

屏東縣第 64 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：「鳩占鵲巢」之延伸與研究

關 鍵 詞：排列順序、餵食順序、喜鵲編號

編 號：B1001

摘要

本研究自科學研習雙月刊第 62 卷第 2 期中森棚教官的數學專欄「鳩占鵲巢」得到啟發。有 n 隻喜鵲和 1 隻斑鳩，每隻喜鵲都有各自的編號，按順序 1、2.....到第 n 隻，斑鳩的編號為 0，當要把食物給下一隻喜鵲時會按自己的編號跳過等數量的喜鵲，如果餵到斑鳩就結束。我們先以順時針編號的排序去餵食，發現無法一次餵食完全部 5 隻喜鵲，進而證明在 n 為大於 1 的奇數的情況下，無法一次餵食完全部 n 隻喜鵲。接著，我們改變編號的排序去餵食，發現可以一次餵食完全部 5 隻喜鵲，進而證明在 n 為大於 1 的奇數的情況下，可以一次餵食完全部 n 隻喜鵲的方法數。最後，我們以順時針編號的排序去餵食，找出在 n 為偶數的情況下，一次和多次餵食完全部喜鵲的 n 和其餵食順序。

壹、前言

一、研究動機

在上數學課時，老師帶我們玩一個餵食喜鵲和斑鳩的遊戲，遊戲規則如下：



森棚教官數學題——鳩占鵲巢

文／游森棚

鳥窩裡有五隻小喜鵲，以及一隻混進來的小斑鳩。這六隻小鳥圍成一圈，小斑鳩編號是 0，接著沿著圓周五隻喜鵲順時針座號為 1, 2, 3, 4, 5。

視力不好的喜鵲媽媽帶著五份食物回來，她餵食的方法相當有趣：首先她選一隻小鳥餵食，假設這隻小鳥的座號是 k ，下一隻被餵食的鳥是由這隻鳥開始，順時針接著沿著圓周數的第 k 隻鳥。然後看這隻鳥的編號是多少（比如說是 r ），再由這隻鳥開始沿著圓周數的第 r 隻鳥就是下一隻被餵食的鳥，以此類推。但是如果餵食到斑鳩，食量大的斑鳩會馬上把所有食物吃光。

因此，如果一開始喜鵲媽媽選了 0 號斑鳩，那這樣所有小喜鵲都要餓肚子了。如果一開始喜鵲媽媽選了 2 號小鳥餵食，則會有兩隻小喜鵲吃到食物，餵食順序是

2 → 4 → 2 → 4 → 2

如果一開始喜鵲媽媽選了 3 號小鳥餵食，則只有這隻小喜鵲吃到食物，因為餵食順序是

3 → 0

- 1 喜鵲媽媽要從幾號小鳥開始餵，會讓最多小喜鵲吃到食物？
- 2 承上題，吃最多份食物的小喜鵲吃了幾份食物？
- 3 你能不能幫五隻小喜鵲的位置排一個順序，使得喜鵲媽媽從某一隻開始餵食時，會讓五隻小喜鵲都吃到食物，但是小斑鳩沒吃到？

這個遊戲引起了我們的興趣和好奇心，便想繼續探索其中的奧秘，於是就開啟了我們的研究之旅。

二、目的

- (一)若有 5 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 5 順時針編號排列順序，找出能讓最多喜鵲吃到食物的餵食順序？並找出吃最多份食物的喜鵲吃了幾份？
- (二)若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為大於 1 的奇數的情況下，找出一次餵食完全部喜鵲的 n 和其餵食順序？
- (三)若有 5 份食物，重新找出 5 隻喜鵲的排列順序，使 5 隻喜鵲皆可以吃到食物，但斑鳩無法吃到？
- (四)若有 n 份食物，在 n 為大於 1 的奇數的情況下，重新找出 n 隻喜鵲的排列順序，使 n 隻喜鵲皆可以吃到食物，但斑鳩無法吃到的方法數？
- (五)若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為偶數的情況下，找出一次餵食完全部喜鵲的 n 和其餵食順序？
- (六)若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為偶數的情況下，找出多次餵食完全部喜鵲的 n 和其餵食順序？

三、文獻回顧

我們上網搜尋資料做文獻探討時，找到了一篇和我們研究題目有相關的報告：

- (一)Discrete Applied Mathematics 159 <Permuting operations on strings and their relation to prime numbers>。

在這篇報告的 P1916-1917 中有列出可以一次循環的偶數數字集合 {2、4、10、12、18、28、36、52、58、60、66、82、100.....}，和我們研究目的(五)的發現是相同的，但是我們有多做研究目的(六)的多次循環的偶數數字集合。

貳、研究設備及器材

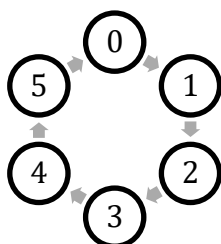
電腦、紙、筆。

參、研究過程或方法

【名詞定義】：

- (一) $m-n$ ：先排列編號為 m 的喜鵲，再排列編號為 n 的喜鵲，即排列順序。
- (二) $m \rightarrow n$ ：先餵食編號為 m 的喜鵲，再餵食編號為 n 的喜鵲，即餵食順序。
- (三) $P(n, k, m)$ ：有 n 隻喜鵲，由 k 號喜鵲開始餵食，第 m 隻被餵食的喜鵲編號。

一、若有 5 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 5 順時針編號排列順序，找出能讓最多喜鵲吃到食物的餵食順序？並找出吃最多份食物的喜鵲吃了幾份？



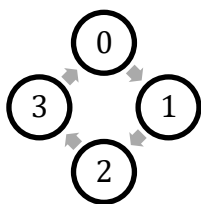
【結果 1】：由上圖，我們得到 5 種餵食順序：

餵食順序	餵食結果	吃最多喜鵲	份數
1→2→4→2→4	3 隻喜鵲吃到食物	2、4 號	2 份
2→4→2→4→2	2 隻喜鵲吃到食物	2 號	3 份
3→0	1 隻喜鵲吃到食物	3 號	1 份
4→2→4→2→4	2 隻喜鵲吃到食物	4 號	3 份
5→4→2→4→2	3 隻喜鵲吃到食物	2、4 號	2 份

並得知無法一次餵食完全部喜鵲，但 2 號和 4 號喜鵲有機會吃到最多 3 份食物。

二、若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為大於 1 的奇數的情況下，找出一一次餵食完全部喜鵲的 n 和其餵食順序？

(一) $n=3$



由上圖，我們得到 3 種餵食順序：

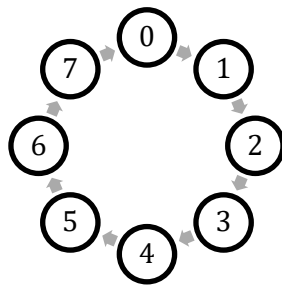
餵食順序	餵食結果	吃最多喜鵲	份數
1→2→0	2 隻喜鵲吃到食物	1、2 號	1 份
2→0	1 隻喜鵲吃到食物	2 號	1 份
3→2→0	2 隻喜鵲吃到食物	2、3 號	1 份

並得知無法一次餵食完全部喜鵲，但每隻喜鵲都有機會吃到最多 1 份食物。

(二) $n=5$

由目的一得知無法一次餵食完全部喜鵲，但 2 號和 4 號喜鵲有機會吃到最多 3 份食物。

(三) n=7

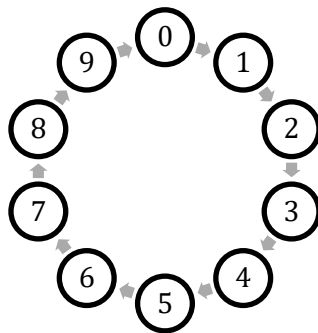


由上圖，我們得到 7 種餵食順序：

餵食順序	餵食結果	吃最多喜鵲	份數
1→2→4→0	3 隻喜鵲吃到食物	1、2、4 號	1 份
2→4→0	2 隻喜鵲吃到食物	2、4 號	1 份
3→6→4→0	3 隻喜鵲吃到食物	3、4、6 號	1 份
4→0	1 隻喜鵲吃到食物	4 號	1 份
5→2→4→0	3 隻喜鵲吃到食物	2、4、5 號	1 份
6→4→0	2 隻喜鵲吃到食物	4、6 號	1 份
7→6→4→0	3 隻喜鵲吃到食物	4、6、7 號	1 份

並得知無法一次餵食完全部喜鵲，但每隻喜鵲都有機會吃到最多 1 份食物。

(四) n=9



由上圖，我們得到 9 種餵食順序：

餵食順序	餵食結果	吃最多喜鵲	份數
1→2→4→8→6→2→4→8→6	5 隻喜鵲吃到食物	2、4、6、8 號	2 份
2→4→8→6→2→4→8→6→2	4 隻喜鵲吃到食物	2 號	3 份
3→6→2→4→8→6→2→4→8	5 隻喜鵲吃到食物	2、4、6、8 號	2 份
4→8→6→2→4→8→6→2→4	4 隻喜鵲吃到食物	4 號	3 份

5→0	1 隻喜鵲吃到食物	5 號	1 份
6→2→4→8→6→2→4→8→6	4 隻喜鵲吃到食物	6 號	3 份
7→4→8→6→2→4→8→6→2	5 隻喜鵲吃到食物	2、4、6、8 號	2 份
8→6→2→4→8→6→2→4→8	4 隻喜鵲吃到食物	8 號	3 份
9→8→6→2→4→8→6→2→4	5 隻喜鵲吃到食物	2、4、6、8 號	2 份

並得知無法一次餵食完全部喜鵲，但 2、4、6、8 號喜鵲有機會吃到最多 3 份食物。

由(一)到(四)的結果，我們可以得到：

【推論 2】：

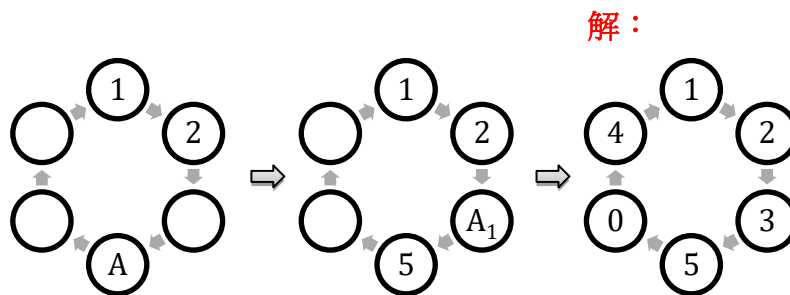
若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為大於 1 的奇數的情況下，無法找出一一次餵食完全部喜鵲的 n 和其餵食順序。

【證明 2】：

當 n 為大於 1 的奇數時，令 k 為整數且 $1 \leq k \leq n$ ，則餵食順序 $k \rightarrow 2k$ (或 $2k - (n+1)$)， $2k$ 或 $2k - (n+1)$ 皆為偶數，所以奇數號喜鵲最多只被餵食 1 隻，但因奇數號喜鵲最少有 2 隻，故無法一次餵食完全部喜鵲。

