屏東縣第 64 屆國中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：　The first step matters.

關 鍵 詞：珠璣妙算、NP-complete

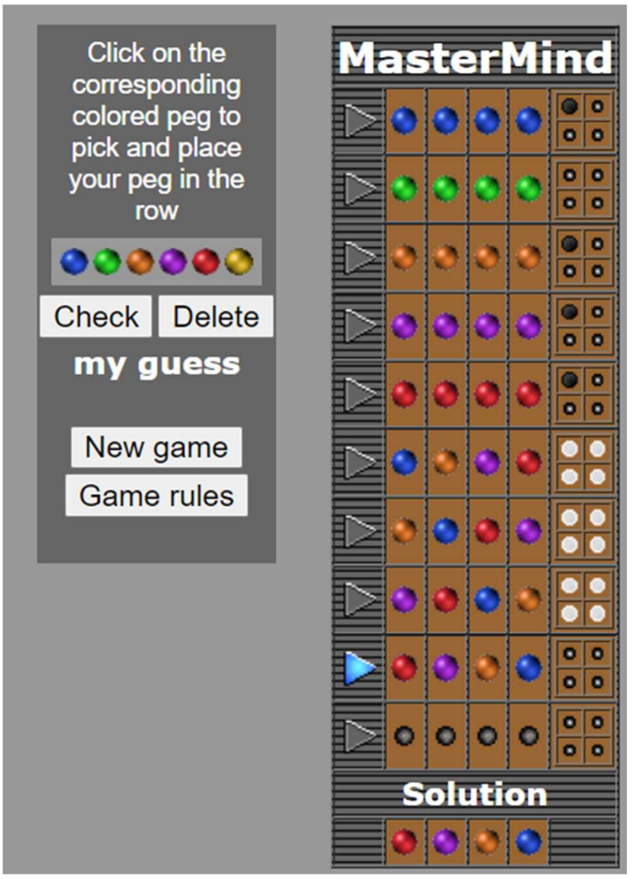
編號：B1005

摘要

電腦科學家高德納 Knuth 已發表過著名的解密遊戲 Matermind（中文翻譯：珠璣妙算）透過演算法模擬可以計算出 5 步甚至更少步數內成功解密。本研究主要欲探討每局開始第一步的策略對之後的影響，並根據所給的提示，探討所有可能情形數的分析。最後用 Python 程式模擬此研究的第一步策略結論，同時也算出解密所需步數的平均值。

壹、研究動機

某次資訊課，老師介紹 MasterMind 遊戲（如圖一）讓我們了解如何從某段訊息推理出已知的資訊，此款遊戲類似猜數字（1A2B），很多同學玩的過程中都相當投入並且利用邏輯思考下一步的策略，我們發現到很多同學會用每步同一種顏色去嘗試，交叉比對得到最後的密碼。



圖一、MasterMind 遊戲畫面

儘管同學們用單一顏色確保能找出解答，我們卻試著找出如何在最少步數內獲勝（即解開密碼）。

貳、研究目的

一、簡化此遊戲情形，三個位置四種顏色，分析第一步策略影響後續獲勝所需的步數。

二、撰寫簡化版遊戲的 Python 程式，實際操作並驗證獲勝之最少步數。

三、分析 MasterMind 遊戲第一步策略會產生的所有可能性。

四、找出可能情形數的計算方法。

參、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、Excel、PyCharm

肆、研究過程與方法

遊戲規則

1. 守密者(電腦)從六個顏色(此研究用數字 1,2,3,4,5,6 代替)隨機產生四個可重複顏色的組合擺放(隱藏)。
2. 解密者(玩家)選取四個可重複顏色的組合擺放。
3. 守密者依據解密者的擺放，若是任一個位置和顏色皆正確，就會出現一個黑色旗子(以此類推)，若只有顏色正確而位置不正確，則會出現一個白色旗子。
4. 重複 2.3.步驟至守密者的回應皆為黑色，若在 10 步以下結束為贏，10 步以上為輸。

名詞與符號定義

C：顏色數量，例如：MasterMind 遊戲使用 6 個顏色，即 C=6。

L：位置的長度，例如：遊戲有 4 個位置需填入顏色，即 L=4。

守密者的回應代號：

B	顏色對，位置對
W	顏色對，位置錯
None	顏色錯，位置錯

等價，本研究主要分為兩種：

名詞	定義
回應等價(≈)	在可行組合的集合中，此組合和其他組合比對解密者手上的解後，所得的回應一樣，稱為回應等價。
狀態等價(≡)	在 n 種顏色中，選擇 k 個位置做組合，只剩 u 個顏色可以填在 m 個位置，則從$(n-u)$個顏色填滿$(k-m)$個方法數一樣多。

研究一：**L=3**，**C=4** 的第一步策略

(一)(1,1,1)

守密者回應	可能情形數	說明
None	27	3 個位置，只剩 3 個顏色，共有$3^3=27$ 種
1B	27	位置鎖定有C_1^3種，2 個位置只剩 3 個顏色可選，共有$C_1^3\times 3^2=27$種
1W	0	因為 3 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
1B1W	0	因為 3 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置

守密者回應	可能情形數	說明
2B	9	C_2^3×3＝9
2W	0	因為 3 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
2B1W	0	因為 3 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
2W1B	0	因為 3 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
3W	0	因為 3 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
3B	1	正解
合計	64	

