屏東縣第64屆國中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：「機率」真迷人 － 「數字九宮格」真有趣

關　鍵　詞：機率、數字九宮格、期望值

編　號：A1012

「機率」真迷人－「數字九宮格」真有趣

摘要

透過老師讓全班玩數字九宮格的遊戲，先由全班總投入金額得獎金額一比，發現多數同學沒賺錢，再經由計算中獎的機率，及獎金的期望值，了解到原本可以透過中獎機率去計算期望值，讓自己在投入遊戲時更加注意。

壹、前言

老師上課的時候，為了讓我們了解十賭九輸這個名詞，讓全班玩了一個「數字九宮格」的遊戲，規則很簡單，在一個三成三的方格中，隨意填入成數字 1 到 9(「九宮格」)的「數字賓果」遊戲。老師還跟我們說，假設玩這個遊戲，一次要花10 元。對中 1 個數字，你們可以得到10 元；對到 2 個數字，你們可以得到20 元；對到 3 個數字，你們可以得到 50 元；對到 4 個數字，你們可以得到100 元；對到 5 個數字，你們可以得到500 元；對到 6 個數字，你們可以得到1000 元；對到 7 個數字，你們可以得到3000元；對到 8 個數字，你們可以得到 5000 元；對到 9 個數字(9 個數字完全對中)，你們可以得到10000(1 萬)元；若完全沒中，10 元就沒了。沒想到，看起來似乎很有賺頭的遊戲，沒想到全班玩下來的結果，(每個人都玩了20次)，全班竟輸了將近 440 元，真不可思議！讓我想要進一步探討「數字九宮格」(如下圖)，了解這個遊戲的「機率」，最後了解玩這個遊戲的「期望值」是多少？

1	2	3
4	5	6
7	8	9

貳、研究設備及器材

一、「數字九宮格」記錄表

二、結果統計表、筆

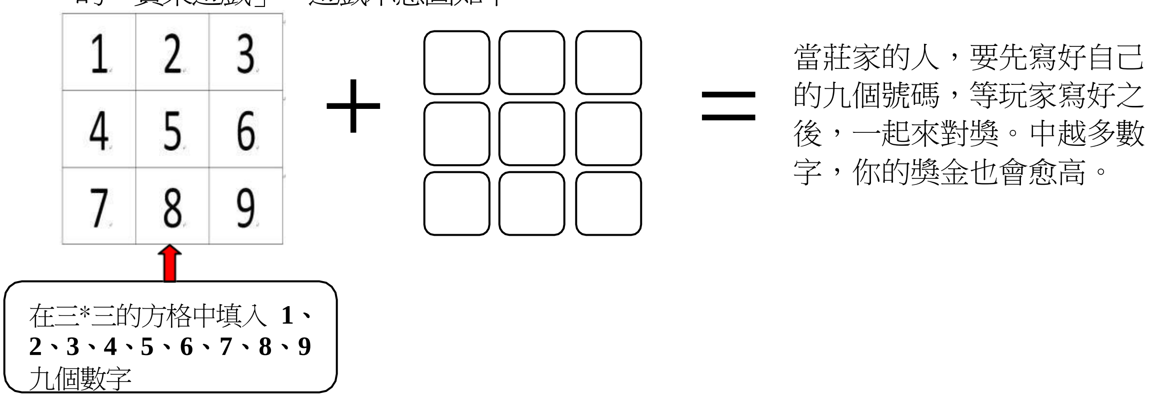
三、電腦軟體 Word2010

參、研究過程與方法

一、研究一

(一)「數字九宮格」遊戲玩法

老師給我們玩的「數字九宮格」的遊戲，靈感源自夜市攤子的「數字九宮格」，類似 1 到 9 的「賓果遊戲」，遊戲示意圖如下：



(二)「數字九宮格」遊戲之兩類「『中獎』(第 1 類)和『沒中獎』(第 2 類)」之情形分析

玩「數字九宮格」，所有遊戲可能情形可以分成「遊戲中獎」和「遊戲沒中獎」兩類情形，分述如下：

1.「遊戲中獎」情形分析(第 1 類)