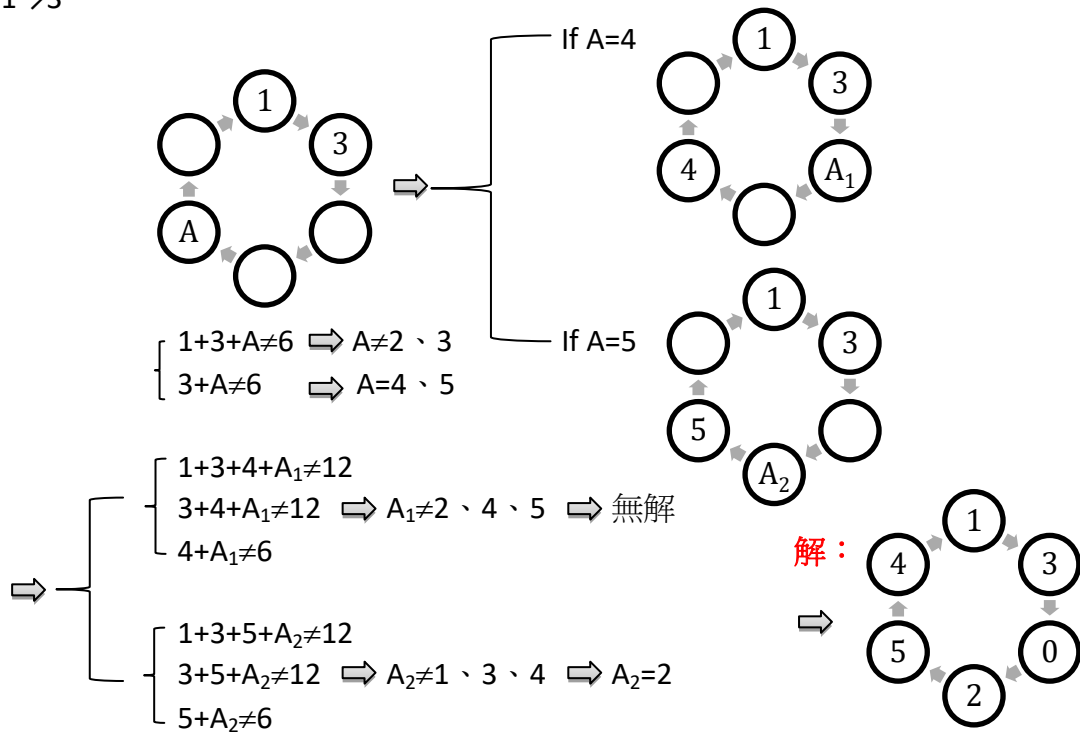
三、若有 5 份食物，重新找出 5 隻喜鵲的排列順序，使 5 隻喜鵲皆可以吃到食物，但斑鳩無法吃到？

(一) 1→2

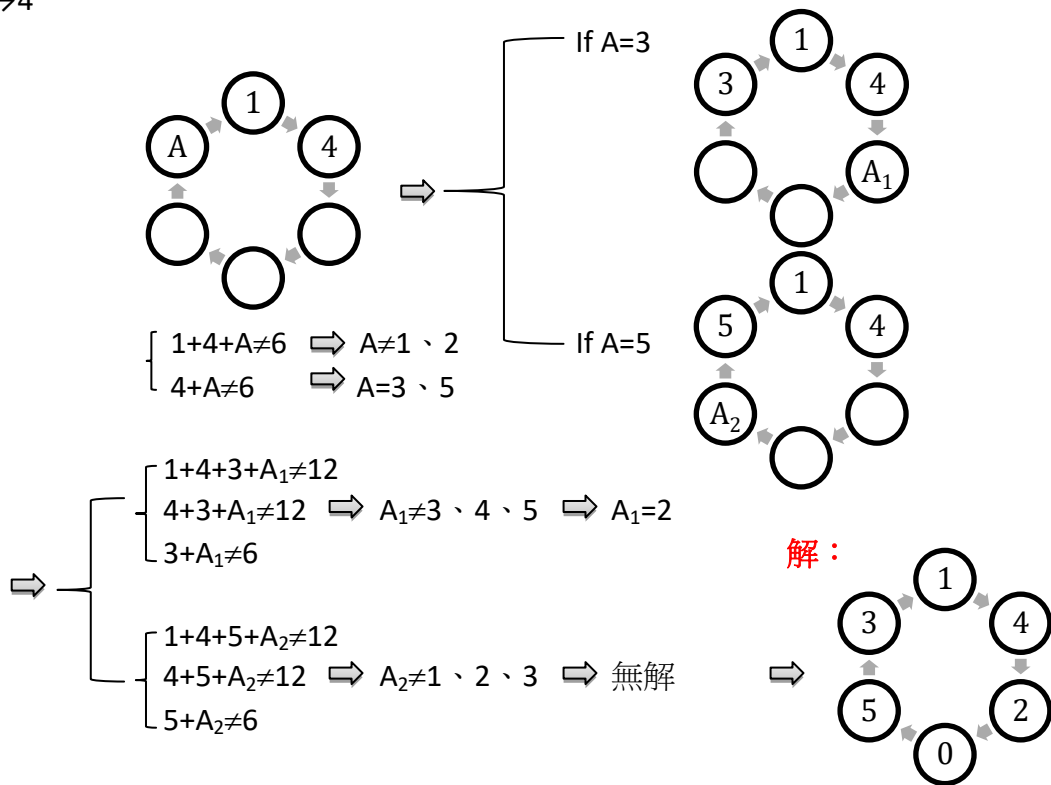


$$\begin{cases} 1+2+A \neq 6 \\ 2+A \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A \neq 3, 4 \Rightarrow A=5 \Rightarrow \begin{cases} 1+2+5+A_1 \neq 12 \\ 2+5+A_1 \neq 12 \\ 5+A_1 \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A_1 \neq 1, 4, 5 \Rightarrow A_1=3$$

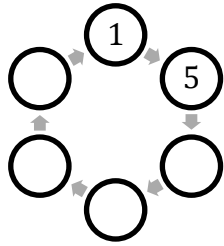
(二) 1→3



(三) 1→4

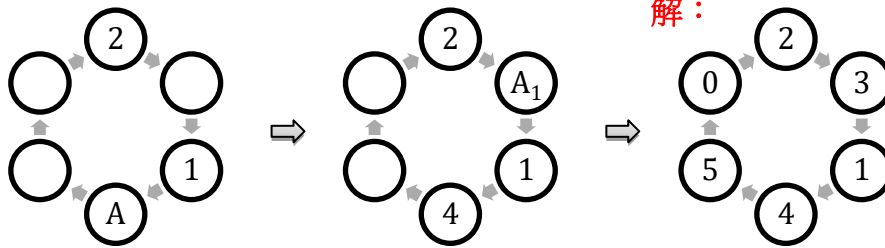


(四) 1→5



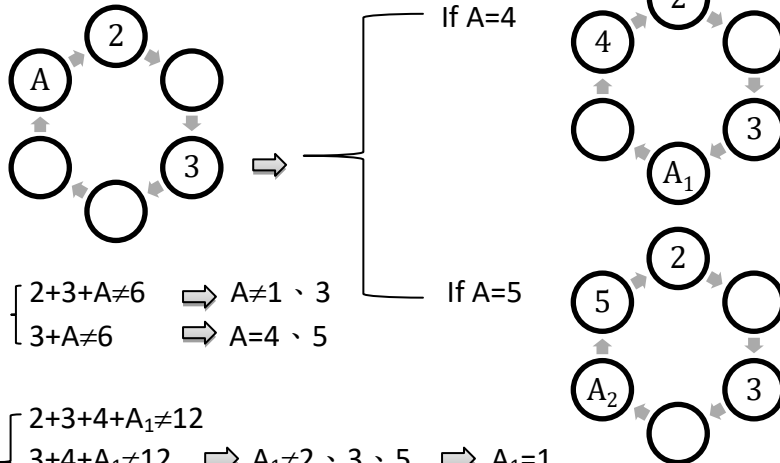
1+5=6，會形成 1→5→1→5.....無限循環，因此無解。

(五) 2→1



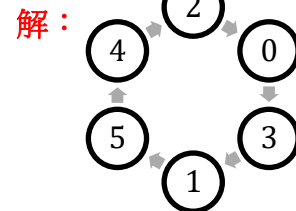
$$\begin{cases} 2+1+A \neq 6 \\ 1+A \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A \neq 3, 5 \Rightarrow A=4 \Rightarrow \begin{cases} 2+1+4+A_1 \neq 12 \\ 1+4+A_1 \neq 6 \\ 4+A_1 \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A_1 \neq 1, 2, 5 \Rightarrow A_1=3$$

(六) 2→3

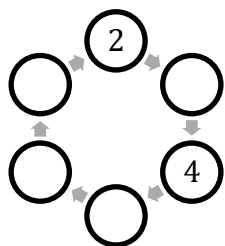


$$\begin{cases} 2+3+A \neq 6 \\ 3+A \neq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A \neq 1, 3 \\ A = 4, 5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2+3+4+A_1 \neq 12 \\ 3+4+A_1 \neq 12 \\ 4+A_1 \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A_1 \neq 2, 3, 5 \Rightarrow A_1=1 \\ \begin{cases} 2+3+5+A_2 \neq 12 \\ 3+5+A_2 \neq 12 \\ 5+A_2 \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A_2 \neq 1, 2, 4 \Rightarrow \text{無解} \end{cases}$$



(七) 2→4



2+4=6，會形成 2→4→2→4.....無限循環，因此無解。

(八) 2→5

$$\begin{cases} 2+5+A \neq 12 \Rightarrow A \neq 1, 5 \\ 5+A \neq 6 \Rightarrow A = 3, 4 \end{cases}$$

If A=3

If A=4

$$\begin{cases} 2+5+3+A_1 \neq 12 \\ 5+3+A_1 \neq 12 \Rightarrow A_1 \neq 2, 3, 4 \Rightarrow A_1 = 1 \\ 3+A_1 \neq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+5+4+A_2 \neq 12 \\ 5+4+A_2 \neq 12 \Rightarrow A_2 \neq 1, 2, 3 \Rightarrow \text{無解} \\ 4+A_2 \neq 6 \end{cases}$$

解：

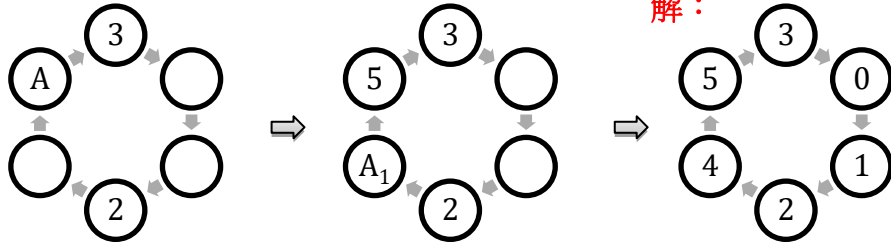
(九) 3→1

$$\begin{cases} 3+1+A \neq 6 \Rightarrow A \neq 2, 5 \Rightarrow A = 4 \\ 1+A \neq 6 \end{cases}$$