(二)(1,1,2)

守密者回應	可能情形數	說明
None	8	3 個位置，只剩 2 個顏色，共有2^3＝8 種
1B	17 、	鎖定第一個位置，剩 2×2=4 種情況；鎖定第二個位置，剩 2×2＝4 種情況；鎖定第三個位置，剩 3×3＝9 種情況，4＋4＋9＝17
1W	14	Case1：顏色 1 錯位，只能放在第 3 個位置，剩 2×2＝4 種情況 Case2：顏色 2 錯位，當 2 放在第 1 個位置，剩 3×2＝6 種情況 ；當 2 放在第 2 個位置，並且第 1 個位置也不能再放 2， 因此剩 2×2＝4 種情況，共 Case1＋Case2＝4＋6＋4＝14 種
1B1W	8	(1,2,□) ≈ (2,1,□) ≈ (□,1,1) ≈ (1,□,1)，此時□只能填{3,4 }共 2 種，故總共 2×4＝8 種
2B	9	位置鎖定有C_1^3種，只剩 3 個顏色可選，共有C_1^3×3＝9 種
2W	5	分成：(2,□,1)，此時□只能填 2,3,4 共 3 種；(□,2,1)，此時□可以填 3,4 共 2 種，故總共 3＋2＝5 種
2B1W	0	因為有 2 個固定的顏色位置，另 1 個就不能調換位置
2W1B	2	列舉：(1,2,1)，(2,1,1)

3W	0	因為有 2 個 1，所以怎麼調換都會重複
3B	1	正解
合計	64	

(三)(1,2,2)

守密者回應	可能情形數	說明
None	8	3 個位置，只剩 2 個顏色，共有2^3＝8 種
1B	17	鎖定第一個位置，剩 3×3=9 種；鎖定第二個位置，剩 2×2＝4 種；鎖定第三個位置，剩 2×2＝4 種，共 9＋4＋4＝17 種
1W	14	Case1：顏色 1 錯位，當 1 放在第 2 個位置，顏色 2 也不能再放，剩 2×2＝4 種情況；當 1 放在第 3 個位置，並且第 2 個位置也不能再放 1，因此剩 2×2＝4 種。 Case2：顏色 2 錯位。當 2 放在第 1 個位置，剩 3×2＝6 種 Case1＋Case2＝6＋4＋6＝14 種情況
1B1W	8	(2,2,□) ≈ (□,1,2) ≈ (□,2,1) ≈ (2,□,2) 此時□只能填 3,4 共 2 種，故總共 2×4＝8 種
2B	9	位置鎖定有C_1^3種，只剩 3 個顏色可選，共有C_1^3×3＝9 種
2W	5	分成：(2,□,1)，此時□只能填 1,3,4 共 3 種；(2,1,□)，此時□可以填 3,4 共 2 種，故總共 3＋2＝5 種
2B1W	0	因為有 2 個固定的顏色位置，另 1 個就不能調換位置
2W1B	2	列舉：(2,1,2)，(2,2,1)
3W	0	因為有 2 個 2，所以怎麼調換都會重複
3B	1	正解
合計	64	

(四)(1,2,3)

守密者回應	可能情形數	說明
None	1	所有的位置只剩 1 個顏色
1B	12	位置鎖定有C_1^3種，其餘 2 個位置只剩 2 個顏色可選， 共C_1^3×2×2＝12
1W	9	$(P_1, 1,\ P_3)$：P_1可選{4}，P_3可選{1,4} $(P_1,\ P_2,1\ )$：P_1可選{4}，P_2可選{4}，當 1 錯位共有 3 種，同理 $(\ 2,P_2,P_3)$：P_2可選{4}，P_3可選{2,4} $(P_1,P_2,2\ )$：P_1可選{4}，P_2可選{4} $(\ 3,P_2,P_3)$：P_2可選{3,4}，P_1可選{4} $(P_1, 3,P_3)$：P_1可選{4}，P_3可選{4}，共 3×3＝9 種
1B1W	12	(1, 3,□)：□可選{1,4} (1,□, 2)：□可選{1,4} 當 1 鎖定，其餘顏色錯位共有 4 種；同理當 2 鎖定，其餘顏色錯位共有 4 種；當 3 鎖定，其餘顏色錯位共有 4 種，故 12 種
2B	9	位置鎖定有C_2^3種，只剩 3 個顏色可選，共有 3×3＝9 種
2W	15	(□,1 , 2)：□可選{2,4} (2 ,1 ,□)：□可選{1,4} (2 ,□,1)：□可選{4} 當 2 個顏色錯位時有 5 種，故C_2^3×5＝15
2B1W	0	因為有 2 個固定的顏色位置，另 1 個就不能調換位置
2W1B	3	列舉：(2,1,3)、(1,3,2)、(3,2,1)
3W	2	列舉：(3,1,2)、(2,3,1)
3B	1	正解
合計	64	

由上面結果可知，(1,1,2) ≡ (1,2,2)，當然對 3,4 兩個顏色用這樣的組合所得的回應情形數也相同，亦即(1,1,2) ≡ (1,2,2) ≡ (3,3,4) ≡ (3,4,4) ≡ (2,2,1) ≡ (2,1,1) ≡ (4,3,3) ≡ (4,4,3)，在回應上所產生的可能情形數一樣多，故我們將從(1,1,2)探討第二步的可能情形數。

