6+3^4+3^2+2^1$	823	$3^6+3^4+3^2+2^2$	827	$3^6+3^4+3^2+2^3$
829	$3^6+2^6+2^5+2^2$	839	$2^9+3^5+3^4+3^1$	853	$3^6+2^7-2^2$	857	3^6+2^7
859	$3^6+2^7+2^1$	863	$3^6+2^7+2^2+2^1$	877	$3^6+2^7+2^4+2^2$	881	$3^6+2^7+2^4+2^3$
883	$3^6+2^7+3^3-2^0$	887	$3^6+2^7+2^5-2^1$	907	$2^{10}-2^7+3^2+2^1$	911	$2^{10}-2^7+2^4-3^0$
919	$3^6+2^7+2^6-2^1$	929	$3^6+2^7+3^4-3^2$	937	$3^6+3^5-2^5-3^1$	941	$3^6+3^5-2^5+2^0$
947	$3^6+3^5-3^3+2^1$	953	$3^6+3^5-3^3+2^3$	967	$3^6+3^5-3^1-2^1$	971	$3^6+3^5-2^0$
977	$3^6+3^5+3^1+2^1$	983	$2^{10}-2^5-3^2$	991	$2^{10}-2^5-3^0$	997	$2^{10}-3^3$
1009	$2^{10}-2^4+3^0$	1013	$2^{10}-3^2-2^1$	1019	$2^{10}-3^1-2^1$	1021	$2^{10}-3^1$
1031	$2^{10}+2^2+3^1$	1033	$2^{10}+3^2$	1039	$2^{10}+2^4-3^0$	1049	$2^{10}+3^3-2^1$
1051	$2^{10}+3^3$	1061	$2^{10}+2^5+2^1+3^1$	1063	$2^{10}+2^5+2^2+3^1$	1069	$2^{10}+3^3+2^4+2^1$
1087	$2^{10}+2^6-3^0$	1091	$2^{10}+2^6+2^1+3^0$	1093	$2^{10}+2^6+2^2+3^0$	1097	$2^{10}+2^6+3^2$
1103	$2^{10}+2^6+2^4-3^0$	1109	$2^{10}+3^4+2^2$	1117	$2^{10}+3^4+2^2+2^3$	1123	$2^{10}+3^4+2^4+2^1$
1129	$2^{10}+3^4+3^3-3^1$	1151	$2^{10}+2^7-3^0$	1153	$2^{10}+2^7+3^0$	1163	$2^{10}+2^7+3^2+2^1$
1171	$2^{10}+2^7+2^4+3^1$	1181	$2^{10}+2^7+3^3+2^1$	1187	$2^{10}+2^7+3^3+2^3$	1193	$2^{10}+2^7+2^5+3^2$
1201	$2^{10}+2^8-3^4+2^1$	1213	$2^{10}+2^8-2^6-3^1$	1217	$2^{10}+2^8-2^6+3^0$	1223	$3^6+2^9-2^4-2^1$
1229	$3^6+2^9-2^4+2^2$	1231	$3^6+2^9-3^2-2^0$	1237	$3^6+2^9-2^2$	1249	$3^6+2^9+2^3$
1259	$3^6+2^9+2^4+2^1$	1277	$3^6+2^9+2^5+2^2$	1279	$2^{10}+3^5+2^4-2^2$	1283	$2^{10}+3^5+2^4$
1289	$2^{10}+2^8+3^2$	1291	$2^{10}+2^8+3^2+2^1$	1297	$2^{10}+2^8+2^4+3^0$	1301	$3^6+2^9+2^6-2^2$
1303	$3^6+2^9+2^6-2^1$	1307	$3^6+2^9+2^6+2^1$	1319	$3^6+2^9+3^4-3^1$	1321	$3^6+2^9+3^4-2^0$
1327	$2^{10}+3^5+2^6-2^2$	1361	$2^{10}+2^8+3^4$	1367	$3^6+2^9+2^7-2^1$	1373	$3^6+2^9+2^7+2^2$
1381	$2^{10}+2^9-2^7-3^3$	1399	$2^{10}+2^9-2^7-3^2$	1409	$2^{10}+2^9-2^7+3^0$	1423	$2^{10}+2^9-3^4-2^5$
1427	$2^{10}+3^5+2^7+2^5$	1429	$2^{10}+3^6-3^5-3^4$	1433	$3^6+2^9+2^7+2^6$	1439	$2^{11}-2^9-3^4-2^4$

