屏東縣第64屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學

組　　別：國小

作品名稱：正多面體知多少

關 鍵 詞：正多面體、頂點角

編號：A1010

正多面體知多少

摘要

這次的研究是要找出正多面體的種類。首先我們觀察考慮正多面體的特色，藉由其特色導出公式，再將先關資料代入該公式計算並進行討論來找出正多面體的數量，最後，透過圖形觀察及實際操作，找出正多面體的種類，並經由歸納討論得到我們要找的研究結果。

壹、前言

一、研究動機

有一次數學課上的是五上第十單元：柱體、錐體和球，在使用附件的展開圖摺貼成正方體時，老師提到正方體又稱為正 6 面體，因為它有 6 個全等的面；此時，就有學生甲拿了一個 4 個面都是正三角形的角錐說：「那這個角錐是不是也叫做正 4 面體？」學生乙則接著問：「老師！有正 6 面體、正 4 面體，那是不是也有正 5 面體、正 7 面體、正 8 面體、正 100 面體？」因為這個提問，引起班上多數同學的興趣及討論，於是，老師就問了一個問題：「任意幾個全等圖形都能拼成一個立體圖形嗎？如果是的話，是不是會有無限多種的正多面體呢？你可以就你手上多餘的附件，將它每個面剪下來，和同組同學合作拼拼看。」這問題引發了學生們的熱烈討論及拼裝，後來，這就變成了當天的回家功課。隔天，同學們把拼排出並記錄的結果發表，雖然結果不完整，但卻是花了許多時間完成的，這時我們就想，有沒有方法可以很明確地找出正多面體有幾種呢？

二、研究目的

找出總共有多少種正多面體。

貳、研究設備及器材

厚紙板、雙面膠、透明膠帶

參、研究過程或方法

一、 觀察討論：正多面體的特性

觀察正多面體，我們可以找出它的特性如下：

(一)是由好幾個正多邊形所組成的。

(二)所有的面全等。

(三)每條邊一樣長。

(四)每個相交的面處的角（也就是頂點發出的角）一樣大。

(五)因為正多邊形是立體圖形，所以正多面體的每個頂點至少在三個面上。

(六)由第（五）點可知，正多面體中面數最少的是由 4 個正三角形所組成的正 4 面體。

(七)正多面體中，隨著其面數越來越大，該正多面體有可能會越來越接近球體的形狀，但必有頂點和角，不可能成為全平面。

二、利用正多面體的特性進行推論：

（一）根據以上第一大點中的第(四)點：正多面體的每個相交的面處的角（也就是頂點發出的角）一樣大以及第(七)點：正多面體中，隨著其面數越來越大，該正多面體有可能會越來越接近球體的形狀，但必有頂點和角，不可能成為全平面。我們可以知道正多面體的每個相交的面處的角（也就是頂點發出的角）必小於 360 度。

（二）在康軒版五上數學課本第五單元：多邊形與扇形中，課本曾利用畫對角線 的方式將四邊形分成兩個三角形，並推導出四邊形的內角和是 180×2＝360 度。利用此一方式，我們可以推導出五邊形、六邊形……等多邊形的內角和，進一步推導出一個正 n 邊形的內角和是 180×（n-2）度。