在(1,1,2)中最壞的情形就是守密者回應 1B 的時候，可能情形數是上述所有表格最多的，共 17 種。我們選擇了符合 1B 的(1,3,3)做為下一步策略，並整理結果：

(1,1,2)→(1,3,3)→(2,2,2)→(2,4,2)

守密者回應	(1,1,2) 可能情形數	**(1,3,3)** 可能情形數	**(2,2,2)** 可能情形數	**(2,4,2)** 可能情形數
None	8	**4**	0	0
1B	**17**	3	1	0
1W	14	3	0	0
1B1W	8	2	0	0
2B	9	2	**2**	0
2W	5	1	0	0
2B1W	0	0	0	0
2W1B	2	1	0	**1**
3W	0	0	0	0
3B	1	1	1	1
合計	**64**	**17**	**4**	**2**

從上表可知若從最壞情形分析，解密者最少也能在 5 步內獲勝。絕大多數應該都可以在 4 步內解開密碼。另一方面若我們選擇了符合 1B 的(2,2,2)做為下一步策略，如(1,1,2)→(2,2,2)→(3,1,3)→(3,1,4)：

守密者回應	(1,1,2) 可能情形數	(2,2,2) 可能情形數	(3,1,3) 可能情形數	(3,1,4) 可能情形數
None	8	**8**	0	0
1B	**17**	4	1	0
1W	14	0	1	0
1B1W	4	0	1	0
2B	10	4	**2**	0
2W	5	0	1	0
2B1W	0	0	0	0
2W1B	2	0	1	**1**
3W	0	0	0	0
3B	1	1	1	1
合計	**64**	**17**	**4**	**2**

結果依然至少是 5 步之內可以獲勝。

研究二：針對 **L=4,C=3** 設計 **Python** 程式，測試平均所需步數

程式碼如下：

```
import random, string
print("Mastermind")
print("input 3 digits from 1,2,3,4")
sHint = []
iRound = int(input("你想玩幾回合?"))
iCount = 0
for z in range(iRound+1):
    if z == iRound:
        s=input("終止遊戲")
    else:
        sUser = input("Your guess:")
        sAns = "".join(random.choices(["1","2","3","4"], k = 3))
        print(sUser)
        iTimes = 1
        irun = 1
        iTry = 1
```

```python
while irun:
    sHint = []
    check1 = []
    check2 = []
    sTotal =[]
    for i in range(3):
        sTotal.append(sAns[i])
        if sUser[i] == sAns[i]:
            sHint.append("B")
            sTotal.remove(sUser[i])
        else:
            check2.append(i)
```

```python
        if sHint == ["B","B","B"]:
            irun = 0
            iCount += iTimes
            print("Win!")
            print("Ans is",sAns)
            print("你花了",iTimes,"回合數")
            if z == iRound-1:
                print("本次平均獲勝所花的回合數:", round(iCount / iRound, 4))
            iTry = 1
        else:
        #print(check2)
        #print(sTotal)
            for s in check2:
                for j in sTotal:
                    if sUser[s] == j:
                        sHint.append("W")
                        sTotal.remove(sUser[s])
                        #print(sTotal)
            print(sHint)
            sUser = input("next guess:")
            iTry += 1
            iTimes += 1
```

執行畫面：

```
Mastermind
input 3 digits from 1,2,3,4
你想玩幾回合?5
Your guess:122
122
['B']
next guess:133
[]
next guess:424
['B', 'W', 'W']
next guess:442
Win!
Ans is 442
你花了 4 回合數
Your guess:122
122
['B', 'B']
next guess:123
['B', 'W']
next guess:142
Win!
Ans is 142
你花了 3 回合數
Your guess:122
122
['W']
next guess:313
['W', 'W']
next guess:431
Win!
Ans is 431
你花了 3 回合數
Your guess:122
122
['W', 'W']
next guess:213
['B', 'B']
next guess:214
['B', 'B']
next guess:211
Win!
Ans is 211
你花了 4 回合數
```

```
Your guess:122
122
['B']
next guess:133
['B', 'B']
next guess:134
['B', 'B']
next guess:113
['B', 'W', 'W']
next guess:131
Win!
Ans is 131
你花了 5 回合數
本次平均獲勝所花的回合數: 3.8
```

透過此程式可以驗證當 L=3，C=4 的時候，利用 2 種顏色例如：(C_1, C_1, C_2)或者(C_1, C_2, C_2)當作第一步，最少都可以在 5 步內獲勝。

研究三：分析 **L=4，C=6** 第一步策略

所有可能情形數共有$6^4 = 1296$種情形，根據狀態等價的關係，第一步我們可分成(1,1,1,1)、(1,1,1,2)、(1,1,2,2)、(1,1,2,3)、(1,2,3,4)來探討，並且所得到的守密者回應共有：None、1B、1W、1B1W、2B、2W、2B1W、1B2W、3B、3W、1B3W、2B2W、4W、4B 共 14 種回應情形。

以下針對各種策略，透過排列組合以及回應等價找出守密者回應的可能情形數：

(一) (1,1,1,1)