質數	組合情況	質數	組合情況	質數	組合情況	質數	組合情況
1447	$2^{11}-2^9-3^4-2^3$	1451	$2^{11}-2^9-3^4-2^2$	1453	$2^{11}-2^9-3^4-2^1$	1459	$2^{10}+2^9-3^4+2^2$
1471	$2^{10}+2^9-3^4+2^4$	1481	$2^{10}+2^9-2^6+3^2$	1483	$3^7-3^6+3^3-2^1$	1487	$3^7-3^6+3^3+2^1$
1489	$3^7-3^6+3^3+2^2$	1493	$3^7-3^6+3^3+2^3$	1499	$2^{10}+2^9-2^6+3^3$	1511	$2^{10}+2^9-3^3+2^1$
1523	$2^{10}+2^9-3^2-2^2$	1531	$2^{10}+2^9-3^2+2^2$	1543	$2^{10}+2^9+3^2-2^1$	1549	$2^{10}+2^9+3^2+2^2$
1553	$2^{10}+2^9+3^2+2^3$	1559	$2^{10}+2^9+3^3-2^2$	1567	$2^{10}+2^9+3^3+2^2$	1571	$2^{10}+2^9+3^3+2^3$
1579	$2^{10}+2^9+3^3+2^4$	1583	$3^7-3^6+2^7-3^1$	1597	$2^{10}+2^9+2^6-3^1$	1601	$2^{10}+2^9+2^6+3^0$
1607	$3^7-2^9-2^6-2^2$	1609	$3^7-2^9-2^6-2^1$	1613	$3^7-2^9-2^6+2^1$	1619	$3^7-2^9-2^6+2^3$
1621	$2^{10}+3^6-2^7-2^2$	1627	$2^{10}+3^6-2^7+2^1$	1637	$2^{11}-2^8-2^7-3^3$	1657	$2^{10}+3^6-2^6-2^5$
1663	$2^{10}+3^6-3^4-3^2$	1667	$2^{10}+2^9+2^7+3^1$	1669	$2^{10}+3^6-3^4-3^1$	1693	$2^{10}+3^6-2^6+2^2$
1697	$2^{10}+3^6-2^6+2^3$	1699	$3^7-2^9+3^3-3^1$	1709	$3^7-2^9+2^5+2^1$	1721	$2^{10}+3^6-2^5$
1723	$2^{10}+3^6-2^5+2^1$	1733	$2^{10}+3^6-2^4-2^2$	1741	$2^{10}+3^6-2^4+2^2$	1747	$2^{10}+3^6-2^2-2^1$
1753	$2^{10}+3^6$	1759	$2^{10}+3^6+2^2+2^1$	1777	$2^{10}+3^6+3^3-3^1$	1783	$2^{10}+3^6+3^3+3^1$
1787	$2^{10}+3^6+2^5+2^1$	1789	$2^{10}+3^6+2^5+2^2$	1801	$2^{10}+3^6+2^5+2^4$	1811	$3^7-2^9+2^7+2^3$
1823	$2^{11}-2^8+2^5-3^0$	1831	$2^{10}+3^6+3^4-3^1$	1847	$3^7-2^8-3^4-3^1$	1861	$3^7-3^5-3^4-2^1$
1867	$3^7-3^5-3^4+2^2$	1871	$3^7-3^5-3^4+2^3$	1873	$2^{10}+3^6+2^7-2^3$	1877	$2^{10}+3^6+2^7-2^2$
1879	$2^{10}+3^6+2^7-2^1$	1889	$2^{10}+3^6+2^7+2^3$	1901	$3^7-2^8-2^5+2^1$	1907	$3^7-2^8-2^5+2^3$
1913	$3^7-2^8-2^4-2^1$	1931	3^7-2^8	1933	$3^7-2^8+2^1$	1949	$3^7-2^8+2^4+2^1$
1951	$3^7-2^8+2^4+2^2$	1973	$2^{11}-2^6-3^2-2^1$	1979	$2^{11}-2^6-3^1-2^1$	1987	$2^{11}-2^6+3^1$
1993	$2^{11}-2^6+3^2$	1997	$2^{11}-2^6+3^2+2^2$	1999	$2^{11}-2^6+2^4-3^0$	2003	$2^{11}-2^6+2^4+3^1$
2011	$2^{11}-2^6+3^3$	2017	$2^{11}-2^6+2^5+3^0$	2027	$3^7-2^7-2^5$	2029	$3^7-2^7-2^5+2^1$
2039	$2^{11}-3^2$	2053	$2^{11}+3^1+2^1$	2063	$2^{11}+2^4-3^0$	2069	$2^{11}+2^4+3^1+2^1$
2081	$2^{11}+2^5+3^0$	2083	$2^{11}+2^5+3^1$	2087	$2^{11}+2^5+3^1+2^2$	2089	$2^{11}+2^5+3^2$
2099	$3^7-3^4-3^1-2^2$	2111	$3^7-3^4+3^1+2^1$	2113	$3^7-3^4+3^1+2^2$	2129	$2^{11}+3^4$
2131	$2^{11}+3^4+2^1$	2137	$2^{11}+3^4+2^3$	2141	$2^{11}+3^4+2^3+2^2$	2143	$2^{11}+2^6+2^5-3^0$