遊戲，由老師作莊，玩一回 **10** 元，這 10 元給莊家「遊戲中獎」有下列九種情形：

(1)情形 1：對到 **1** 個數字(1、2、3、4、5、6、7、8、9 中之任何 **1** 個)，莊家**賠 10 元**；

(2)情形 2：對到 **2** 個數字(1、2、3、4、5、6、7、8、9 中之任何 **2** 個)，莊家**賠 20 元**；

(3)情形 3：對到 **3** 個數字(1、2、3、4、5、6、7、8、9 中之任何 **3** 個)，莊家**賠 50 元**；

(4)情形 4：對到 **4** 個數字(1、2、3、4、5、6、7、8、9 中之任何 **4** 個)，莊家**賠 100 元**；

(5)情形 5：對到 **5** 個數字(1、2、3、4、5、6、7、8、9 中之任何 **5** 個)，莊家**賠 500 元**；

(6)情形 6：對到 **6** 個數字(1、2、3、4、5、6、7、8、9 中之任何 **6** 個)，莊家**賠 1000 元**；

(7)情形 7：對到 **7** 個數字(1、2、3、4、5、6、7、8、9 中之任何 **7** 個)，莊家**賠 3000 元**；

(8)情形 8：對到 **8** 個數字(1、2、3、4、5、6、7、8、9 中之任何 **8** 個)，莊家**賠 5000 元**；

(9)情形 9：對到 **9** 個數字(**9** 個數字完全對中)，莊家**賠 10000(1 萬)元。**

2. 遊戲「沒中獎」情形分析(第 2 類)

「遊戲沒中獎」，只有下列一種情形：

對到 0 個數字，即沒對中「1、2、3、4、5、6、7、8、9」任何一個數字，10 元給莊家。

3. 將上述 1.(「遊戲中獎」)和 2. (「遊戲沒中獎」)整理成下表：

第 1 類「遊戲中獎」	(1)	情形 1 對到 **1** 個數字	對到「1、2、3、4、5、6、7、8、9」中任 **1** 個數字	莊家**賠 10 元**
	(2)	情形 2 對到 **2** 個數字	對到「1、2、3、4、5、6、7、8、9」中任 **2** 個數字	莊家**賠 20 元**
	(3)	情形 3 對到 **3** 個數字	對到「1、2、3、4、5、6、7、8、9」中任 **3** 個數字	莊家**賠 50 元**
	(4)	情形 4 對到 **4** 個數字	對到「1、2、3、4、5、6、7、8、9」中任 **4** 個數字	莊家**賠 100 元**
	(5)	情形 5 對到 **5** 個數字	對到「1、2、3、4、5、6、7、8、9」中任 **5** 個數字	莊家**賠 500 元**
	(6)	情形 6 對到 **6** 個數字	對到「1、2、3、4、5、6、7、8、9」中任 **6** 個數字	莊家**賠 1000 元**

	(7)	情形 7 對到 **7** 個數字	對到「1、2、3、4、5、6、7、8、9」中任 **7** 個數字	莊家**賠 3000 元**
	(8)	情形 8 對到 **8** 個數字	對到「1、2、3、4、5、6、7、8、9」中任 **8** 個數字	莊家**賠 5000 元**
	(9)	情形 9 對到 **9** 個數字	對到「1、2、3、4、5、6、7、8、9」中全部 **9** 個數字(9 個數字完全對中)	莊家**賠 10000 (1 萬)元**
第 2 類 「遊戲沒中獎」	**對到 0 個數字** (只有一種情形)		「1、2、3、4、5、6、7、8、9」任何數字**皆沒中**	**10 元給**莊家