守密者回應	可能情形數	說明
None	625	$5^4=625$
1B	500	$C_1^4\times5^3=500$
1W	0	因為 4 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
1B1W	0	因為 4 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
2B	150	$C_2^4\times5^2=150$
2W	0	因為 4 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
2B1W	0	因為 4 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
1B2W	0	因為 4 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
3B	20	$C_3^4\times5=20$
3W	0	因為 4 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
1B3W	0	因為 4 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
2B2W	0	因為 4 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
4W	0	因為 4 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
4B	1	正解
合計	1296	

由上述可知，當第一步策略使用 4 個位置同一種顏色時，雖然可以遇到最少回應種類：None、1B、2B、3B，但會遇到最多的情形數多達 625 種。

(二) (1,1,1,2)

守密者回應	可能情形數	說明
None	256	$4^4=256$
1B	317	Case1：$(1,P_2,P_3,P_4)$，P_2不可再填入 1,2，有 4 種選擇； $P_3\equiv P_2$；$P_4\equiv P_2$，此情形有 4×4×4＝64 種

		Case2：$(P_1, 1, P_3, P_4) \equiv (1, P_2, P_3, P_4)$，有 64 種 Case3：$(P_1, P_2, 1, P_4) \equiv (1, P_2, P_3, P_4)$，有 64 種 Case4：$(P_1, P_2, P_3, 2)$，$P_1$不可再填入 1，$P_2 \equiv P_1$； $P_3 \equiv P_1$，此情形有 5×5×5＝125 種 共 64x3＋125＝317 種
1W	308	Case1 :$(2, P_2, P_3, P_4)$，P_2不可再填入 1，P_4不可再填入 1,2，$P_3 \equiv P_2$，此情形有 5x5x4＝100 種 Case2：$(P_1, 2, P_3, P_4)$ ，P_1不可再填入 1,2，P_3不可再填入 1，$P_4 \equiv P_1$，此情形有 4x5x4＝80 種 Case3：$(P_1, P_2, 2, P_4)$，P_1不可再填入 1,2，$P_2 \equiv P_4 \equiv P_1$ 此情形有 4x4x4＝64 種 Case4：$(P_1, P_2, P_3, 1) \equiv (P_1, P_2, 2, P_4)$ 共 100＋80＋64＋64＝308 種
1B1W	156	Case1：$(1, 2, P_3, P_4)$，P_3不可再填入 1,2，$P_3 \equiv P_4$， 此情形有 4x4＝16 種 $(1, P_2, 2, P_4) \equiv (P_1, 2, 1, P_4) \equiv (1, P_2, P_3, 1) \equiv$ $(P_1, 1, P_3, 1) \equiv (P_1, P_2, 1, 1) \equiv (1, 2, P_3, P_4)$ Case2：$(2, 1, P_3, P_4)$，P_3不可再填入 1，P_4不可再填入 1,2，此情形有 4x5＝20 種 $(P_1, 1, 2, P_4) \equiv (2, P_2, 1, P_4) \equiv (2, 1, P_3, P_4)$ 共 16x6＋20x3＝156 種
2B	123	Case1：$(1,1,P_3,P_4) \approx (1,P_2,1,P_4) \approx (P_1,1,1,P_4)$ ，此時□ 只能填入 4 種顏色，故 4x4x3(有 3 個狀態等價)＝48 種 Case2：$(1,P_2,P_3,2) \approx (P_1,1,P_3,2) \approx (P_1,P_2,1,2)$，此時□ 可填入 5 種顏色，故 5x5x3＝75 種

		Case1＋Case2＝48＋75＝123
2W	61	Case1：(2,P_2,P_3,1) ，P_2不可再填入 1，$P_3 \equiv P_2$，此情形有 5×5＝25 種 Case2：(P_1, 2,P_3, 1) ，P_1不可再填入 1,2，P_3不可再填入 1，此情形有 5×4＝20 種 Case3：(P_1,P_2, 2, 1) ，P_1不可再填入 1,2，$P_2 \equiv P_1$，此情形有 4×4＝16 種 共 25＋20＋16＝61 種
2B1W	24	(1, 1, 2,P_4)，P_4不可再填入 1,2，此情形有 4 種 (1, 2, 1,P_4) ≡ (2, 1, 1, P_4) ≡ (1, 1,P_3, 1) ≡ (1,P_2, 1, 1) ≡ (P_1, 1, 1, 1) ≡ (1, 1, 2,P_4) 共 4x6＝24 種
1B2W	27	(1,P_2, 2, 1)，P_2不可再填入 1,2，此情形有 4 種 (2,P_2, 1 ,1) ≡ (P_1, 2, 1, 1) ≡ (1,P_2, 2, 1) (1, 2,P_3, 1)，P_3不可再填入 1，此情形有 5 種 (P_1, 1, 2, 1) ≡ (2, 1,P_3, 1) ≡ (1, 2,P_3, 1) 共 4x3＋5x3＝27 種
3B	20	C^4_3×5=20
3W	0	因為 3 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
1B3W	0	因為 3 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
2B2W	3	列舉：(2,1,1,1)，(1,2,1,1)，(1,1,2,1)
4W	0	因為 3 個位置的顏色都一樣，無法再調換位置
4B	1	正解
合計	1296	