（三）因為一個正 n 邊形的內角和是 180×（n-2）度，所以正 n 邊形的每一個內角都是 180×（n-2）÷n 度。

（四）假設有一個正多面體的每個面都是正 n 邊形，且它每個頂點都在 y 個面

上，那這個正多面體的頂點所發出的角（以下一律稱頂點角） 是由 y 個角所組成的，我們可將此頂點角寫成 180×（n-2）÷n×y。

（五）根據第（一）點，正多面體的每個頂點角必小於 360 度，我們可以寫成 180×（n-2）÷n×y＜360。

三、討論與歸納：

（一）因多邊形是指三角形、四邊形、五邊形……等，考慮正 n 邊形的內角公式 180×（n-2）÷n：

1.當 n＝3 時，正三角形每個內角＝60 度

2.當 n＝4 時，正方形每個內角＝90 度

3.當 n＝5 時，正五邊形每個內角＝108 度

4.當 n＝6 時，正六邊形每個內角＝120 度

根據一、 觀察討論：正多面體的特性中的第(五)點：「因為正多邊形是立體圖形，所以正多面體的每個頂點至少在三個面上。」我們可以知道 y≥ 3。如果 n＝6 時，正六邊形每個內角＝120 度，當 y＝3，此時正多面體的每個相交的面處的角（也就是頂點發出的角）＝120×3＝360 度，這與正多面體的每個頂點角必小於 360 度不合。觀察 n＝1、2、3、4，隨著 n 變大，正多邊形的每一個內角就變大，所以在 y＝3，當 n＝7、8、9……等數時，都與正多面體的每個頂點角必小於 360 度不合，也就是不符合算式 180×（n-2）÷n×y＜360。所以，我們可以歸納出:n 和 y 必為正整數， y≥ 3，而 3≤n≤5。

(二)因為 n＝1、2、3、4，隨著 n 變大，正多邊形的每一個內角就變大，所以當 n＝3 時，也就是正三角形時，其內角等於 60 度是正多邊形的最小內角度數，此時正多面體的每個頂點角必小於 360 度，也就是 60×y＜360，所以 y＜6，也就是 y 最大就是 5。

(三)綜合(一)和(二)，我們可以歸納出 n 和 y 的範圍：n 和 y 必為正整數，3≤y≤5，而 3≤n≤5。

(四)利用(三)的結果代入算式 180×（n-2）÷n×y＜360 來進行討論：

1.當 n＝3，y＝3 時，帶入算式得到 180×(3-2)÷3×3＝180 符合小於 360 的條

件。

2.當 n＝3，y＝4 時，帶入算式得到 180x(3-2)÷4x3＝135 符合小於 360 的條件。

3.當 n＝3，y＝5 時，帶入算式得到 180x(3-2)÷5x3＝108 符合小於 360 的條件。

4.當 n＝4，y＝3 時，帶入算式得到 180x(4-2)÷4x3＝270 符合小於 360 的條件。

5.當 n＝4，y＝4 時，帶入算式得到 180x(4-2)÷4x4＝360 不符合小於 360 的條件。

6.當 n＝4，y＝5 時，帶入算式得到 180x(4-2)÷4x5＝450 不符合小於 360 的條件。

7.當 n＝5，y＝3 時，帶入算式得到 180x(5-2)÷5x3＝324 符合小於 360 的條件。

8.當 n＝5，y＝4 時，帶入算式得到 180x(5-2)÷5x4＝432 不符合小於 360 的條件。

9.當 n＝5，y＝5 時，帶入算式得到 180x(5-2)÷5x5＝540 不符合小於 360 的條件。

(五)由(四)可知，當（n，y）＝（3，3）、（3，4）、（3，5）、（4，3）、（5，3）時符合算式 180x（n-2）÷nxy＜360，也就是能形成正多面體的頂點角。以下就這 5 組數據進行其幾何圖形的討論。