二、研究二

(一)「數字九宮格」遊戲所有可能情形分析與運算

「數字九宮格」所有遊戲可能情形

9 個數字紙牌，放入九宮格(3 x 3)的紙盤上，其遊戲的所有可能情形，計算如下：

數字九宮格」所有遊戲可能情形

9 個數字紙牌，放入九宮格(3 x 3)的紙盤上，其遊戲的所有可能情形，計算如下：

所有遊戲的情形可視為原有的 9 個數字紙牌，一個一個放入九宮格(9 個格子)遊戲紙盤，此時第一個牌有9格可以選擇；接著第二個牌有8格可以選擇；第三個牌有7格可以選擇；第四個牌有6格可以選擇；第五個牌有5格可以選擇；第六個牌有4格可以選擇；第七個牌有3格可以選擇；第八個牌有2格可以選擇；第九個牌有1格可以選擇；

因此，所有「9 個數字紙牌，放入九宮格(3 x 3)的紙盤」遊戲的可能情形計算如下：

9x8x7x6x5x4x3x2x1 = 362880

「數字九宮格」所有遊戲的可能情形：362880種

(二)「數字九宮格」遊戲全班參加的結果：每個人都玩了20次。

號碼	遊戲結果	合計
1號	投入200元，拿回130元。	-70
2號	投入200元，拿回100元。	-100
3號	投入200元，拿回240元。	+40
4號	投入200元，拿回240元。	+40
6號	投入200元，拿回370元。	+170
7號	投入200元，拿回280元。	+80
8號	投入200元，拿回150元。	-50
9號	投入200元，拿回450元。	+250
10號	投入200元，拿回110元。	-90
11號	投入200元，拿回130元。	-70
12號	投入200元，拿回230元。	+30
13號	投入200元，拿回140元。	-60
14號	投入200元，拿回140元。	-60
15號	投入200元，拿回150元。	-50
16號	投入200元，拿回160元。	-40
17號	投入200元，拿回150元。	-50
18號	投入200元，拿回50元。	-150
19號	投入200元，拿回190元。	-10
20號	投入200元，拿回150元。	-50
21號	投入200元，拿回160元。	-40
22號	投入200元，拿回100元。	-100
23號	投入200元，拿回260元。	+60
24號	投入200元，拿回80元。	-120
最後全班合計是-440元。		

其中有兩位同學的手氣特別好，不僅沒有賠錢，還贏了快一倍的本金，真的太幸運了。

(三) 「數字九宮格」第 1 類「遊戲中獎」之九種「遊戲情形數」和「中獎機率」，推算方法如下：
從整體角度看，「數字九宮格」的**遊戲中獎**情形，可以看成下列兩個部份之相互作用：

1.「遊戲中獎」之情形 1「遊戲情形數」和「中獎機率」，推算如下

情形 1「『中1 個號碼』的遊戲『變化』情形」**X**「『沒中的8 個號碼』的遊戲變化情形

中到的這 1 個號碼可能是「1」；可能是「2」；可能是「3」；可能是「4」；可能是「5」；可能是「6」；可能是「7」；可能是「8」；可能是「9」，共有 9 種的遊戲變化情形。	**X**	「『沒中的 8 個號碼』的遊戲變化情形」： 「剩下的 8 個號碼，要避開『自己的號碼』，其他的 7 個號碼都有可能。」故，這部份的遊戲變化情形

引導出9 x 5040 = 45360

※故情形 1 的**遊戲中獎情形共有** 45360 種

※45360(情形 1 所有遊戲情形) ÷362880(全部所有遊戲情形)= 12.5%(情形 1 遊戲**中獎機率**)

2.「遊戲中獎」之情形 2「遊戲情形數」和「中獎機率」，推算如下

情形 2「『中2 個號碼』的遊戲『變化』情形」**X**「『沒中的7 個號碼』的遊戲變化情形

中到 2 個號碼的遊戲變化情形，即從九宮格中的 9 個號碼中，選出 2 個，共有 $C^9_2=\frac{9!}{2!\times(9-2)!}=\frac{9!}{2!\times 7!}=\frac{9\times 8}{2}=\frac{9\times 4}{1}=36$ =36，共有 36 種的遊戲變化情形。	**X**	「『沒中的 7 個號碼』的遊戲變化情形」： 「剩下的 7 個號碼，要避開『自己的號碼』，其他的 6 個號碼都有可能。」故，這部份的遊戲變化情形