(三)　(1,1,2,2)

守密者回應	可能情形數	說明
None	256	4^4＝256
1B	256	4×4^3＝256
1W	256	4×4^3＝256
1B1W	208	$(1,P_2,1,P_4)$，P_2不可再填入 1,2，P_4不可再填入 2，此情形有 4×5＝20 種 $(1,P_2,P_3,1)$，P_2不可再填入 1,2，P_3不可再填入 1,2，此情形有 4×4＝16 種 $(P_1,1,1,P_4) \equiv (1,P_2,P_3,1)$，此情形有 4×4＝16 種 $(P_1,1,P_3,1) \equiv (1,P_2,P_3,1)$，此情形有 4×4＝16 種 $(1,2,P_3,P_4)$，P_3不可再填入 1,2，P_4不可再填入 2，此情形有 4×5＝20 種 $(2,1,P_3,P_4) \equiv (1,2,P_3,P_4)$，有 20 種 $(P_1,P_2,2,1)$，P_1不可再填入 1,2，P_2不可再填入 1,2，此情形有 4×4＝16 種 $(P_1,P_2,1,2) \equiv (P_1,P_2,2,1)$，此情形有 4×4＝16 種 $(2,P_2,2,P_4) \equiv (1,P_2,1,P_4)$，此情形有 4×5＝20 種 $(P_1,2,2,P_4) \equiv (P_1,1,1,P_4)$，此情形有 4×4＝16 種 $(2,P_2,P_3,2) \equiv (1,P_2,P_3,1)$，此情形有 4×4＝16 種 $(P_1,2,P_3,2) \equiv (P_1,1,P_3,1)$，此情形有 4×4＝16 種 共有 $20\times4+16\times8$＝208 種
2B	114	Case1：$(1,1,P_3,P_4)$，P_3不可再填入 2，$P_4 \equiv P_3$，此情形有 5×5＝25 種 $(P_1,P_2,2,2) \equiv (1,1,P_3,P_4)$ Case2：$(1,P_2,2,P_4)$，P_2不可再填入 1,2，$P_4 \equiv P_2$，

		此情形有 4×4＝16 種 $(1,P_2,P_3,2) \equiv (P_1,1,2,P_4) \equiv (P_1,1,P_3,2) \equiv (1,P_2,2,P_4)$ 共 25×2＋16×4＝114 種
2W	96	$(2,2,P_3,P_4)$，P_3不可再填入 1,2，$P_4 \equiv P_3$， 此情形有 4×4＝16 種 $(2,P_2,1,P_4) \equiv (2,P_2,P_3,1) \equiv (P_1,2,1,P_4) \equiv$ $(P_1,2,P_3,1) \equiv (P_1,P_2,1,1) \equiv (2,2,P_3,P_4)$ 共4^2×6＝96 種
2B1W	32	$(1,P_2,1,2)$，P_2不可再填入 1,2，此情形有 4 種 $(1,P_2,2,1) \equiv (P_1,1,2,1) \equiv (P_1,1,1,2) \equiv$ $(1,2,P_3,2) \equiv (2,1,P_3,2) \equiv (2,1,2,P_4) \equiv$ $(1,2,2,P_4) \equiv (1,P_2,1,2)$ 共 4×8＝32 種
1B2W	36	當鎖定 1 個位置，其餘兩個顏色錯位時，例如： $(1,2,1,P_4)$，P_4不可再填入 2，此情形有 5 種 $(1,2,P_3,1)$，P_3不可再填入 1,2，此情形有 4 種 以此例有 9 種情形 故共有C_3^4× 9＝36 種
3B	20	C_3^4×5＝20
3W	16	C_3^4×4＝16
1B3W	0	因為 4 個位置的顏色有重複，無法再調換位置
2B2W	4	列舉：(2,1,2,1)、(1,2,1,2)、(1,2,2,1)、(2,1,1,2)
4W	1	列舉：(2,2,1,1)
4B	1	正解
合計	1296	

(四) (1,1,2,3)

守密者回應	可能情形數	說明
None	81	3^4＝81
1B	182	$(1,P_2,P_3,P_4)$時，每個位置剩 3 個顏色，此時有3^3＝27 種 $(P_1,P_2, 2,P_4)$時，每個位置剩 4 個顏色，此時有4^3＝64 種 因$(1,P_2,P_3,P_4) \equiv (P_1, 1,P_3,P_4)$且 $(P_1,P_2, 2,P_4) \equiv (P_1,P_2,P_3, 3)$，故共有$3^3$×2＋$4^3$×2＝182
1W	276	$(2,P_2,P_3,P_4)$時，此時P_2可填{2,4,5,6}共 4 種，此時P_3可填{4,5,6}共 3 種，$P_4 \equiv P_2$，情形有 4×3×4＝48 種 $(3,P_2,P_3,P_4) \equiv (2,P_2,P_3,P_4)$ $(P_1, 2,P_3,P_4)$時，此時P_1可填{4,5,6}共 3 種，此時P_4可填{2,4,5,6}共 4 種，$P_3 \equiv P_1$，情形有 3×3×4＝36 種 $(P_1, 3,P_3,P_4) \equiv (P_1, 2,P_3,P_4)$ $(P_1,P_2,P_3, 2)$，此時P_1可填{4,5,6}共 3 種， $P_3 \equiv P_2 \equiv P_1$，情形有 3×3×3＝27 種 $(P_1,P_2, 1,P_4) \equiv (P_1,P_2,P_3, 1) \equiv (P_1,P_2, 3,P_4) \equiv$ $(P_1,P_2,P_3, 2)$ 共 48×2＋36×2＋27×4＝276 種
1B1W	230	Case1：$(1,P_2, 1,P_4)$，此時P_2可填{4,5,6}共 3 種， 此時P_4可填{1,4,5,6}共 4 種，情形有 3×4＝12 種 $(1, 2,P_3,P_4) \equiv (1,P_2, 3,P_4) \equiv (P_1, 1, 1,P_4) \equiv$ $(P_1, 1, 3,P_4) \equiv (P_1, 1,P_3, 1) \equiv (P_1,P_2, 2, 1) \equiv$ $(1,P_2, 1,P_4)$ Case2：$(1,P_2,P_3, 1)$，此時P_2可填{4,5,6}共 3 種， 此時P_4可填{4,5,6}共 3 種，情形有 3×3＝9 種