質數	組合情況	質數	組合情況	質數	組合情況	質數	組合情況
2153	$3^7-2^5-2^1$	2161	$3^7-3^3+2^0$	2179	3^7-2^3	2203	3^7+2^4
2207	$3^7+2^4+2^2$	2213	$3^7+3^3-2^0$	2221	$3^7+3^3+2^2+3^1$	2237	$2^{11}+2^7+2^6-3^1$
2239	$2^{11}+2^7+2^6-3^0$	2243	$2^{11}+2^7+2^6+3^1$	2251	3^7+2^6	2267	$3^7+2^6+2^4$
2269	$3^7+2^6+2^4+2^1$	2273	$3^7+3^4+3^1+2^1$	2281	$3^7+3^4+2^4-3^1$	2287	$3^7+3^4+2^4+3^1$
2293	$3^7+3^4+3^3-2^1$	2297	$3^7+2^7-2^4-2^1$	2309	$3^7+2^7-3^2+3^1$	2311	$3^7+2^7-2^2$
2333	$3^7+2^7+2^4+2^1$	2339	$3^7+2^7+2^4+2^3$	2341	$3^7+2^7+3^3-2^0$	2347	$3^7+2^7+2^5$
2351	$3^7+2^7+2^5+2^2$	2357	$3^7+3^5-3^4+2^3$	2371	$3^7+2^8-2^6-2^3$	2377	$3^7+2^8-2^6-2^1$
2381	$3^7+2^8-2^6+2^1$	2383	$3^7+2^8-2^6+2^2$	2389	$3^7+3^5-2^5-3^2$	2393	$3^7+3^5-2^6+3^3$
2399	$3^7+3^5-2^5+2^0$	2411	$3^7+3^5-2^4-3^1$	2417	$3^7+3^5-2^4+3^1$	2423	$3^7+3^5-2^4+3^2$
2437	$3^7+3^5+2^2+3^1$	2441	$3^7+3^5+2^3+3^1$	2447	$3^7+3^5+2^3+3^2$	2459	$3^7+3^5+3^3+2^1$
2467	$3^7+3^5+2^6-3^3$	2473	$3^7+2^8+2^5-2^1$	2477	$3^7+2^8+2^5+2^1$	2503	$3^7+3^5+3^4-2^3$
2521	$3^7+3^5+2^6+3^3$	2531	$2^{11}+2^9-3^3-2^1$	2539	$3^7+2^9-2^7-2^5$	2543	$2^{11}+2^9-2^4-3^0$
2549	$2^{11}+2^9-3^2-2^1$	2551	$2^{11}+2^9-3^2$	2557	$2^{11}+2^9-3^1$	2579	$3^7+2^9-2^7+2^3$
2591	$2^{11}+2^9+2^5-3^0$	2593	$2^{11}+2^9+2^5+3^0$	2609	$3^7+2^9-3^4-3^2$	2617	$3^7+2^9-3^4-3^0$
2621	$3^7+2^9-3^4+3^1$	2633	$3^7+2^9-2^6-2^1$	2647	$2^{11}+3^6-2^7-2^1$	2657	$2^{11}+3^6-2^7+2^3$
2659	$3^7+2^9-2^5-2^3$	2663	$3^7+2^9-2^5-2^2$	2671	$3^7+2^9-2^5+2^2$	2677	$3^7+3^5+2^8-3^2$
2683	$3^7+3^5+2^8-3^1$	2687	$3^7+3^5+2^8+2^0$	2689	$3^7+3^5+2^8+3^1$	2693	$3^7+2^9-2^2-2^1$
2699	3^7+2^9	2707	$3^7+2^9+2^3$	2711	$3^7+2^9+2^3+2^2$	2713	$3^7+2^9+2^4-2^1$
2719	$3^7+2^9+2^4+2^2$	2729	$3^7+2^9+2^5-2^1$	2731	$3^7+2^9+2^5$	2741	$2^{11}+3^6-2^5-2^2$
2749	$2^{11}+3^6-2^5+2^2$	2753	$2^{11}+3^6-2^5+2^3$	2767	$2^{11}+3^6-3^2-3^0$	2777	$2^{11}+3^6$
2789	$2^{11}+3^6+2^4-2^2$	2791	$2^{11}+3^6+2^4-2^1$	2797	$2^{11}+3^6+2^4+2^2$	2801	$2^{11}+3^6+2^4+2^3$
2803	$2^{11}+3^6+3^3-2^0$	2819	$3^7+2^9+2^7-2^3$	2833	$2^{11}+3^6+2^6-2^3$	2837	$2^{11}+3^6+2^6-2^2$
2843	$2^{11}+3^6+2^6+2^1$	2851	$3^7+3^6-2^6-2^0$	2857	$3^7+3^6-2^5-3^3$	2861	$3^7+3^6-2^6+3^2$
2879	$3^7+3^6-2^6+3^3$	2887	$3^7+3^6-3^3-2^1$	2897	$3^7+3^6-3^3+2^3$	2903	$3^7+3^6-2^4+3^1$