引導出36 x 720 = 25920
故情形 2 的**遊戲中獎情形共有** 25920 種

※25920 (情形2 所有遊戲情形)÷362880(全部所有遊戲情形)約 7.14%(情形2遊戲**中獎機率**)

3.「遊戲中獎」之情形 3「遊戲情形數」和「中獎機率」，推算如下

情形 3「『中3 個號碼』的遊戲『變化』情形」**X**「『沒中的6 個號碼』的遊戲變化情形

中到 3 個號碼的遊戲變化情形，即從九宮格中的 9 個號碼中，選出 3 個，共有 $C^9_3=\frac{9!}{3!\times(9-3)!}=\frac{9!}{3!\times 6!}=\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}=\frac{3\times 4\times 7}{1}=84$ =84，共有 84 種的遊戲變化情形。	**X**	「『沒中的 6 個號碼』的遊戲變化情形」： 「剩下的 6 個號碼，要避開『自己的號碼』，其他的 5 個號碼都有可能。」故，這部份的遊戲變化情形

引導出84 x 120 = 10080

※故情形 3 的遊戲中獎情形共有 10080 種

※10080(情形 1 所有遊戲情形) ÷362880(全部所有遊戲情形)= 2.78%(情形 3 遊戲中獎機率)

4.「遊戲中獎」之情形 4「遊戲情形數」和「中獎機率」，推算如下

情形 4「『中4 個號碼』的遊戲『變化』情形」**X**「『沒中的5 個號碼』的遊戲變化情形

中到 4 個號碼的遊戲變化情形，即從九宮格中的 9 個號碼中，選出 4 個，共有

$$C^9_4=\frac{9!}{4!\times(9-4)!}=\frac{9!}{4!\times5!}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=\frac{3\times2\times7\times3}{1}=126$$

=126，共有 126 種的遊戲變化情形。

X

「『沒中的 5 個號碼』的遊戲變化情形」：

「剩下的 5 個號碼，要避開『自己的號碼』，其他的 4 個號碼都有可能。」故，這部份的遊戲變化情形為：4X3X2X1=4! =24

引導出126 x 24 = 3024

※故情形 4 的遊戲中獎情形共有 10080 種

※3024(情形 4 所有遊戲情形) ÷362880(全部所有遊戲情形)= 0.83%(情形 4 遊戲中獎機率)

5.「遊戲中獎」之情形 5「遊戲情形數」和「中獎機率」，推算如下

情形 5「『中5 個號碼』的遊戲『變化』情形」**X**「『沒中的4 個號碼』的遊戲變化情形

中到 5 個號碼的遊戲變化情形，即從九宮格中的 9 個號碼中，選出 5 個，共有

$$C^9_5=\frac{9!}{5!\times(9-5)!}=\frac{9!}{5!\times4!}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=\frac{3\times2\times7\times3}{1}=126$$

=126，共有 126 種的遊戲變化情形。

X

「『沒中的 4 個號碼』的遊戲變化情形」：

「剩下的 4 個號碼，要避開『自己的號碼』，其他的 3 個號碼都有可能。」故，這部份的遊戲變化情形為：3X2X1=3! =6

引導出126 x 6 = 756

※故情形 5 的遊戲中獎情形共有 756 種

※756(情形 5 所有遊戲情形) ÷362880(全部所有遊戲情形)= 0.21%(情形 5 遊戲中獎機率)

6.「遊戲中獎」之情形 6「遊戲情形數」和「中獎機率」，推算如下

情形 6「『中6 個號碼』的遊戲『變化』情形」**X**「『没中的3 個號碼』的遊戲變化情形

中到 6 個號碼的遊戲變化情形，即從九宮格中的 9 個號碼中，選出 6 個，共有

$$C_6^9=\frac{9!}{6!\times(9-6)!}=\frac{9!}{6!\times3!}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=\frac{3\times4\times7}{1}=84$$

=126，共有 126 種的遊戲變化情形。

X

「『没中的 3 個號碼』的遊戲變化情形」：
「剩下的 3 個號碼，要避開『自己的號碼』，其他的 2 個號碼都有可能。」故，這部份的遊戲變化情形為：2X1=2! =2