1. （n，y）＝（3，3），此時正多面體的每個頂點角是由 3 個正三角形的其中一個角所構成的，由於不知道這是幾面體，我們暫將此正多面體稱為正多面體 A。

2. （n，y）＝（3，4），此時正多面體的每個頂點角是由 4 個正三角形的其中一個角所構成的，由於不知道這是幾面體，我們暫將此正多面體稱為正多面體 B。

3. （n，y）＝（3，5），此時正多面體的每個頂點角是由 5 個正三角形的

其中一個角所構成的，由於不知道這是幾面體，我們暫將此正多面體稱為正多面體 C。

4. （n，y）＝（4，3），此時正多面體的每個頂點角是由 3 個正方形的其中一 個角所構成的，由於不知道這是幾面體，我們暫將此正多面體稱為正多面體 D。

5. （n，y）＝（5，3），此時正多面體的每個頂點角是由 3 個正五邊形的其中一個角所構成的，由於不知道這是幾面體，我們暫將此正多面體稱為正多面體 E。

所以，正多面體就只有以上 A、B、C、D、E 五種。

四、 再就歸納結果進行操作討論。

請學生利用厚紙板裁製數個全等的正三角形、全等的正方形和全等的正五邊形，利用這些全等圖形、膠帶和雙面膠，考慮 A、B、C、D、E 五種正多面體的頂點角面數及其面的形狀，試著拼拼看後進行討論。

(一)、正多面體 A 的頂點角是由 3 個正三角形所構成的，經拼裝後發現其為正 4 面體。

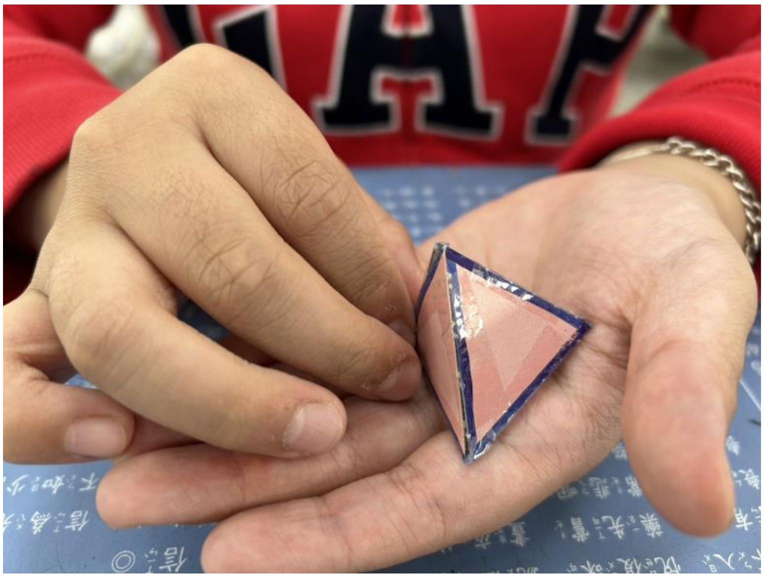
(二)、正多面體 B 的頂點角是由 4 個正三角形所構成的，經拼裝後發現其為正 8 面體。

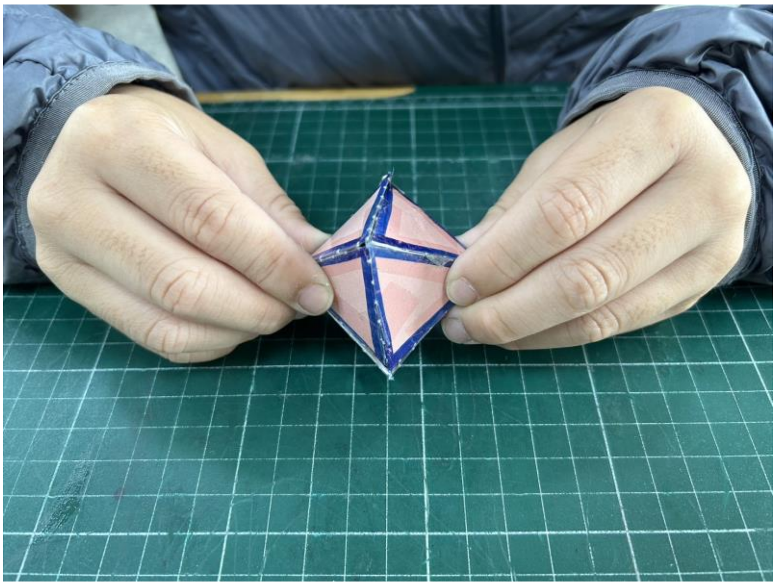
(三)、正多面體 C 的頂點角是由 5 個正三角形所構成的，經拼裝後發現其為正 20 面體。