		$(1,P_2,P_3,2) \equiv (1,3,P_3,P_4) \equiv (2,1,P_3,P_4) \equiv$ $(3,1,P_3,P_4) \equiv (P_1,1,P_3,2) \equiv (1,P_2,P_3,1)$ Case3：$(P_1,3,2,P_4)$，此時P_2可填$\{2,4,5,6\}$共 4 種， 此時P_4可填$\{2,4,5,6\}$共 4 種，情形有 4×4＝16 種 $(P_1,P_2,1,3) \equiv (P_1,3,2,P_4)$ Case4：$(3,P_2,2,P_4)$，此時P_2可填$\{2,3,4,5,6\}$共 5 種， 此時P_4可填$\{2,4,5,6\}$共 4 種，情形有 5×4＝20 種 $(2,P_2,P_3,3) \equiv (P_1,2,P_3,3) \equiv (3,P_2,2,P_4)$ 共 7×12＋6×9＋2×16＋3×20＝230 種
2B	105	$(1,1,P_3,P_4)$，此時P_3可填$\{1,4,5,6\}$共 4 種，$P_4 \equiv P_3$， 情形有 4×4＝16 種 $(1,P_2,2,P_4) \equiv (1,P_2,P_3,3) \equiv (P_1,1,2,P_4) \equiv (P_1,1,P_3,3)$ $\equiv (1,1,P_3,P_4)$ $(P_1,P_2,2,3)$，此時P_1可填$\{2,3,4,5,6\}$共 5 種，$P_2 \equiv P_1$， 情形有 5×5＝25 種 共 25＋16×5＝105 種
2W	222	Case1：$(P_1,P_2,1,1)$，此時P_1可填$\{4,5,6\}$共 3 種， $P_2 \equiv P_1$，情形有 3×3＝9 種 $(P_1,2,1,P_4) \equiv (P_1,2,P_3,1) \equiv (P_1,3,1,P_4)$ $\equiv (3,P_2,P_3,2) \equiv (P_1,P_2,3,1) \equiv (P_1,3,P_3,2)$ $\equiv (P_1,P_2,3,2) \equiv (P_1,P_2,1,1)$ Case2：$(2,P_2,P_3,1)$，此時P_2可填$\{2,4,5,6\}$共 4 種， P_3可填$\{4,5,6\}$共 3 種，情形有 4×3＝12 種 $(3,P_2,1,P_4) \equiv (P_1,3,P_3,1) \equiv (2,3,P_3,P_4) \equiv$ $(2,P_2,3,P_4) \equiv (3,2,P_3,P_4) \equiv (P_1,P_2,1,2) \equiv$

		$(P_1, 3, P_3, 2) \equiv (P_1, 2, 3, P_4) \equiv (2, P_2, P_3, 1)$ Case3：$(2, P_2, 1, P_4)$，此時P_2可填{2,4,5,6}共 4 種， P_3可填{2,4,5,6}共 4 種，情形有 4×4＝16 種 $(2, P_2, 1, P_4) \equiv (3, P_2, P_3, 1)$ 共 9×8＋12×9＋16×2＝222 種
2B1W	40	$(P_1, 1, 1, 3)$，此時P_1可填{1,4,5,6}共 4 種 $(1, 1, 3, P_4) \equiv (1, 1, P_3, 2) \equiv (1, 3, 2, P_4)$ $\equiv (1, P_2, 2, 1) \equiv (1, 2, P_3, 3) \equiv (1, P_2, 1, 3)$ $\equiv (3, 1, 2, P_4) \equiv (P_1, 1, 2, 1) \equiv (2, 1, P_3, 3)$ $\equiv (P_1, 1, 1, 3)$ 共 4×10＝40 種
1B2W	84	Case1：$(1, 2, 1, P_4)$，此時P_4 可填{1,2,4,5,6}共 5 種 $(1, 3, P_3, 1)) \equiv (P_1, 1, 3, 2) \equiv (3, P_2, 2, 1) \equiv$ $(2, P_2, 1, 3) \equiv (1, 2, 1, P_4)$ Case2：$(1, 2, 3, P_4)$，此時P_4 可填{2,4,5,6}共 4 種 $(1, 3, P_3, 2) \equiv (1, 3, 1, P_4) \equiv (1, 2, P_3, 1) \equiv$ $(1, P_2, 3, 2) \equiv (1, P_2, 1, 2) \equiv (2, 1, P_3, 1) \equiv$ $(2, 1, 3, P_4) \equiv (3, 1, 1, P_4) \equiv (3, 1, P_3, 2) \equiv$ $(P_1, 1, 1, 2) \equiv (P_1, 1, 3, 1) \equiv (P_1, 3, 2, 1) \equiv$ $(P_1, 2, 1, 3) \equiv (1, 2, 3, P_4)$ Case3：$(1, P_2, 3, 1)$ 此時P_2 可填{4,5,6}共 3 種 $(2, P_2, 1, P_4) \equiv (3, P_2, P_3, 1)$ 共 5×5＋4×14＋3＝84 種
3B	20	C_3^4×5＝20
3W	44	Case1：$(2, P_2, 3, 1)$，此時P_2可填{1,4,5,6}共 4 種