解：

$$\begin{cases} 3+1+4+A_1 \neq 12 \\ 1+4+A_1 \neq 6 \Rightarrow A_1 \neq 1, 2, 4 \Rightarrow A_1 = 5 \\ 4+A_1 \neq 6 \end{cases}$$

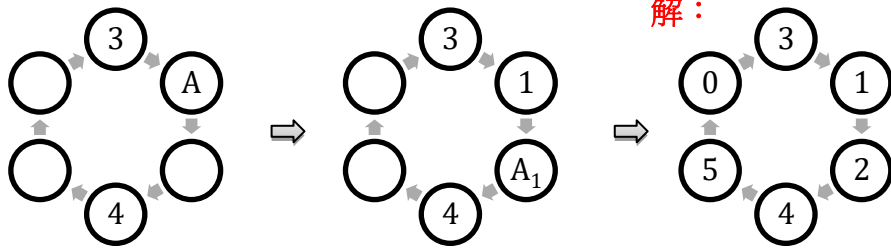
(十) 3→2



$$\begin{cases} 3+2+A \neq 6 \\ 2+A \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A \neq 1, 4 \Rightarrow A=5 \quad \Rightarrow \begin{cases} 3+2+5+A_1 \neq 12 \\ 2+5+A_1 \neq 12 \\ 5+A_1 \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A_1 \neq 1, 2, 5 \Rightarrow A_1=4$$

解:

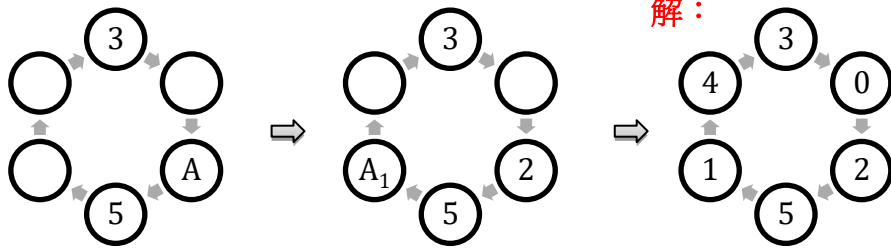
(十一) 3→4



$$\begin{cases} 3+4+A \neq 12 \\ 4+A \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A \neq 2, 5 \Rightarrow A=1 \quad \Rightarrow \begin{cases} 3+4+1+A_1 \neq 12 \\ 4+1+A_1 \neq 6 \\ 1+A_1 \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A_1 \neq 1, 4, 5 \Rightarrow A_1=2$$

解:

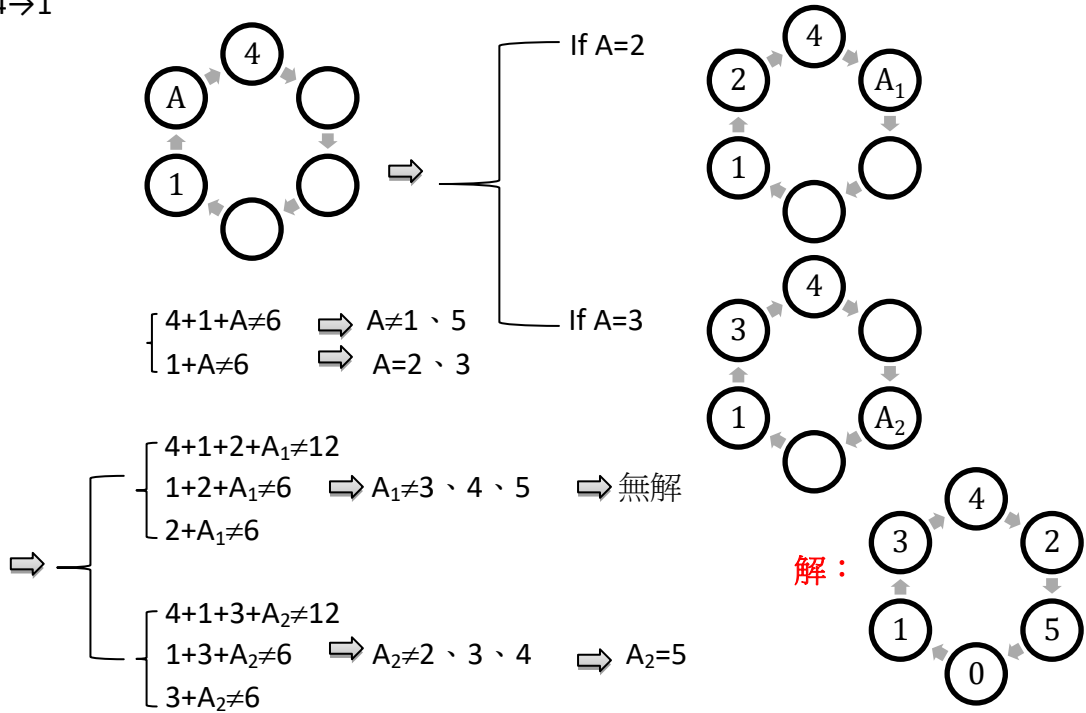
(十二) 3→5



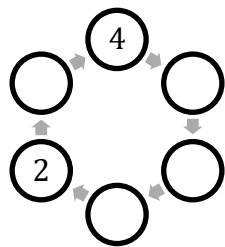
$$\begin{cases} 3+5+A \neq 12 \\ 5+A \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A \neq 1, 4 \Rightarrow A=2 \quad \Rightarrow \begin{cases} 3+5+2+A_1 \neq 12 \\ 5+2+A_1 \neq 12 \\ 2+A_1 \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A_1 \neq 2, 4, 5 \Rightarrow A_1=1$$

解:

(十三) 4→1

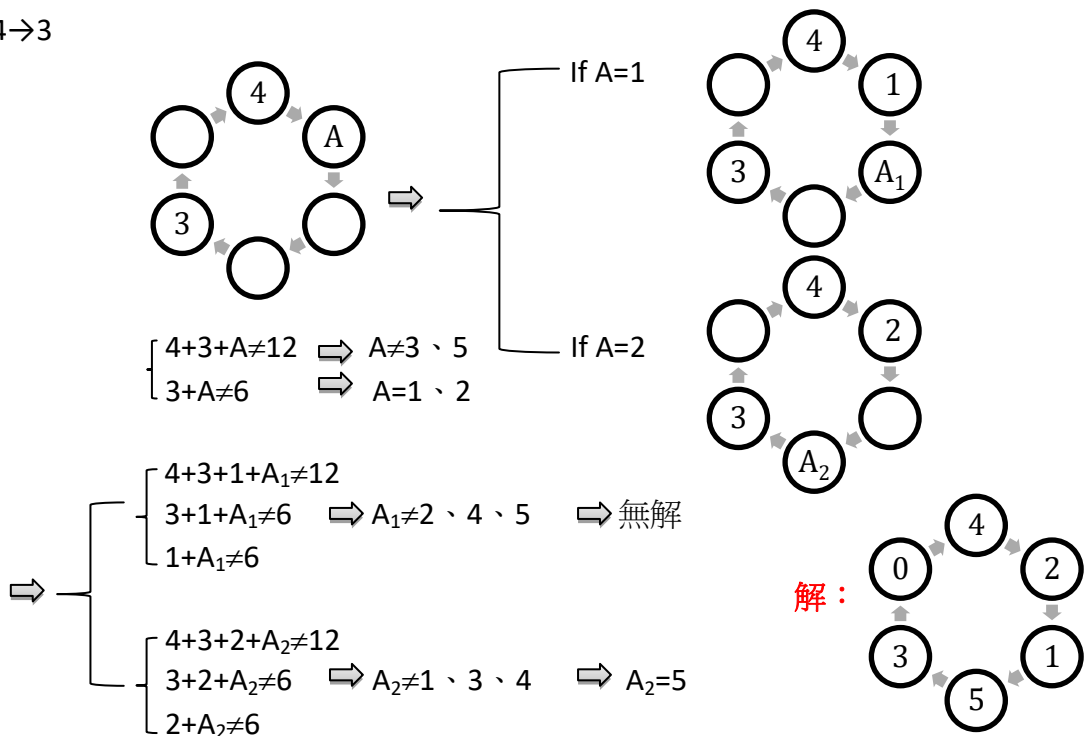


(十四) 4→2

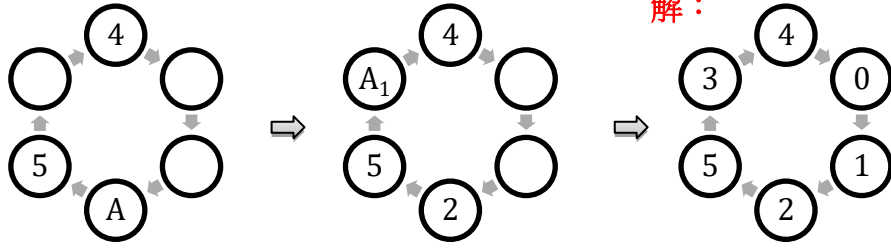


4+2=6，會形成 4→2→4→2.....無限循環，因此無解。

(十五) 4→3



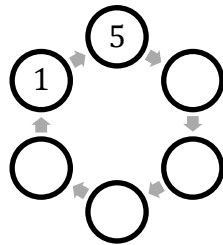
(十六) 4→5



解:

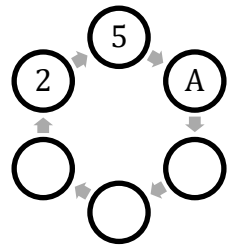
$$\begin{cases} 4+5+A \neq 12 \\ 5+A \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A \neq 1, 3 \Rightarrow A=2 \quad \Rightarrow \begin{cases} 4+5+2+A_1 \neq 12 \\ 5+2+A_1 \neq 12 \\ 2+A_1 \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A_1 \neq 1, 4, 5 \Rightarrow A_1=3$$

(十七) 5→1



5+1=6，會形成 5→1→5→1.....無限循環，因此無解。

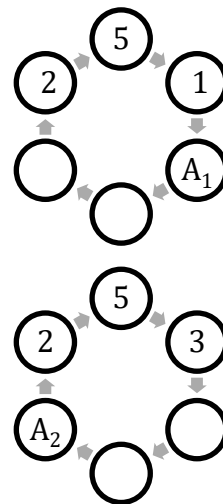
(十八) 5→2



$$\begin{cases} 5+2+A \neq 12 \\ 2+A \neq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \neq 4, 5 \\ A = 1, 3 \end{cases}$$