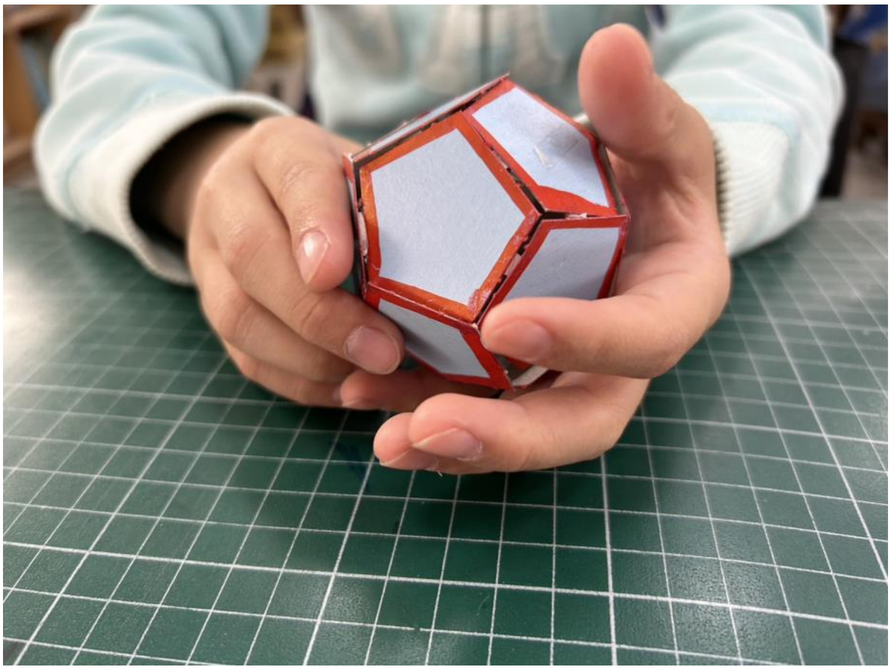
(四)、正多面體 D 的頂點角是由 3 個正方形所構成的，經拼裝後發現為正 6 面體。

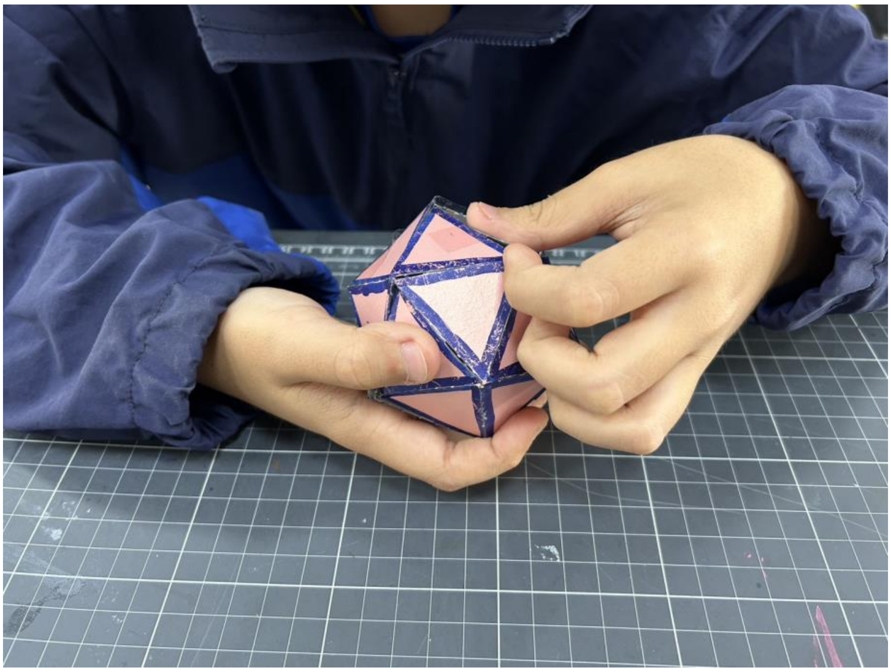
(五)、正多面體 E 的頂點角是由 3 個正五邊形所構成的，經拼裝後發現為正 12 面體。