		$(3,P_2,1,2) \equiv (2,3,1,P_4) \equiv (3,2,1,P_4) \equiv$ $(3,P_2,1,1) \equiv (P_1,3,1,1) \equiv (P_1,2,1,1) \equiv$ $(2,P_2,1,1) \equiv (2,P_2,3,1)$ Case2：$(2,3,P_3,1)$，此時P_3可填{4,5,6}共 3 種 $(3,2,P_3,1) \equiv (P_1,2,1,3) \equiv (P_1,3,1,2)$ 共 8×4＋3×4＝40 種
1B3W	4	列舉：(1,3,1,2)，(1,2,3,1)，(3,1,1,2)，(2,1,3,1)
2B2W	5	列舉：(1,1,3,2)，(1,3,2,1)，(1,2,1,3)，(3,1,2,1)，(2,1,1,3)
4W	2	列舉：(2,3,1,1)，(3,2,1,1)
4B	1	正解
合計	1296	

(五) (1,2,3,4)

守密者回應	可能情形數	說明
None	16	每個位置只剩 2 個顏色可以選擇，故$2^4＝16$
1B	108	$(1,P_2,P_3,P_4)$時，每個位置剩 3 個顏色，此時有$3^3＝27$ 種 $(1,P_2,P_3,P_4) \equiv (P_1,2,P_3,P_4) \equiv (P_1,P_2,3,P_4) \equiv$ $(P_1,P_2,P_3,4)$，故共有3^3×4＝108 種
1W	**152**	當顏色 1 錯位時，有下列情況： Case1：$(P_1,1,P_3,P_4)$，此時P_1可填{5,6}共 2 種，P_3可填 {1,5,6}共 3 種，P_4可填顏色{1,5,6}共 3 種， 此情形有 2×3×3＝18 種 Case2：$(P_1,P_2,1,P_4)$，此時P_1可填{5,6}共 2 種， P_3可填{5,6}共 2 種，P_4可填{1,5,6}共 3 種， 此情形有 2×2×3＝12 種

		Case3：(P_1,P_2,P_3, 1)，此時P_1可填{5,6}共 2 種， P_2可填{5,6}共 2 種，P_3可填{5,6}共 2 種， 此情形有 2×2×2＝8 種 當顏色 1 錯位時，共有 18＋12＋8＝38 種 又 4 個顏色錯位狀態等價，故有 38×4＝152 種
1B1W	**252**	當顏色 1 位置對，顏色 2 錯位時，可分成 (1,P_2, 2,P_4)，此時P_2可填{1,5,6}共 3 種， P_4可填顏色{1,2,5,6}共 4 種，有 3×4＝12 種 (1,P_2,P_3, 2)，此時P_2可填{1,5,6}共 3 種， P_4可填{1,5,6}共 3 種，有 3×3＝9 種 由上可知當顏色 1 位置對，另一顏色錯位共有 21 種 因有 3 種顏色錯位，故此時有 3×21＝63 種 又顏色 1 位置對 ≡ 顏色 2 位置對 ≡ 顏色 3 位置對 ≡ 顏色 4 位置對，故共有 4×63＝252 種
2B	**96**	從 4 個位置中選 2 個位置固定顏色，其餘位置剩 4 種顏色可選，故總共C_2^4×4^2＝96 種
2W	**312**	當鎖定顏色 1 以及顏色 2 錯位時，不可再有顏色 3 和顏色 4，而顏色 1 和顏色 2 試位置可再放入，經整理共有下列幾種： 2111 2161 5512 5521 2112 2162 5612 5621 2115 2165 6512 6521 2116 2166 6612 6621 2121 2511 5121 2122 2512 5122 2125 2515 5125 2126 2516 5126