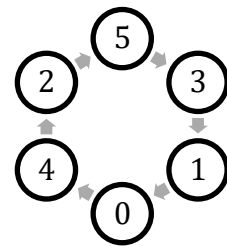
If A=1

If A=3

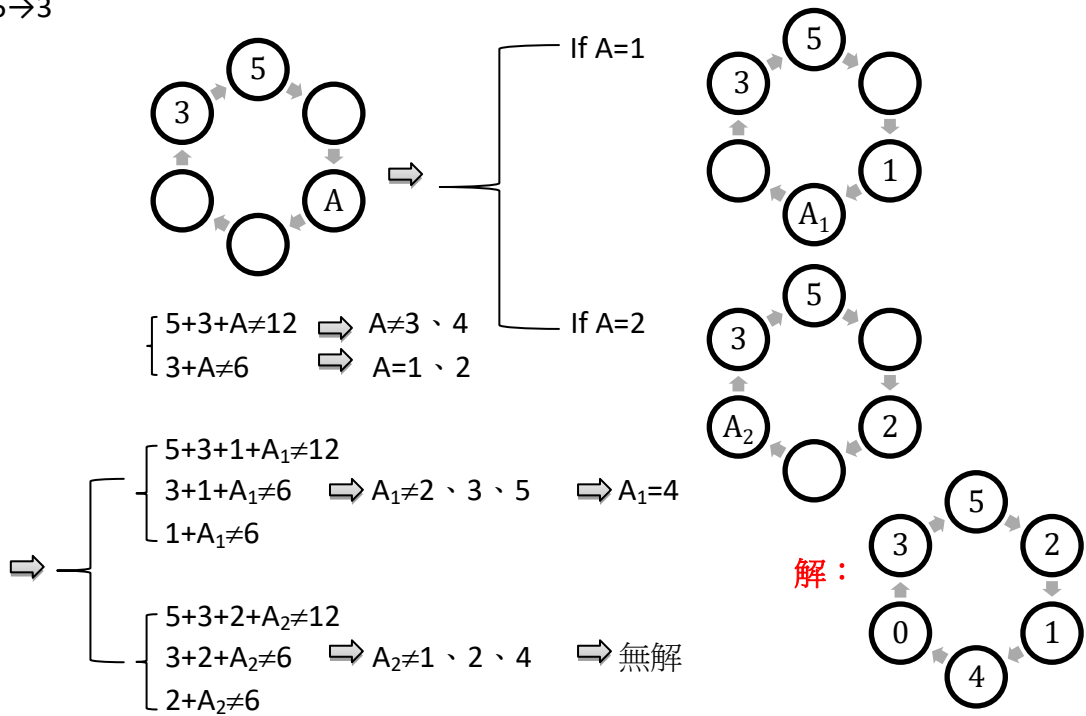


$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5+2+1+A_1 \neq 12 \\ 2+1+A_1 \neq 6 \\ 1+A_1 \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A_1 \neq 3, 4, 5 \Rightarrow \text{無解} \\ \begin{cases} 5+2+3+A_2 \neq 12 \\ 2+3+A_2 \neq 6 \\ 3+A_2 \neq 6 \end{cases} \Rightarrow A_2 \neq 1, 2, 3 \Rightarrow A_2=4 \end{cases}$$

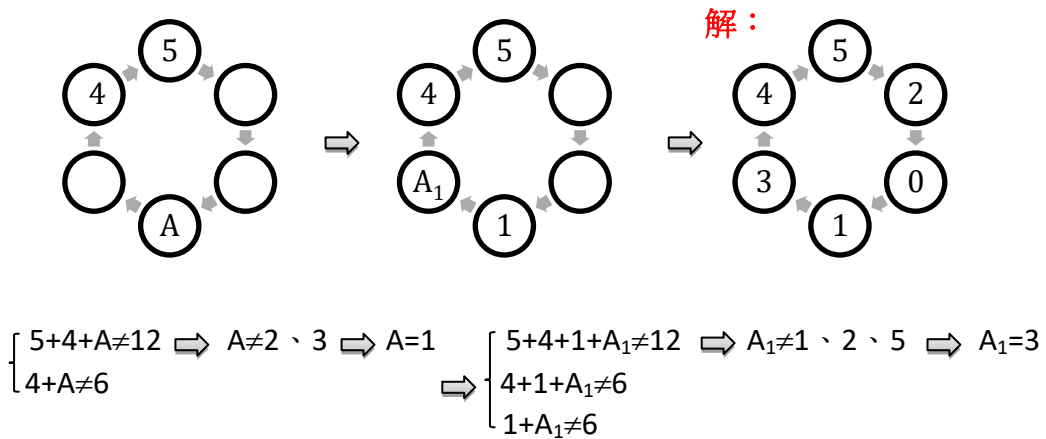
解:



(十九) 5→3



(二十) 5→4



【結果 3】：我們將以上 20 組排序方式整理成表格如下：

餵食順序	排列順序
1→2→5→3→4	1-2-3-5-0-4
1→3→5→2→4	1-3-0-2-5-4
1→4→3→2→5	1-4-2-0-5-3
1→5	無解(1+5=6)
2→1→4→3→5	2-3-1-4-5-0
2→3→4→1→5	2-0-3-1-5-4
2→4	無解(2+4=6)
2→5→3→1→4	2-3-5-0-1-4
3→1→4→5→2	3-2-5-1-4-0
3→2→5→4→1	3-0-1-2-4-5

3→4→1→2→5	3-1-2-4-5-0
3→5→2→1→4	3-0-2-5-1-4
4→1→3→5→2	4-2-5-0-1-3
4→2	無解(4+2=6)
4→3→2→5→1	4-2-1-5-3-0
4→5→2→3→1	4-0-1-2-5-3
5→1	無解(5+1=6)
5→2→3→4→1	5-3-1-0-4-2
5→3→1→4→2	5-2-1-4-0-3
5→4→1→3→2	5-2-0-1-3-4

我們一共找出 16 組排列順序能一次餵食完全部喜鵲，並發現若第一和第二隻餵食的喜鵲編號和為 6，則會造成兩數無限循環，無法餵食完全部喜鵲。

四、若有 n 份食物，在 n 為大於 1 的奇數的情況下，重新找出 n 隻喜鵲的排列順序，使 n 隻喜鵲皆可以吃到食物，但斑鳩無法吃到的方法數？

(一) $n=3$

我們將找出的 6 組排序方式整理成表格如下：

餵食順序	排列順序
1→2→3	1-2-0-3
1→3	無解(1+3=4)
2→1→3	2-0-1-3
2→3→1	2-1-3-0
3→1	無解(3+1=4)
3→2→1	3-1-0-2

我們一共找出 $2 \times 3 - 2 = 4$ 組排列順序能一次餵食完全部喜鵲，並發現若第一和第二隻餵食的喜鵲編號和為 4，則會造成兩數無限循環，無法餵食完全部喜鵲。

(二) $n=5$

由目的三我們一共找出 $4 \times 5 - 4 = 16$ 組排列順序能一次餵食完全部喜鵲，並發現若第一和第二隻餵食的喜鵲編號和為 6，則會造成兩數無限循環，無法餵食完全部喜鵲。

(三) $n=7$

我們將找出的 182 組排序方式整理成表格如下：(完整表格請見附件一)

餵食順序	排列順序
1→2→3→4→5→6→7	1-2-5-3-0-7-4-6
1→2→4→5→6→3→7	1-2-3-4-6-7-0-5
1→2→7→4→6→3→5	1-2-4-7-3-0-6-5

1→3→2→4→5→6→7	1-3-5-0-2-7-4-6
1→3→2→5→4→6→7	1-3-0-4-2-7-5-6
1→3→2→7→6→4→5	1-3-0-4-2-6-7-5
1→3→6→4→5→2→7	1-3-4-2-6-7-5-0
1→3→6→4→7→2→5	1-3-4-0-6-2-7-5
1→3→6→5→4→2→7	1-3-5-2-6-7-0-4
1→3→7→2→5→4→6	1-3-4-2-7-5-6-0
1→3→7→4→6→5→2	1-3-2-4-7-5-0-6
1→4→2→5→7→3→6	1-4-0-3-7-2-6-5
1→4→5→2→3→7→6	1-4-2-0-3-5-6-7
1→4→5→2→7→3→6	1-4-2-3-7-5-6-0
1→4→6→7→2→3→5	1-4-2-7-3-6-0-5
1→5→4→2→3→6→7	1-5-2-0-3-7-4-6
1→5→6→3→4→2→7	1-5-0-2-3-7-6-4
1→5→6→3→4→7→2	1-5-2-7-3-0-6-4
1→5→6→7→4→3→2	1-5-2-4-7-0-6-3
1→5→7→6→4→3→2	1-5-2-4-0-6-7-3
1→6→3→4→5→2→7	1-6-4-2-0-7-5-3
1→6→4→3→7→5→2	1-6-2-3-0-5-7-4
1→6→5→2→4→3→7	1-6-3-0-2-7-4-5
1→6→5→7→3→4→2	1-6-2-3-7-0-4-5
1→7	無解(1+7=8)
.....
7→1	無解(7+1=8)
7→2→3→1→5→4→6	7-3-4-0-1-5-6-2
7→2→3→6→4→5→1	7-3-4-1-6-0-5-2
7→2→4→5→1→3→6	7-4-1-3-0-5-6-2
7→2→5→4→3→6→1	7-5-3-1-0-6-4-2
7→3→1→2→4→5→6	7-5-1-2-0-4-6-3
7→3→2→1→4→5→6	7-5-2-0-1-4-6-3
7→3→2→5→4→1→6	7-4-2-0-5-1-6-3
7→3→2→5→4→6→1	7-4-2-1-5-6-0-3
7→3→4→6→5→2→1	7-2-4-1-5-0-6-3
7→4→2→1→6→5→3	7-3-0-2-5-1-6-4
7→4→3→6→1→5→2	7-0-2-3-1-5-6-4
7→4→3→6→5→1→2	7-1-2-3-5-0-6-4
7→4→6→3→1→5→2	7-3-2-6-1-5-0-4
7→5→1→4→2→3→6	7-2-0-3-1-4-6-5
7→5→1→6→3→4→2	7-0-2-3-1-6-4-5
7→5→2→3→4→6→1	7-4-0-1-2-6-3-5

7→5→2→4→1→6→3	7-3-1-6-2-0-4-5
7→5→2→4→3→6→1	7-0-3-1-2-6-4-5
7→5→6→1→2→4→3	7-3-1-2-6-4-0-5
7→5→6→3→4→2→1	7-2-3-1-6-4-0-5
7→5→6→4→3→2→1	7-2-4-1-6-0-3-5
7→6→1→4→2→5→3	7-3-2-0-5-1-4-6
7→6→4→3→2→5→1	7-3-0-1-2-4-5-6
7→6→5→4→3→2→1	7-2-4-1-0-5-3-6

我們一共找出 $26 \times 7 - 6 = 176$ 組排列順序能一次餵食完全部喜鵲，並發現若第一和第二隻餵食的喜鵲編號和為 8，則會造成兩數無限循環，無法餵食完全部喜鵲。