將以上 5 種正多面體按照面數由少排到多，依序為正 4 面體、正 6 面體、正 8 面體、正 12 面體和正 20 面體。



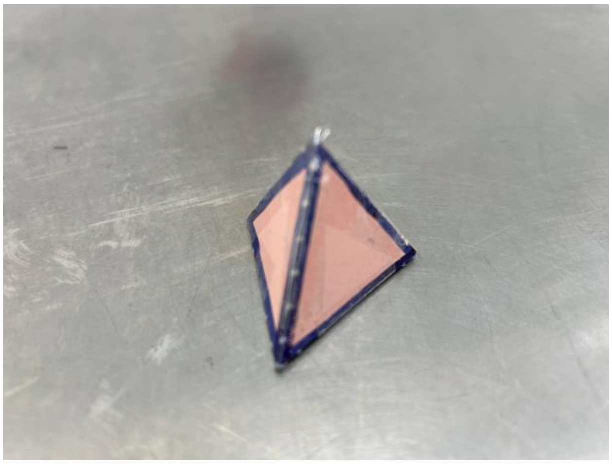
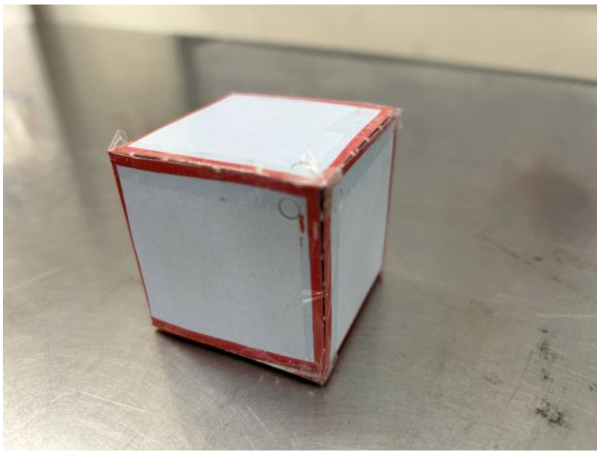
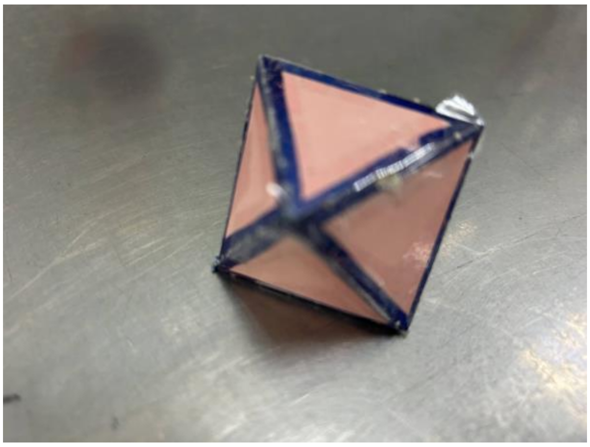