		2151 2611 6121 2152 2612 6122 2155 2615 6125 2156 2616 6126 6112 2521 2621 5112 6151 2551 2651 5152 6162 2561 2661 5162 上列共有 52 種，故總共C_2^4×52=312 種
2B1W	48	1213 1431 4232 2334 1223 1433 4233 2434 1253 1435 4235 2534 1263 1436 4236 2634 1241 1314 2231 3134 1242 1344 3231 4134 1245 1354 5231 5134 1246 1364 6231 6134 1132 1124 3224 2214 1332 1424 3244 4214 1532 1524 3254 5214 1632 1624 3264 6214 共 48 種
1B2W	132	當鎖定 1 個位置，其餘兩個顏色錯位時，例如： (1, 3, 2,P_4)，P_4不可再填入 4，此情形有 5 種 (1, 3, 4,P_4)，P_4不可再填入 2,4，此情形有 4 種 (1,P_2, 2, 3) ≡ (1,P_2, 4, 2) ≡ (1,P_2, 4, 3) ≡ (1, 4, 2,P_4) ≡ (1, 4,P_3, 3) ≡ (1, 3,P_3, 2) ≡ (1, 3, 4,P_4) 以此例共 5＋4×7＝33 種情形 故共有C_3^4× 33＝132 種
3B	20	C_3^4× 5＝20 種
1B3W	8	C_1^4× 2＝8

2B2W	6	C_2^4＝6
4W	9	列舉：(2,3,4,1)，(2,1,4,3)，(2,4,1,3)，(3,1,4,2)，(3,4,1,2)，(3,4,2,1)，(4,3,2,1)，(4,1,2,3)，(4,3,1,2)
4B	1	正解
合計	1296	

伍、研究結果

一、L＝3，C＝4 的第一步策略後續影響整理成下列表格

第一步策略	守密者回應種類數	**最大**可能情形數	最多回應情形
(1,1,1)	3	27	None、1B
(1,1,2)	8	17	1B
(1,2,2)	8	17	1B
(1,2,3)	10	21	2W

這四個情形中，在各種回應發現可能情形數以(1,1,2)和(1,2,2)最少，又(1,1,2) ≡ (1,2,2)，我們從這個情形更進一步探討後續的情形，發現可以從原本 64 種進一步降到 17 種，第三步會剩 4 種，第四步剩 2 種，第五步僅剩 1 種。

因此歸納出當 L＝3，C＝4，$(C_1,\ C_1,\ C_2)$或者$(C_1,\ C_2,\ C_2)$當作第一步，最少都可以在 5 步內獲勝。以 2 種顏色作為第一步最佳。

二、L＝4，C＝6 的第一步策略後續影響整理成下列表格

第一步策略	守密者回應 種類數	**最大** 可能情形數	最多回應 情形
(1,1,1,1)	5	625	None
(1,1,1,2)	11	317	1W
(1,1,2,2)	13	256	None、1B、1W
(1,1,2,3)	14	276	1W
(1,2,3,4)	14	312	2W

這五個情形中，在各種回應發現可能情形數以(1,1,2,2)最少，若能更進一步用電腦模擬出後續步數，也可以在 5 步內獲勝。因此當 L=4，C=6，以 2 種顏色平均放置作為第一步最佳。但是若以(1,1,2,3)而言，最壞情形雖來到 276 步，但此回應只有 1W 情形，我們將來若有機會，或許可以利用(1,1,2,3)再搭配第二步的策略，或許也可以在 5 步內獲勝。

三、當 $L=3$，$C=n$ 第一局遇到 **1B** 回應的可能情形數之公式

第一步策略	遇到 1B 回應的可能情形數之公式
(C_1, C_1, C_1)	$C_1^3 \times (n-1)^{3-1}$
(C_1, C_1, C_2)	$(n-2)^{3-1} \times (3-1) + (n-1)^{3-1}$
(C_1, C_2, C_2)	$(n-1)^{3-1} + (n-2)^{3-1} \times (3-1)$
(C_1, C_2, C_3)	$C_1^3 \times (n-(3-1))^{3-1}$

四、當 $L=4$，$C=n$ 第一局遇到 **1B** 回應的可能情形數之公式

第一步策略	遇到 1B 回應的可能情形數之公式
(C_1, C_1, C_1, C_1)	$C_1^4 \times (n-1)^{4-1}$
(C_1, C_1, C_1, C_2)	$(n-2)^{4-1} \times (4-1) + (n-1)^{4-1}$
(C_1, C_1, C_2, C_2)	$C_1^4 \times (n-2)^{4-1}$
(C_1, C_1, C_2, C_3)	$(n-3)^{4-1} \times 2 + (n-2)^{4-1} \times 2$
(C_1, C_2, C_3, C_4)	$C_1^4 \times (n-(4-1))^{4-1}$

陸、未來展望

對於一個問題當沒有既定公式或定理確保解開時，人類總是想試著找出最佳解。此研究中的 MasterMind 遊戲或是像俄羅斯方塊雖被歸類成 NP 問題，亦即無法用多項式時間來找出解。本研究從最壞情況下來討論解法，但仍需要指數時間。若能從最壞情形中再結合其他演算法，或是混合搭配，相信或許可以改善解密的速度或是效率。

未來如果還有時間，我們也想撰寫出讓電腦模擬(1,1,2,2)第一步策略後，搭配搜尋演算法，再更進一步算出第二步的可能情形數，但從數學的角度來看，如果能試著從第一步以及第二步的回應，快速再找出第三步的策略就更好了。

柒、參考文獻

一、Donald E. Knuth(1976)。THE COMPUTER AS MASTERMIND。*J. RECREATIONAL MATHEMATICS*，9(1)。

二、Jeff Stuckman and Guo-Qiang Zhang(2006)。Matermind is NP-Complete。