(四) $n=9$

我們將找出的 2376 組排序方式整理成表格如下：

餵食順序	排列順序
1→2→3→6→5→8→4→9→7	1-2-5-3-0-4-6-8-7-9
1→2→3→6→5→8→9→4→7	1-2-5-3-4-9-6-8-7-0
1→2→3→6→7→5→4→9→8	1-2-7-3-4-0-6-8-9-5
1→2→3→8→4→9→5→7→6	1-2-7-3-4-0-8-5-9-6
1→2→3→9→4→5→8→6→7	1-2-6-3-8-4-9-0-7-5
1→2→3→9→4→8→5→6→7	1-2-6-3-0-4-9-5-7-8
1→2→4→5→7→6→3→8→9	1-2-7-4-0-3-9-5-8-6
1→2→4→7→5→3→6→8→9	1-2-6-4-5-0-9-7-8-3
1→2→4→7→5→6→3→8→9	1-2-0-4-5-3-9-7-8-6
1→2→4→7→5→9→8→6→3	1-2-3-4-5-0-6-7-8-9
.....
9→8→6→3→5→1→2→4→7	9-1-2-3-4-0-5-6-7-8
9→8→6→3→5→4→7→2→1	9-4-2-3-1-7-5-6-0-8
9→8→6→3→5→7→4→2→1	9-7-2-3-1-0-5-6-4-8
9→8→6→5→3→4→7→2→1	9-4-2-5-1-7-0-6-3-8
9→8→7→1→6→2→5→4→3	9-2-3-5-1-6-0-7-4-8
9→8→7→1→6→5→2→4→3	9-5-3-0-1-6-2-7-4-8
9→8→7→2→6→1→5→3→4	9-4-1-5-2-0-6-7-3-8
9→8→7→4→3→5→6→1→2	9-5-1-2-4-0-6-7-3-8
9→8→7→4→5→2→1→6→3	9-0-3-2-4-1-6-7-5-8
9→8→7→4→5→2→6→1→3	9-1-3-2-4-6-0-7-5-8

我們一共找出 $264 \times 9 - 8 = 2368$ 組排列順序能一次餵食完全部喜鵲，並發現若第一和第二隻餵食的喜鵲編號和為 10，則會造成兩數無限循環，無法餵食完全部喜鵲。

由(一)到(四)的結果，我們可以得到：

【推論 4.1】：

若有 n 份食物，在 n 為大於 1 且小於 10 的奇數的情況下，重新找出 n 隻喜鵲的排列順序，能夠使 n 隻喜鵲皆可以吃到食物，但斑鳩無法吃到，其方法數為 $pn-(n-1)$ ， p 為從每一隻喜鵲開始餵食的平均方法數。

【證明 4.1】：

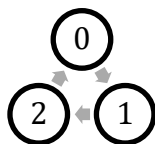
1. 當 $n=3$ ，從每一隻喜鵲開始餵食的平均方法數為 2，扣除第一和第二隻餵食的編號和為 4 的喜鵲有 2 隻，所以餵食的方法數為 $2 \times 3 - 2 = 4$ 。
2. 當 $n=5$ ，從每一隻喜鵲開始餵食的平均方法數為 4，扣除第一和第二隻餵食的編號和為 6 的喜鵲有 4 隻，所以餵食的方法數為 $4 \times 5 - 4 = 16$ 。
3. 當 $n=7$ ，從每一隻喜鵲開始餵食的平均方法數為 26，扣除第一和第二隻餵食的編號和為 8 的喜鵲有 6 隻，所以餵食的方法數為 $26 \times 7 - 6 = 176$ 。
4. 當 $n=9$ ，從每一隻喜鵲開始餵食的平均方法數為 264，扣除第一和第二隻餵食的編號和為 10 的喜鵲有 8 隻，所以餵食的方法數為 $264 \times 9 - 8 = 2368$ 。

【推測 4.2】：

若有 n 份食物，在 n 為大於 10 的奇數的情況下，重新找出 n 隻喜鵲的排列順序，能夠使 n 隻喜鵲皆可以吃到食物，但斑鳩無法吃到，其方法數為 $pn-(n-1)$ ， p 為從每一隻喜鵲開始餵食的平均方法數。

五、若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為偶數的情況下，找出一次餵食完全部喜鵲的 n 和其餵食順序？。

(一) $n=2$

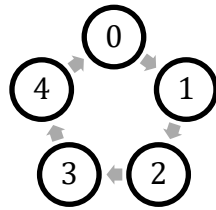


由上圖，我們得到 2 種餵食順序：

餵食順序	餵食結果
1→2	2 隻喜鵲吃到食物
2→1	2 隻喜鵲吃到食物

並得知可以一次餵食完全部喜鵲。

(二) n=4

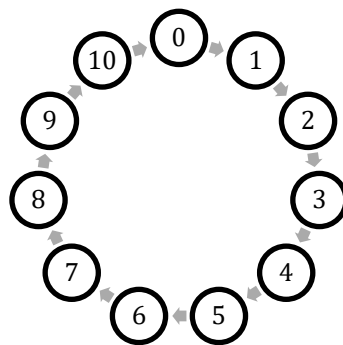


由上圖，我們得到 4 種餵食順序：

餵食順序	餵食結果
1→2→4→3	4 隻喜鵲吃到食物
2→4→3→1	4 隻喜鵲吃到食物
3→1→2→4	4 隻喜鵲吃到食物
4→3→1→2	4 隻喜鵲吃到食物

並得知可以一次餵食完全部喜鵲。

(三) n=10



由上圖，我們得到 10 種餵食順序：

餵食順序	餵食結果
1→2→4→8→5→10→9→7→3→6	10 隻喜鵲吃到食物
2→4→8→5→10→9→7→3→6→1	10 隻喜鵲吃到食物
3→6→1→2→4→8→5→10→9→7	10 隻喜鵲吃到食物
4→8→5→10→9→7→3→6→1→2	10 隻喜鵲吃到食物
5→10→9→7→3→6→1→2→4→8	10 隻喜鵲吃到食物
6→1→2→4→8→5→10→9→7→3	10 隻喜鵲吃到食物
7→3→6→1→2→4→8→5→10→9	10 隻喜鵲吃到食物
8→5→10→9→7→3→6→1→2→4	10 隻喜鵲吃到食物
9→7→3→6→1→2→4→8→5→10	10 隻喜鵲吃到食物
10→9→7→3→6→1→2→4→8→5	10 隻喜鵲吃到食物

並得知可以一次餵食完全部喜鵲。

【結果 5.1】：由(一)到(三)的結果，我們可以繼續尋找 100 以內可以一次餵食完全部喜鵲的偶數 n ，並整理成下列表格：

n	餵食順序
2	1→2
4	1→2→4→3
10	1→2→4→8→5→10→9→7→3→6
12	1→2→4→8→3→6→12→11→9→5→10→7
18	1→2→4→8→16→13→7→14→9→18→17→15→11→3→6→12→5→10
28	1→2→4→8→16→3→6→12→24→19→9→18→7→14→28→27→25→21→13→26→23→17→5→10→20→11→22→15
36	1→2→4→8→16→32→27→17→34→31→25→13→26→15→30→23→9→18→36→35→33→29→21→5→10→20→3→6→12→24→11→22→7→14→28→19
52	1→2→4→8→16→32→11→22→44→35→17→34→15→30→7→14→28→3→6→12→24→48→43→33→13→26→52→51→49→45→37→21→42→31→9→18→36→19→38→23→46→39→25→50→47→41→29→5→10→20→40→27
58	1→2→4→8→16→32→5→10→20→40→21→42→25→50→41→23→46→33→7→14→28→56→53→47→35→11→22→44→29→58→57→55→51→43→27→54→49→39→19→38→17→34→9→18→36→13→26→52→45→31→3→6→12→24→48→37→15→30
60	1→2→4→8→16→32→3→6→12→24→48→35→9→18→36→11→22→44→27→54→47→33→5→10→20→40→19→38→15→30→60→59→57→53→45→29→58→55→49→37→13→26→52→43→25→50→39→17→34→7→14→28→56→51→41→21→42→23→46→31
66	1→2→4→8→16→32→64→61→55→43→19→38→9→18→36→5→10→20→40→13→26→52→37→7→14→28→56→45→23→46→25→50→33→66→65→63→59→51→35→3→6→12→24→48→29→58→49→31→62→57→47→27→54→41→15→30→60→53→39→11→22→44→21→42→17→34
82	1→2→4→8→16→32→64→45→7→14→28→56→29→58→33→66→49→15→30→60→37→74→65→47→11→22→44→5→10→20→40→80→77→71→59→35→70→57→31→62→41→82→81→79→75→67→51→19→38→76→69→55→27→54→25→50→17→34→68→53→23→46→9→18→36→72→61→39→78→73→63→43→3→6→12→24→48→13→26→52→21→42
100	1→2→4→8→16→32→64→27→54→7→14→28→56→11→22→44→88→75→49→98→95→89→77→53→5→10→20→40→80→59→17→34→68→35→70→39→78→55→9→18→36→72→43→86→71→41→82→63→25→50→100→99→97→93→85→69→37→74→47→94→87→73→45→90→79→57→13→26→52→3→6→12→24→48→96→91→81→61→21→42→84→67→33→66→31→62→23→46→92→83→65→29→58→15→30→60→19→38→76→51

由上列表格，我們可以得到：

【推論 5.2】：

若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為偶數的情況下，由 k 號喜鵲開始餵食，第 m 隻被餵食的喜鵲編號 $p(n, k, m) = 2^{m-1}k \pmod{n+1}$ 。

【證明 5.2】：

由 k 號喜鵲開始餵食，下一隻被餵食的喜鵲編號為 $2k$ ，再下一隻被餵食的喜鵲編號為 2^2k ，依此類推，第 m 隻被餵食的喜鵲編號為 $2^{m-1}k$ ，但有 n 隻喜鵲和 1 隻斑鳩，所以每 $n+1$ 隻循環一次，故得 $p(n, k, m) = 2^{m-1}k \pmod{n+1}$ 。

【推論 5.3】：

若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為偶數的情況下，絕對不會餵食到斑鳩。

【證明 5.3】：

若餵食到斑鳩，則 $p(n, k, m) = 2^{m-1}k \pmod{n+1} = 0$ 。

(1) $2^{m-1} = 0$ ，但 2 的次方 $\neq 0$ ，矛盾。

(2) $2^{m-1} \equiv 0 \pmod{n+1}$ ，但 2^{m-1} 是偶數， $n+1$ 是奇數，矛盾。

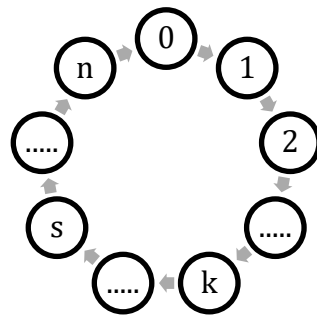
由反證法得 $p(n, k, m) = 2^{m-1}k \pmod{n+1} \neq 0$ ，故得證。

【推論 5.4】：

若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為偶數的情況下，由 k 號喜鵲開始餵食，最後一隻被餵食的喜鵲編號為 s 。

(1) 若 k 為奇數，則 $s = \frac{n+1+k}{2}$ ；(2) 若 k 為偶數，則 $s = \frac{k}{2}$ 。

【證明 5.4】：



因為喜鵲有 n 隻，斑鳩的位置 0 可以當作 $n+1$ ， k 號喜鵲的位置可以當作 $n+1+k$ ，餵食完最後一隻喜鵲 s ，如果要再繼續餵食，又會回到 k 號喜鵲，所以 k 號喜鵲的位置又可以當作 $2s$ 。

(1)若 k 為奇數，則 $2s=n+1+k$ ， $s = \frac{n+1+k}{2}$ 。

(2)若 k 為偶數，則 $2s= k$ ， $s = \frac{k}{2}$ 。

六、若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為偶數的情況下，找出多次餵食完全部喜鵲的 n 和其餵食順序？。