引導出84 x 2 = 168

※故情形 6 的遊戲中獎情形共有 168 種

※1680(情形 6 所有遊戲情形) ÷362880(全部所有遊戲情形)= 0.05%(情形 3 遊戲**中獎機率**)

7.「遊戲中獎」之情形 7「遊戲情形數」和「中獎機率」，推算如下

情形 7「『中7 個號碼』的遊戲『變化』情形」**X**「『没中的2 個號碼』的遊戲變化情形

中到 7 個號碼的遊戲變化情形，即從九宮格中的 9 個號碼中，選出 7 個，共有

$$C_7^9=\frac{9!}{7!\times(9-7)!}=\frac{9!}{7!\times2!}=\frac{9X8}{2}=36$$

=36，共有 36 種的遊戲變化情形。

X

「『没中的 2 個號碼』的遊戲變化情形」：
「剩下的 2 個號碼，要避開『自己的號碼』，其他的 1 個號碼都有可能。」故，這部份的遊戲變化情形為： 1=1! =1

引導出36 x 1 = 36

※故情形 7 的遊戲中獎情形共有 36 種

※36(情形 3 所有遊戲情形) ÷362880(全部所有遊戲情形)= 0.01%(情形 3 遊戲**中獎機率**)

8.「遊戲中獎」之情形 8「遊戲情形數」和「中獎機率」，推算如下

情形 8「『中8 個號碼』的遊戲『變化』情形」**X**「『没中的1 個號碼』的遊戲變化情形

中到 8 個號碼的遊戲變化情形，即從九宮格中的 9 個號碼中，選出 8 個，共有

C_8^9=9，共有 9 種的遊戲變化情形。

X

「『没中的 1 個號碼』的遊戲變化情形」：
「剩下的 1 個號碼，這部分的變化情形為1種

引導出9 x 1 = 9

※故情形 8 的**遊戲中獎情形**共有 9 種

※9(情形 8 所有遊戲情形) ÷362880(全部所有遊戲情形)= 0.0025%(情形 8 遊戲**中獎機率**)

9.「遊戲中獎」之情形 9「遊戲情形數」和「中獎機率」，推算如下

情形 9「『中9 個號碼』的遊戲『變化』情形」X「『沒中的0 個號碼』的遊戲變化情形

中到 9 個號碼的遊戲變化情形，情況只有一種	X	「『沒中的 0 個號碼』的遊戲變化情形」：這部分的變化情形為1種

引導出1 x 1 = 1

※故情形 9 的**遊戲中獎情形**共有 1 種

※1 (情形 9 所有遊戲情形) ÷362880(全部所有遊戲情形)= 0.000278%(情形 9 遊戲**中獎機率**)

(四)將上述「遊戲中獎」之九種「遊戲情形數」和「中獎機率」，統整成表格如下：

序號	遊戲情形	遊戲情形總數(共有 362880 種)	中獎機率	中獎獎金
(1)	情形 1	**中獎情形**有 45360 種	**中獎機率**=12.5%	10 元
(2)	情形 2	**中獎情形**有 25920 種	**中獎機率**≑7.14%	20 元
(3)	情形 3	**中獎情形**有 10080 種	**中獎機率**≑2.78%	50 元
(4)	情形 4	**中獎情形**有 3024 種	**中獎機率**≑0.83%	100 元
(5)	情形 5	**中獎情形**有 756 種	**中獎機率**≑0.21%	500 元
(6)	情形 6	**中獎情形**有 168 種	**中獎機率**≑0.05%	1000 元
(7)	情形 7	**中獎情形**有 36 種	**中獎機率**≑0.01%	3000 元
(8)	情形 8	**中獎情形**有 9 種	**中獎機率**≑0.0025%	5000 元
(9)	情形 9	**中獎情形**共有 1 種	**中獎機率**≑0.000278%	10000(1 萬)元