質數	組合情況	質數	組合情況	質數	組合情況	質數	組合情況
2909	$3^7+3^6-2^2-3^1$	2917	$3^7+3^6+2^0$	2927	$3^7+3^6+2^3+3^1$	2939	$3^7+3^6+3^3-2^2$
2953	$3^7+3^6+2^6-3^3$	2957	$3^7+3^6+2^5+3^2$	2963	$3^7+2^{10}-2^8+2^3$	2969	$2^{11}+3^6+2^7+2^6$
2971	$3^7+3^6+2^6-3^2$	2999	$3^7+3^6+3^4+2^1$	3001	$3^7+3^6+3^4+2^2$	3011	$2^{11}+2^{10}-2^6+3^1$
3019	$3^7+2^{10}-2^7-2^6$	3023	$2^{11}+3^6+3^5+3^1$	3037	$2^{11}+3^6+2^8+2^2$	3041	$2^{11}+3^6+2^8+2^3$
3049	$2^{11}+3^6+2^8+2^4$	3061	$2^{11}+2^{10}-3^2-2^1$	3067	$2^{11}+2^{10}-3^2+2^2$	3079	$2^{11}+2^{10}-3^2+2^4$
3083	$2^{11}+2^{10}+3^2+2^1$	3089	$2^{11}+2^{10}+3^2+2^3$	3109	$2^{11}+2^{10}+2^6-3^3$	3119	$2^{12}-3^6-2^8+2^3$
3121	$2^{11}+2^{10}+3^4-2^5$	3137	$2^{11}+2^{10}+3^4-2^4$	3163	$3^7+2^{10}-2^5-2^4$	3167	$3^7+3^6+3^5+2^3$
3169	$3^7+3^6+2^8-3^1$	3181	$3^7+3^6+2^8+3^2$	3187	$3^7+2^{10}-3^3+3^1$	3191	$3^7+2^{10}-2^4-2^2$
3203	$3^7+2^{10}-2^3$	3209	$3^7+2^{10}-2^1$	3217	$3^7+2^{10}+2^2+2^1$	3221	$3^7+2^{10}+3^2+2^0$
3229	$3^7+2^{10}+2^4+2^1$	3251	$3^7+2^{10}+2^5+2^3$	3253	$3^7+3^6+2^8+3^4$	3257	$2^{11}+3^6+2^9-2^5$
3259	$3^7+2^{10}+2^5+2^4$	3271	$3^7+2^{10}+2^6-2^2$	3299	$2^{12}-3^6-2^6-2^2$	3301	$2^{12}-3^6-2^6-2^1$
3307	$2^{12}-3^6-2^6+2^2$	3313	$2^{11}+2^{10}+3^5-2^1$	3319	$2^{11}+2^{10}+3^5+2^2$	3323	$2^{11}+2^{10}+3^5+2^3$
3329	$2^{11}+2^{10}+2^8+3^0$	3331	$2^{11}+2^{10}+2^8+3^1$	3343	$2^{12}-3^6-3^3+3^1$	3347	$2^{12}-3^6-2^4-2^2$
3359	$2^{12}-3^6-2^3$	3361	$2^{12}-3^6-2^2-2^1$	3371	$2^{12}-3^6+2^2$	3373	$2^{12}-3^6+2^2+2^1$
3389	$3^9-2^{14}+3^4+3^2$	3391	$2^{12}-3^6+3^3-3^1$	3407	$2^{12}-3^6+2^5+2^3$	3413	$3^7+3^6+3^5+2^8-2^1$
3433	$2^{12}-3^6+2^6+2^1$	3449	$2^{12}-3^6+3^4+3^0$	3457	$2^{12}-3^6+3^4+3^2$	3461	$3^7+2^{10}+2^8-2^2-2^1$
3463	$3^7+2^{10}+2^8-2^2$	3467	$3^7+2^{10}+2^8$	3469	$3^7+2^{10}+2^8+2^1$	3491	$2^{12}-3^6+2^7-2^2$
3499	$2^{12}-3^6+2^7+2^2$	3511	$2^{12}-3^6+2^7+2^4$	3517	$2^{12}-2^9-2^6-3^1$	3527	$2^{12}-3^6+2^7+2^5$
3529	$2^{12}-3^6+3^5-3^4$	3533	$2^{12}-2^9-3^4+2^5-2^1$	3539	$2^{12}-2^9-3^4+2^5+2^2$	3541	$2^{12}-2^9-3^3-2^4$
3547	$2^{12}-2^9-2^6+3^3$	3557	$2^{12}-2^9-3^3$	3559	$2^{12}-2^9-3^3+2^1$	3571	$2^{12}-2^9-2^2-3^2$