【結果 6】：

(一) 100 以內可以二次餵食完全部喜鵲的偶數 n

n	餵食順序
6	(1→2→4) (3→6→5)
8	(1→2→4→8→7→5) (3→6)
16	(1→2→4→8→16→15→13→9) (3→6→12→7→14→11→5→10)
22	(1→2→4→8→16→9→18→13→3→6→12) (5→10→20→17→11→22→21→19→15→7→14)
24	(1→2→4→8→16→7→14→3→6→12→24→23→21→17→9→18→11→22→19→13) (5→10→20→15)
40	(1→2→4→8→16→32→23→5→10→20→40→39→37→33→25→9→18→36→31→21) (3→6→12→24→7→14→28→15→30→19→38→35→29→17→34→27→13→26→11→22)
46	(1→2→4→8→16→32→17→34→21→42→37→27→7→14→28→9→18→36→25→3→6→12→24) (5→10→20→40→33→19→38→29→11→22→44→41→35→23→46→45→43→39→

	31→15→30→13→26)
70	(1→2→4→8→16→32→64→57→43→15→30→60→49→27→54→37→3→6→12→24→48→25→50→29→58→45→19→38→5→10→20→40→9→18→36) (7→14→28→56→41→11→22→44→17→34→68→65→59→47→23→46→21→42→13→26→52→33→66→61→51→31→62→53→35→70→69→67→63→55→39)
78	(1→2→4→8→16→32→64→49→19→38→76→73→67→55→31→62→45→11→22→44→9→18→36→72→65→51→23→46→13→26→52→25→50→21→42→5→10→20→40) (3→6→12→24→48→17→34→68→57→35→70→61→43→7→14→28→56→33→66→53→27→54→29→58→37→74→69→59→39→78→77→75→71→63→47→15→30→60→41)
96	(1→2→4→8→16→32→64→31→62→27→54→11→22→44→88→79→61→25→50→3→6→12→24→48→96→95→93→89→81→65→33→66→35→70→43→86→75→53→9→18→36→72→47→94→91→85→73→49) (5→10→20→40→80→63→29→58→19→38→76→55→13→26→52→7→14→28→56→15→30→60→23→46→92→87→77→57→17→34→68→39→78→59→21→42→84→71→45→90→83→69→41→82→67→37→74→51)

(二) 100 以內可以三次餵食完全部喜鵲的偶數 n

n	餵食順序
26	(1→2→4→8→16→5→10→20→13→26→25→23→19→11→22→17→7→14) (3→6→12→24→21→15) (9→18)
42	(1→2→4→8→16→32→21→42→41→39→35→27→11→22) (3→6→12→24→5→10→20→40→37→31→19→38→33→23) (7→14→28→13→26→9→18→36→29→15→30→17→34→25)

(三) 100 以內可以四次餵食完全部喜鵲的偶數 n

n	餵食順序
14	(1→2→4→8) (3→6→12→9) (5→10) (7→14→13→11)
32	(1→2→4→8→16→32→31→29→25→17) (3→6→12→24→15→30→27→21→9→18) (5→10→20→7→14→28→23→13→26→19) (11→22)
38	(1→2→4→8→16→32→20) (3→6→12→24→9→18→36→33→27→15→30→21) (7→14→28→17→34→29→19→38→37→35→31→23) (13→26)

48	(1→2→4→8→16→32→15→30→11→22→44→39→29→9→18→36→23→46→43→37→25) (3→6→12→24→48→47→45→41→33→17→34→19→38→27→5→10→20→40→31→13→26) (7→14→28) (21→42→35)
54	(1→2→4→8→16→32→9→18→36→17→34→13→26→52→49→43→31→7→14→28) (3→6→12→24→48→41→27→54→53→51→47→39→23→46→37→19→38→21→42→29) (5→10→20→40→25→50→45→35→15→30) (11→22→44→33)
56	(1→2→4→8→16→32→7→14→28→56→55→53→49→41→25→50→43→29) (3→6→12→24→48→39→21→42→27→54→51→45→33→9→18→36→15→30) (5→10→20→40→23→46→35→13→26→52→47→37→17→34→11→22→44→31) (19→38)
80	(1→2→4→8→16→32→64→47→13→26→52→23→46→11→22→44→7→14→28→56→31→62→43→5→10→20→40→80→79→77→73→65→49→17→34→68→55→29→58→35→70→59→37→74→67→53→25→50→19→38→76→71→61→41) (3→6→12→24→48→15→30→60→39→78→75→69→57→33→66→51→21→42) (9→18→36→72→63→45) (27→54)
86	(1→2→4→8→16→32→64→41→82→77→67→47→7→14→28→56→25→50→13→26→52→17→34→68→49→11→22→44) (3→6→12→24→48→9→18→36→72→57→27→54→21→42→84→81→75→63→39→78→69→51→15→30→60→33→66→45) (5→10→20→40→80→73→59→31→62→37→74→61→35→70→53→19→38→76→65→43→86→85→83→79→71→55→23→46) (29→58)
94	(1→2→4→8→16→32→64→33→66→37→74→53→11→22→44→88→81→67→39→78→61→27→54→13→26→52→9→18→36→72→49→3→6→12→24→48) (5→10→20→40→80→65→35→70→45→90→85→75→55→15→30→60→25→50) (7→14→28→56→17→34→68→41→82→69→43→86→77→59→23→46→92→89→83→71→47→94→93→91→87→79→63→31→62→29→58→21→42→84→73→51) (19→38→76→57)

(四) 100 以內可以五次餵食完全部喜鵲的偶數 n

n	餵食順序
20	(1→2→4→8→16→11) (3→6→12) (5→10→20→19→17→13) (7→14) (9→18→15)

34	(1→2→4→8→16→32→29→23→11→22→9→18) (3→6→12→24→13→26→17→34→33→31→27→19) (5→10→20) (7→14→28→21) (15→30→25)
68	(1→2→4→8→16→32→64→59→49→29→58→47→25→50→31→62→55→41→13→26→52→35) (3→6→12→24→48→27→54→39→9→18→36) (5→10→20→40→11→22→44→19→38→7→14→28→56→43→17→34→68→67→65→61→53→37) (15→30→60→51→33→66→63→57→45→21→42) (23→46)
76	(1→2→4→8→16→32→64→51→25→50→23→46→15→30→60→43→9→18→36→72→67→57→37→74→71→65→53→29→58→39) (3→6→12→24→48→19→38→76→75→73→69→61→45→13→26→52→27→54→31→62→47→17→34→68→59→41→5→10→20→40) (7→14→28→56→35→70→63→49→21→42) (11→22→44) (33→66→55)

(五) 100 以內可以六次餵食完全部喜鵲的偶數 n

n	餵食順序
30	(1→2→4→8→16) (3→6→12→24→17) (5→10→20→9→18) (7→14→28→25→19) (11→22→13→26→21) (15→30→29→27→23)
64	(1→2→4→8→16→32→64→63→61→57→49→33) (3→6→12→24→48→31→62→59→53→41→17→34) (5→10→20→40→15→30→60→55→45→25→50→35) (7→14→28→56→47→29→58→51→37→9→18→36) (11→22→44→23→46→27→54→43→21→42→19→38) (13→26→52→39)

(六) 100 以內可以七次餵食完全部喜鵲的偶數 n

n	餵食順序
44	(1→2→4→8→16→32→19→38→31→17→34→23) (3→6→12→24) (5→10→20→40→35→25) (7→14→28→11→22→44→43→41→37→29→13→26) (9→18→36→27)

	(15→30) (21→42→39→33)
50	(1→2→4→8→16→32→13→26) (3→6→12→24→48→45→39→27) (5→10→20→40→29→7→14→28) (9→18→36→21→42→33→15→30) (11→22→44→37→23→46→41→31) (17→34) (19→38→25→50→49→47→43→35)
74	(1→2→4→8→16→32→64→53→31→62→49→23→46→17→34→68→61→47→19→38) (3→6→12→24→48→21→42→9→18→36→72→69→63→51→27→54→33→66→57→39) (5→10→20→40) (7→14→28→56→37→74→73→71→67→59→43→11→22→44→13→26→52→29→58→41) (15→30→60→45) (25→50) (35→70→65→55)
98	(1→2→4→8→16→32→64→29→58→17→34→68→37→74→49→98→97→95→91→83→67→35→70→41→82→65→31→62→25→50) (3→6→12→24→48→96→93→87→75→51) (5→10→20→40→80→61→23→46→92→85→71→43→86→73→47→94→89→79→59→19→38→76→53→7→14→28→56→13→26→52) (9→18→36→72→45→90→81→63→27→54) (11→22→44→88→77→55) (15→30→60→21→42→84→69→39→78→57) (33→66)

(七) 100 以內可以八次餵食完全部喜鵲的偶數 n

n	餵食順序
72	(1→2→4→8→16→32→64→55→37) (3→6→12→24→48→23→46→19→38) (5→10→20→40→7→14→28→56→39) (9→18→36→72→71→69→65→57→41) (11→22→44→15→30→60→47→21→42) (13→26→52→31→62→51→29→58→43) (17→34→68→63→53→33→66→59→45) (25→50→27→54→35→70→67→61→49)
88	(1→2→4→8→16→32→64→39→78→67→45) (3→6→12→24→48→7→14→28→56→23→46) (5→10→20→40→80→71→53→17→34→68→47)

(9→18→36→72→55→21→42→84→79→69→49)
(11→22→44→88→87→85→81→73→57→25→50)
(13→26→52→15→30→60→31→62→35→70→51)
(19→38→76→63→37→74→59→29→58→27→54)
(33→66→43→86→83→77→65→41→82→75→61)

(八) 100 以內可以九次餵食完全部喜鵲的偶數 n

n	餵食順序
90	(1→2→4→8→16→32→64→37→74→57→23→46) (3→6→12→24→48→5→10→20→40→80→69→47) (7→14→28→56→21→42→84→77→63→35→70→49) (9→18→36→72→53→15→30→60→29→58→25→50) (11→22→44→88→85→79→67→43→86→81→71→51) (13→26→52) (17→34→68→45→90→89→87→83→75→59→27→54) (19→38→76→61→31→62→33→66→41→82→73→55) (39→78→65)

(九) 100 以內可以十一次餵食完全部喜鵲的偶數 n

n	餵食順序
84	(1→2→4→8→16→32→64→43) (3→6→12→24→48→11→22→44) (5→10→20→40→80→75→65→45) (7→14→28→56→27→54→23→46) (9→18→36→72→59→33→66→47) (13→26→52→19→38→76→67→49) (15→30→60→35→70→55→25→50) (17→34→68→51) (21→42→84→83→81→77→69→53) (29→58→31→62→39→78→71→57) (37→74→63→41→82→79→73→61)

(十) 100 以內可以十二次餵食完全部喜鵲的偶數 n

n	餵食順序
62	(1→2→4→8→16→32) (3→6→12→24→48→33) (5→10→20→40→17→34) (7→14→28→56→49→35) (9→18→36) (11→22→44→25→50→37) (13→26→52→41→19→38) (15→30→60→57→51→39)

(21→42)
(23→46→29→58→53→43)
(27→54→45)
(31→62→61→59→55→47)