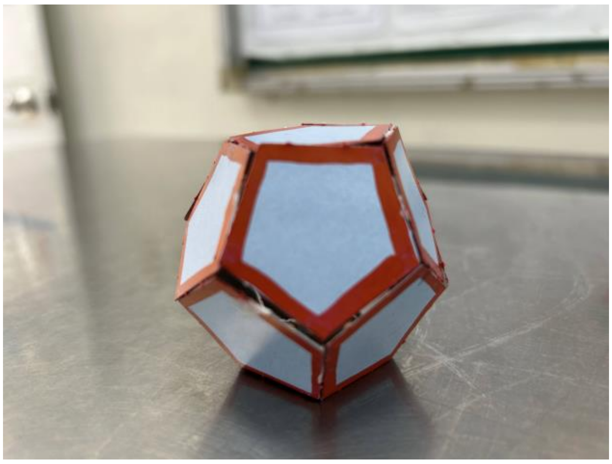
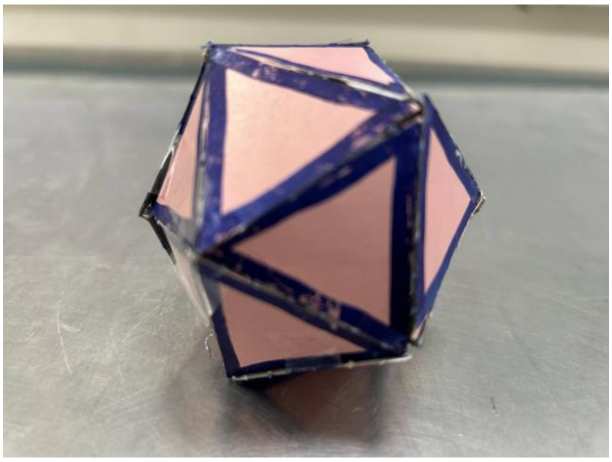




肆、研究結果

由之前的計算、討論與實際操作，我們得到正多面體有以下 5 種：

名稱	探討的特性	幾何形狀
正 4 面體	有 4 個頂點、6 條邊和 4 個正三角形面，每個點頂角是由 3 個正三角形的其中一個角所構成	
正 6 面體	有 8 個頂點、12 條邊和 6 個正方形面，每個點頂角是由 3 個正方形的其中一個角所構成	
正 8 面體	有 6 個頂點、12 條邊和 8 個正三角形面，每個點頂角是由 4 個正三角形的其中一個角所構成	

正 12 面體	有 20 個頂點、30 條邊和 12 個正五邊形面，每個點頂角是由 3 個正五邊形的其中一個角所構成	
正 20 面體	有 12 個頂點、30 條邊和 20 個正三角形面，每個點頂角是由 5 個正三角形的其中一個角所構成	

伍、討論

由之前的觀察討論正多面體的特性，我們得到算式 $180\times(n-2)\div n\times y<360$，其中 n 此指正多邊形每個面都是正 n 邊形，y 代表它每個頂點都在 y 個面上，且 n 和 y 必為正整數，$3\le y\le 5$，而 $3\le n\le 5$。

透過上述條件計算得知（n，y）有 5 組數據，再經由討論及實際操作，我們得到正多面體有 5 種，以下按面數由少排到多，歸納如下：

一、（n，y）＝（3，3），此時正多面體的每個錐角是由 3 個正三角形所構成的正 4 面體。

二、（n，y）＝（4，3），此時正多面體的每個錐角是由 3 個正方形所構成的正 6 面體。

三、（n，y）＝（3，4），此時正多面體的每個錐角是由 4 個正三角形所構成的正 8 面體。

四、（n，y）＝（5，3），此時正多面體的每個錐角是由 3 個正五邊形所構成的正 12 面體。

五、（n，y）＝（3，5），此時正多面體的每個錐角是由 5 個正三角形所構成的正 20 面體。

陸、結論

本研究我們運用計算、討論、操作及歸納的方式試圖找出正多面體的數量，主要研究結果如下：

一、找出正多面體共有 5 種形式。

二、藉由算式 180×（n-2）÷n×y＜360 找出 5 組（n，y），對應可找出正多面體數量。

三、在討論過程中，我們透過 5 組（n，y）所代表的幾何意義，利用幾何圖形組成找出了 5 種正多面體的頂點角特性，再透過此特性，經由實際操作找出 5 種正多面體分別為正 4 面體、正 6 面體、正 8 面體、正 12 面體和正 20 面體。

柒、參考資料及其他

【數學課本】康軒（民 112）。國小數學課本 第九冊（5 上）。新北市：康軒文教事業股份有限公司。