透過上面分析，我們可以發現以下狀況：

(一)對前 500 個質數來說，都可以用質數 2、3 及其次方數組合而成

(二)隨著數字變大，所要組合的次方數個數也會變多

(三)在計算過程中，53、199、3413 等三個數字，是尋找 2、3 及其次方數組合的過程中，次方數個數變化的關鍵點

針對上述的分析，是否可類推到之後的質數，又或者所需的次方數個數是否會再增加，是值得我們以後努力的方向，以上為此階段的討論狀況。

伍、討論

- 一、除了質數 2 以外，未滿 10 的質數不管幾次方，除以 2 的餘數永遠為 1。
- 二、未滿 10 的質數的次方數，扣掉有因數關係的除數，會在十二次方後，餘數皆同時循環。
- 三、對超過 10 的質數來說，當它除以 2~9 的餘數為 1 時，不管幾次方，除以相同除數的餘數永遠為 1。
- 四、超過 10 的質數的次方數，除以 2~9 時，會在十二次方後，餘數皆同時循環。
- 五、對前 500 個質數來說，都可以用質數 2、3 及其次方數組合而成，且隨著數字變大，所要組合的次方數個數也會變多。
- 六、53、199、3413 等三個數字，是質數尋找 2、3 及其次方數組合的過程中，組合數個數變化的關鍵點。

陸、結論

對質數來說，長久以來不少數學家前仆後繼，就是希望能為它找到更多的特性。或許每次的發現都要花上不少時間，但這也是數學解祕的有趣之處。這次我們的研究只是回歸簡單思考，希望能從單純的模式，為質數的特性找出蛛絲馬跡。和數學家建立的成就或許不值得一提，但如同老師所說的，數學總是在看似平凡處，隱藏著不平凡的道理。若我們的討論，能讓大家對質數有更進一步的了解，相信這對算得焦頭爛額的我們來說，就是我們在這次研究中最大的收穫。

柒、參考資料及其他

康軒版六上數學第一單元-最大公因數與最小公倍數

昌爸工作坊(無日期)。設計一個質數猜數的小遊戲。取自

<http://www.mathland.idv.tw/fun/primesquare.htm>

數學王子(2000 年 8 月 20 日)。由「質數」欣賞數學世界。取自 <http://euler.tn.edu.tw/think32.htm>