(十一) 100 以內可以十三次餵食完全部喜鵲的偶數 n

n	餵食順序
92	(1→2→4→8→16→32→64→35→70→47) (3→6→12→24→48) (5→10→20→40→80→67→41→82→71→49) (7→14→28→56→19→38→76→59→25→50) (9→18→36→72→51) (11→22→44→88→83→73→53→13→26→52) (15→30→60→27→54) (17→34→68→43→86→79→65→37→74→55) (21→42→84→75→57) (23→46→92→91→89→85→77→61→29→58) (31→62) (33→66→39→78→63) (45→90→87→81→69)

肆、研究結果

一、若有 5 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 5 順時針編號排列順序，找出能讓最多喜鵲吃到食物的餵食順序？並找出吃最多份食物的喜鵲吃了幾份？

【結果 1】：

餵食順序	餵食結果	吃最多喜鵲	份數
1→2→4→2→4	3 隻喜鵲吃到食物	2、4 號	2 份
2→4→2→4→2	2 隻喜鵲吃到食物	2 號	3 份
3→0	1 隻喜鵲吃到食物	3 號	1 份
4→2→4→2→4	2 隻喜鵲吃到食物	4 號	3 份
5→4→2→4→2	3 隻喜鵲吃到食物	2、4 號	2 份

二、若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為大於 1 的奇數的情況下，找出一餵食完全部喜鵲的 n 和其餵食順序？

【推論 2】：

若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為大於 1 的奇數的

情況下，無法找出一次餵食完全部喜鵲的 n 和其餵食順序。

三、若有 5 份食物，重新找出 5 隻喜鵲的排列順序，使 5 隻喜鵲皆可以吃到食物，但斑鳩無法吃到？

【結果 3】：

餵食順序	排列順序
1→2→5→3→4	1-2-3-5-0-4
1→3→5→2→4	1-3-0-2-5-4
1→4→3→2→5	1-4-2-0-5-3
2→1→4→3→5	2-3-1-4-5-0
2→3→4→1→5	2-0-3-1-5-4
2→5→3→1→4	2-3-5-0-1-4
3→1→4→5→2	3-2-5-1-4-0
3→2→5→4→1	3-0-1-2-4-5
3→4→1→2→5	3-1-2-4-5-0
3→5→2→1→4	3-0-2-5-1-4
4→1→3→5→2	4-2-5-0-1-3
4→3→2→5→1	4-2-1-5-3-0
4→5→2→3→1	4-0-1-2-5-3
5→2→3→4→1	5-3-1-0-4-2
5→3→1→4→2	5-2-1-4-0-3
5→4→1→3→2	5-2-0-1-3-4

四、若有 n 份食物，在 n 為大於 1 的奇數的情況下，重新找出 n 隻喜鵲的排列順序，使 n 隻喜鵲皆可以吃到食物，但斑鳩無法吃到的方法數？

【推論 4.1】：

若有 n 份食物，在 n 為大於 1 且小於 10 的奇數的情況下，重新找出 n 隻喜鵲的排列順序，能夠使 n 隻喜鵲皆可以吃到食物，但斑鳩無法吃到，其方法數為 $pn-(n-1)$ ， p 為從每一隻喜鵲開始餵食的平均方法數。

【推測 4.2】：

若有 n 份食物，在 n 為大於 10 的奇數的情況下，重新找出 n 隻喜鵲的排列順序，能夠使 n 隻喜鵲皆可以吃到食物，但斑鳩無法吃到，其方法數為 $pn-(n-1)$ ， p 為從每一隻喜鵲開始餵食的平均方法數。

五、若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為偶數的情況下，找出一次餵食完全部喜鵲的 n 和其餵食順序？

【結果 5.1】：

n	餵食順序
2	1→2
4	1→2→4→3
10	1→2→4→8→5→10→9→7→3→6
12	1→2→4→8→3→6→12→11→9→5→10→7
18	1→2→4→8→16→13→7→14→9→18→17→15→11→3→6→12→5→10
28	1→2→4→8→16→3→6→12→24→19→9→18→7→14→28→27→25→21→13→26→ 23→17→5→10→20→11→22→15
36	1→2→4→8→16→32→27→17→34→31→25→13→26→15→30→23→9→18→36→ 35→33→29→21→5→10→20→3→6→12→24→11→22→7→14→28→19
52	1→2→4→8→16→32→11→22→44→35→17→34→15→30→7→14→28→3→6→12→ 24→48→43→33→13→26→52→51→49→45→37→21→42→31→9→18→36→19→ 38→23→46→39→25→50→47→41→29→5→10→20→40→27
58	1→2→4→8→16→32→5→10→20→40→21→42→25→50→41→23→46→33→7→14 →28→56→53→47→35→11→22→44→29→58→57→55→51→43→27→54→49→ 39→19→38→17→34→9→18→36→13→26→52→45→31→3→6→12→24→48→37→ 15→30
60	1→2→4→8→16→32→3→6→12→24→48→35→9→18→36→11→22→44→27→54→ 47→33→5→10→20→40→19→38→15→30→60→59→57→53→45→29→58→55→ 49→37→13→26→52→43→25→50→39→17→34→7→14→28→56→51→41→21→ 42→23→46→31
66	1→2→4→8→16→32→64→61→55→43→19→38→9→18→36→5→10→20→40→13 →26→52→37→7→14→28→56→45→23→46→25→50→33→66→65→63→59→51→ 35→3→6→12→24→48→29→58→49→31→62→57→47→27→54→41→15→30→60 →53→39→11→22→44→21→42→17→34
82	1→2→4→8→16→32→64→45→7→14→28→56→29→58→33→66→49→15→30→ 60→37→74→65→47→11→22→44→5→10→20→40→80→77→71→59→35→70→ 57→31→62→41→82→81→79→75→67→51→19→38→76→69→55→27→54→25→

	50→17→34→68→53→23→46→9→18→36→72→61→39→78→73→63→43→3→6→ 12→24→48→13→26→52→21→42
100	1→2→4→8→16→32→64→27→54→7→14→28→56→11→22→44→88→75→49→ 98→95→89→77→53→5→10→20→40→80→59→17→34→68→35→70→39→78→ 55→9→18→36→72→43→86→71→41→82→63→25→50→100→99→97→93→85→ 69→37→74→47→94→87→73→45→90→79→57→13→26→52→3→6→12→24→48 →96→91→81→61→21→42→84→67→33→66→31→62→23→46→92→83→65→29 →58→15→30→60→19→38→76→51
.....

【推論 5.2】：

若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為偶數的情況下，由 k 號喜鵲開始餵食，第 m 隻被餵食的喜鵲編號 $p(n, k, m) = 2^{m-1}k \pmod{n+1}$ 。

【推論 5.3】：

若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為偶數的情況下，絕對不會餵食到斑鳩。

【推論 5.4】：

若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為偶數的情況下，由 k 號喜鵲開始餵食，最後一隻被餵食的喜鵲編號為 s 。

(1)若 k 為奇數，則 $s = \frac{n+1+k}{2}$ ；(2)若 k 為偶數，則 $s = \frac{k}{2}$ 。

六、若有 n 份食物，把斑鳩和喜鵲從 0 到 n 順時針編號排列順序，在 n 為偶數的情況下，找出多次餵食完全部喜鵲的 n 和其餵食順序？

【結果 6】：因表格眾多，請詳見內文 P20~P26。

伍、討論

我們上網搜尋資料做文獻探討時，發現到能夠一次餵食完全部喜鵲的偶數 $n = \{2, 4, 10, 12, 18, 28, 36, 52, 58, 60, 66, 82, 100, \dots\}$ ，會使 $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ 在係數為 0 和 1 的有限體(finite field) $GF(2)$ 上是不可分解的。例如：當 $n=4$ ， $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 在 $GF(2)$ 上是不可分解的；當 $n=6$ ， $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1)$ 在 $GF(2)$ 上是可以分解的。這部分的數學知識對於國中生來說是非常艱深的，將來我們會繼續朝這個領域去研究，期望能在這方面有更深入的進展和突破。

陸、結論

關於「鳩占鵲巢」這個題目，我們一開始就先以順時針編號的排序去餵食，發現無法一次餵食完全部 5 隻喜鵲，進而證明在 n 為大於 1 的奇數的情況下，無法一次餵食完全部 n 隻喜鵲。接著，我們改變編號的排序去餵食，發現可以一次餵食完全部 5 隻喜鵲，進而證明在 n 為大於 1 的奇數的情況下，可以一次餵食完全部 n 隻喜鵲的方法數。最後，我們以順時針編號的排序去餵食，找出在 n 為偶數的情況下，一次和多次餵食完全部喜鵲的 n 和其餵食順序。研究過程中遇到了很多瓶頸，經過不斷地上網搜尋資料並和老師討論之後，終於皇天不負苦心人，我們順利地完成這份科展報告。

柒、參考文獻資料

- 一、游森棚(2023) • 森棚教官的數學題-鳩占鵲巢 • 科學研習雙月刊，62(2)。
- 二、Peter R.J.Asveld(2011) • Permuting operations on strings and their relation to prime numbers • Discrete Applied Mathematics，159，1915-1932。

附件一

餵食順序	排列順序
1→2→3→4→5→6→7	1-2-5-3-0-7-4-6
1→2→4→5→6→3→7	1-2-3-4-6-7-0-5
1→2→7→4→6→3→5	1-2-4-7-3-0-6-5
1→3→2→4→5→6→7	1-3-5-0-2-7-4-6
1→3→2→5→4→6→7	1-3-0-4-2-7-5-6
1→3→2→7→6→4→5	1-3-0-4-2-6-7-5
1→3→6→4→5→2→7	1-3-4-2-6-7-5-0
1→3→6→4→7→2→5	1-3-4-0-6-2-7-5
1→3→6→5→4→2→7	1-3-5-2-6-7-0-4
1→3→7→2→5→4→6	1-3-4-2-7-5-6-0
1→3→7→4→6→5→2	1-3-2-4-7-5-0-6
1→4→2→5→7→3→6	1-4-0-3-7-2-6-5
1→4→5→2→3→7→6	1-4-2-0-3-5-6-7
1→4→5→2→7→3→6	1-4-2-3-7-5-6-0
1→4→6→7→2→3→5	1-4-2-7-3-6-0-5
1→5→4→2→3→6→7	1-5-2-0-3-7-4-6
1→5→6→3→4→2→7	1-5-0-2-3-7-6-4
1→5→6→3→4→7→2	1-5-2-7-3-0-6-4
1→5→6→7→4→3→2	1-5-2-4-7-0-6-3
1→5→7→6→4→3→2	1-5-2-4-0-6-7-3
1→6→3→4→5→2→7	1-6-4-2-0-7-5-3
1→6→4→3→7→5→2	1-6-2-3-0-5-7-4
1→6→5→2→4→3→7	1-6-3-0-2-7-4-5
1→6→5→7→3→4→2	1-6-2-3-7-0-4-5
1→7	無解(1+7=8)
2→1→3→6→5→4→7	2-4-1-3-5-7-6-0
2→1→3→7→4→6→5	2-6-1-3-0-4-7-5
2→1→4→6→7→5→3	2-3-1-4-5-7-0-6
2→1→4→7→6→5→3	2-3-1-4-5-0-6-7