(1)我們將情形 1~情形 9 之**中獎機率**一一加總(所有遊戲情形的中獎機率)：
12.5% (情形 1 中獎機率) +7.14% (情形 2 中獎機率)+ 2.78% (情形 3 中獎機率)+0.83%(情形 4 中獎機率)+0.21%(情形 5 中獎機率)+0.05%(情形 6 中獎機率)+0.01%(情形 7 中獎機率)+0.0025%(情形 8中獎機率)+0.000278%(情形 9 中獎機率)≑ 23.52%

大約 **25%**=四分之一(玩四次遊戲即會中 1 次)

(2) 我們將情形 1~情形 9 之**中獎機率**一一加總整理成下表

12.5% (情形 1 中獎機率) + 7.14% (情形 2 中獎機率)+ 2.78% (情形 3 中獎機率)+ 0.83%(情形 4 中獎機率)+ 0.21%(情形 5 中獎機率)+ 0.05%(情形 6 中獎機率)+ 0.01%(情形 7 中獎機率)+ 0.0025%(情形 8 中獎機率)+ 0.000278%(情形 9 中獎機率)= 23.52%大約 **25%**≑ 四分之一(玩四次遊戲即會中 1 次)

(五)從「數字九宮格」之九種「遊戲中獎機率」推算「遊戲中獎期望值」

從「數字九宮格」之中獎機率推算中獎的期望值之算式如下：

期望值=遊戲情形之「中獎機率」X「中獎獎金」

遊戲情形 1 中獎之期望值=情形 1 中獎「機率」X 中獎「獎金」=12.5% X 10
遊戲情形 2 中獎之期望值=情形 2 中獎「機率」X 中獎「獎金」=7.14% X 20
遊戲情形 3 中獎之期望值=情形 3 中獎「機率」X 中獎「獎金」=2.78% X 50
遊戲情形 4 中獎之期望值=情形 4 中獎「機率」X 中獎「獎金」=0.83% X 100
遊戲情形 5 中獎之期望值=情形 5 中獎「機率」X 中獎「獎金」=0.21% X 500
遊戲情形 6 中獎之期望值=情形 6 中獎「機率」X 中獎「獎金」=0.05% X 1000
遊戲情形 7 中獎之期望值=情形 7 中獎「機率」X 中獎「獎金」=0.01% X 3000
遊戲情形 8 中獎之期望值=情形 8 中獎「機率」X 中獎「獎金」=0.0025% X 5000
遊戲情形 9 中獎之期望值=情形 9 中獎「機率」X 中獎「獎金」=0.000278% X 10000

①玩**「數字九宮格」中獎**的**期望值**：

情形 1 中獎**期望值+情形 2** 中獎**期望值+情形 3** 中獎**期望值+情形 4** 中獎**期望值+情形 5** 中獎**期望值+情形 6** 中獎**期望值+情形 7** 中獎**期望值+情形 8** 中獎**期望值+情形 9** 中獎**期望值**

=1.25 元+1.428 元+1.39 元+0.83 元+1.05 元+0.5 元+0.3 元+0.125 元+0.0278 元=6.9008 元≅7 元

※玩「數字九宮格」這個遊戲，**中獎**的**期望值**約 **7 元，就是**玩 1 次 10 元，可以回本大約 7 元)。

肆、研究結果

1.玩數字九宮格遊戲的勝率不高。

2.計算出期望值大約七元後，但每次玩都要投入十元的成本，玩愈多次之後，可能連原本的成本

都拿不回來。

伍、討論

　　透過玩這個數字九宮格的遊戲，我們真正的了解到，什麼是十賭九輸，雖然真的有人手氣特別好，中了大獎。如何做到見好就好，這也是一大難題。
很多人可能會被中大獎的興奮沖昏頭，相信自己今天就是手氣正旺，因而選擇繼續玩下去，而玩愈多次，勝率就愈接近我們所計算的數值，最後就有可能會全部輸光光。

陸、結論

1.要參加任何賭錢的遊戲，不要被高額的頭獎迷惑，應該要先了解中獎的機率，才不會虧錢。
2.了解遊戲的期望值之後，如果僥倖贏錢了，要做到見好就收。

柒、參考資料及其他

1.五下數學-比率與百分率。