2→1→6→4→7→3→5	2-4-1-6-3-7-0-5
2→3→1→6→7→4→5	2-0-3-4-7-1-6-5
2→3→4→5→6→7→1	2-5-3-1-7-4-6-0
2→3→4→6→5→7→1	2-6-3-1-7-4-0-5
2→3→4→6→7→5→1	2-6-3-1-0-4-5-7
2→3→7→5→6→4→1	2-6-3-1-5-7-0-4
2→4→1→5→7→6→3	2-3-4-6-7-0-1-5
2→4→1→6→7→5→3	2-3-4-0-5-7-1-6
2→4→3→6→5→1→7	2-6-4-0-1-7-3-5
2→4→3→6→5→7→1	2-6-4-1-7-0-3-5
2→4→5→1→3→6→7	2-0-4-1-3-7-5-6
2→4→5→6→3→1→7	2-3-4-6-1-7-5-0
2→4→7→6→1→3→5	2-0-4-1-3-6-7-5
2→4→7→6→1→5→3	2-3-4-1-5-6-7-0
2→5→4→3→6→1→7	2-0-5-3-1-7-6-4
2→5→4→6→3→1→7	2-3-5-6-1-7-0-4
2→5→6→4→3→7→1	2-3-5-1-7-4-0-6
2→5→7→3→4→6→1	2-4-5-1-0-6-3-7
2→5→7→6→1→4→3	2-3-5-0-1-4-6-7
2→6	無解(2+6=8)
2→7→3→1→6→4→5	2-3-7-4-1-6-0-5
2→7→4→1→6→3→5	2-4-7-0-3-1-6-5
2→7→4→6→1→3→5	2-4-7-1-3-6-0-5
2→7→4→6→3→1→5	2-4-7-3-0-6-1-5
2→7→5→6→3→4→1	2-5-7-1-3-0-6-4
3→1→2→4→5→6→7	3-0-5-1-2-7-4-6
3→1→2→4→7→6→5	3-6-7-1-2-0-4-5
3→1→2→7→4→6→5	3-6-0-1-2-4-7-5
3→1→5→4→2→7→6	3-4-0-1-5-2-6-7
3→1→5→6→7→4→2	3-6-2-1-5-0-4-7
3→1→6→4→7→2→5	3-0-4-1-6-2-7-5

3→1→6→5→2→4→7	3-4-5-1-6-7-0-2
3→1→6→7→4→2→5	3-4-7-1-6-2-0-5
3→2→1→4→7→6→5	3-6-7-2-0-1-4-5
3→2→4→1→5→7→6	3-1-5-2-0-4-6-7
3→2→7→5→1→4→6	3-1-4-2-5-7-6-0
3→2→7→6→4→1→5	3-0-4-2-6-7-1-5
3→4→2→5→6→1→7	3-5-0-4-1-7-6-2
3→4→6→7→5→1→2	3-1-2-4-5-7-0-6
3→4→7→6→1→5→2	3-0-2-4-1-5-6-7
3→4→7→6→5→1→2	3-1-2-4-5-0-6-7
3→5	無解(3+5=8)
3→6→1→4→7→2→5	3-1-4-6-0-2-7-5
3→6→4→7→2→1→5	3-4-0-6-2-7-1-5
3→6→5→4→2→1→7	3-5-2-6-1-7-4-0
3→7→2→1→4→5→6	3-5-2-7-1-4-6-0
3→7→2→1→4→6→5	3-6-2-7-1-4-0-5
3→7→2→5→4→1→6	3-4-2-7-5-1-6-0
3→7→4→6→1→2→5	3-0-4-7-1-2-6-5
3→7→5→2→4→1→6	3-4-5-7-0-1-6-2
4→1→2→3→7→5→6	4-5-7-0-1-2-6-3
4→1→2→7→5→6→3	4-3-0-6-1-2-5-7
4→1→5→7→2→3→6	4-2-7-3-1-5-6-0
4→1→6→7→5→2→3	4-3-5-7-1-6-0-2
4→2→1→6→5→7→3	4-3-7-0-2-5-1-6
4→2→3→1→5→6→7	4-1-5-0-2-7-3-6
4→2→5→6→1→3→7	4-1-3-6-2-7-5-0
4→2→7→5→1→6→3	4-3-1-6-2-5-7-0
4→3→2→5→7→6→1	4-5-0-1-3-6-7-2
4→3→6→1→5→7→2	4-0-2-7-3-1-5-6
4→3→6→5→7→2→1	4-2-7-1-3-5-0-6
4→3→7→5→6→1→2	4-1-2-6-3-0-5-7

4→5→1→3→2→7→6	4-1-3-0-5-2-6-7
4→5→2→3→1→6→7	4-2-0-3-5-7-1-6
4→5→2→7→3→1→6	4-2-3-7-5-1-6-0
4→5→6→3→1→2→7	4-6-1-2-5-7-0-3
4→6→1→3→7→2→5	4-0-1-3-6-2-7-5
4→6→3→2→7→5→1	4-0-3-1-6-2-5-7
4→6→5→7→3→2→1	4-2-5-1-6-0-3-7
4→6→7→2→3→1→5	4-2-7-3-6-0-1-5
4→7→2→1→3→6→5	4-6-0-2-7-1-3-5
4→7→3→1→6→5→2	4-0-2-3-7-5-1-6
4→7→6→1→3→2→5	4-1-3-6-7-2-0-5
4→7→6→5→1→3→2	4-5-2-6-7-0-1-3
5→1→3→6→4→7→2	5-6-2-7-0-1-3-4
5→1→4→2→7→6→3	5-3-2-6-7-1-4-0
5→1→6→3→4→7→2	5-0-2-7-3-1-6-4
5→1→6→7→4→2→3	5-3-0-4-7-1-6-2
5→1→6→7→4→3→2	5-0-2-4-7-1-6-3
5→2→3→4→6→7→1	5-0-4-1-7-2-6-3
5→2→4→1→6→7→3	5-3-7-1-6-2-0-4
5→2→7→4→1→6→3	5-3-1-6-0-2-4-7
5→3	無解(5+3=8)
5→4→1→2→3→7→6	5-1-2-0-3-4-6-7
5→4→1→2→7→3→6	5-1-2-3-7-4-6-0
5→4→2→1→3→7→6	5-2-0-1-3-4-6-7
5→4→6→3→2→7→1	5-6-2-1-7-4-0-3
5→6→1→2→4→7→3	5-3-7-1-2-6-4-0
5→6→1→3→7→4→2	5-0-2-1-3-6-4-7
5→6→4→7→3→1→2	5-1-2-4-0-6-3-7
5→6→7→4→1→2→3	5-3-4-7-0-6-1-2
5→7→2→1→4→6→3	5-3-0-6-2-7-1-4
5→7→2→3→6→4→1	5-6-0-1-2-7-3-4

5→7→2→4→1→6→3	5-3-1-6-2-7-4-0
5→7→3→2→1→4→6	5-1-4-0-3-7-6-2
5→7→3→4→6→1→2	5-1-2-6-3-7-0-4
5→7→6→1→4→2→3	5-3-1-4-6-7-0-2
5→7→6→4→1→2→3	5-3-4-0-6-7-1-2
5→7→6→4→3→2→1	5-2-4-1-6-7-3-0
6→1→3→2→5→4→7	6-4-2-0-5-7-1-3
6→1→4→2→5→7→3	6-3-7-2-0-5-1-4
6→1→4→2→7→5→3	6-3-0-2-5-7-1-4
6→1→4→7→2→5→3	6-3-2-7-5-0-1-4
6→1→5→7→2→4→3	6-3-0-2-7-4-1-5
6→2	無解(6+2=8)
6→3→1→2→7→4→5	6-1-2-4-7-0-3-5
6→3→1→5→4→2→7	6-1-5-2-0-7-3-4
6→3→2→4→5→1→7	6-2-0-4-1-7-3-5
6→3→4→2→5→7→1	6-4-0-1-7-2-3-5
6→3→4→5→2→7→1	6-4-2-1-7-5-3-0
6→4→1→2→7→3→5	6-0-1-2-3-7-4-5
6→4→1→2→7→5→3	6-3-1-2-5-7-4-0
6→4→3→2→5→7→1	6-0-3-1-7-2-4-5
6→4→3→7→5→2→1	6-2-3-1-5-7-4-0
6→4→5→2→3→1→7	6-3-5-0-1-7-4-2
6→4→5→2→3→7→1	6-3-5-1-7-0-4-2
6→4→7→2→1→3→5	6-2-7-1-3-0-4-5
6→4→7→3→1→2→5	6-3-7-0-1-2-4-5
6→5→1→3→2→4→7	6-4-0-1-3-7-5-2
6→5→4→2→1→3→7	6-1-3-4-0-7-5-2
6→5→4→2→3→1→7	6-3-0-4-1-7-5-2
6→5→4→3→2→1→7	6-0-2-4-1-7-5-3
6→5→7→2→1→4→3	6-3-2-7-1-4-5-0
6→7→2→4→1→5→3	6-3-0-1-5-2-7-4

6→7→4→1→2→3→5	6-1-2-0-3-4-7-5
6→7→4→2→1→3→5	6-2-0-1-3-4-7-5
6→7→5→1→4→2→3	6-3-1-4-0-5-7-2
6→7→5→2→3→4→1	6-0-2-1-3-5-7-4
7→1	無解(7+1=8)
7→2→3→1→5→4→6	7-3-4-0-1-5-6-2
7→2→3→6→4→5→1	7-3-4-1-6-0-5-2
7→2→4→5→1→3→6	7-4-1-3-0-5-6-2
7→2→5→4→3→6→1	7-5-3-1-0-6-4-2
7→3→1→2→4→5→6	7-5-1-2-0-4-6-3
7→3→2→1→4→5→6	7-5-2-0-1-4-6-3
7→3→2→5→4→1→6	7-4-2-0-5-1-6-3
7→3→2→5→4→6→1	7-4-2-1-5-6-0-3
7→3→4→6→5→2→1	7-2-4-1-5-0-6-3
7→4→2→1→6→5→3	7-3-0-2-5-1-6-4
7→4→3→6→1→5→2	7-0-2-3-1-5-6-4
7→4→3→6→5→1→2	7-1-2-3-5-0-6-4
7→4→6→3→1→5→2	7-3-2-6-1-5-0-4
7→5→1→4→2→3→6	7-2-0-3-1-4-6-5
7→5→1→6→3→4→2	7-0-2-3-1-6-4-5
7→5→2→3→4→6→1	7-4-0-1-2-6-3-5
7→5→2→4→1→6→3	7-3-1-6-2-0-4-5
7→5→2→4→3→6→1	7-0-3-1-2-6-4-5
7→5→6→1→2→4→3	7-3-1-2-6-4-0-5
7→5→6→3→4→2→1	7-2-3-1-6-4-0-5
7→5→6→4→3→2→1	7-2-4-1-6-0-3-5
7→6→1→4→2→5→3	7-3-2-0-5-1-4-6
7→6→4→3→2→5→1	7-3-0-1-2-4-5-6
7→6→5→4→3→2→1	7-2-4-1-0-5-3-6