

屏東縣第64屆國中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：鳩佔鵲巢之鳥媽媽的抉擇

關 鍵 詞：機率、期望值、排列組合

編號：A1015

鳩佔鵲巢之鳥媽媽的抉擇

摘要

本研究旨探討科學研月刊62-2期中森棚教官數學題-鳩佔鵲巢，巢中五隻小喜鵲與一隻小斑鳩，及喜鵲媽媽特殊的餵食習慣，探討喜鵲媽媽應先餵食哪一隻小喜鵲能讓最多小喜鵲吃到，以及喜鵲如何排序，讓所有小喜鵲都吃到。再延伸兩個問題探討，斑鳩媽媽應如何選擇喜鵲巢讓小斑鳩有較高機會吃到食物。

研究中運用排列組合概念中的窮舉法及樹狀圖，運用直線週期排列計數的方法及等比級數計算，推論後得到：小喜鵲數為5隻時，喜鵲媽媽應從1、5號開始餵食，若小喜鵲位置可更動，共有16種排列法可使小喜鵲吃到食物但小斑鳩吃不到；斑鳩媽媽若要讓小斑鳩吃到更多食物，可選擇符合關係式的小喜鵲數，若小喜鵲數小於10，可選擇3或7隻小喜鵲巢。

壹、前言

一、研究動機

我們在某次上網查閱資料時，偶然看見了科學研習期刊中的森棚教官數學題-鳩佔鵲巢：

鳥窩裡有五隻小喜鵲，以及一隻混進來的小斑鳩，這六隻小鳥圍成一圈，小斑鳩編號是0，接著沿著圓周五隻喜鵲順時針座號為1、2、3、4、5。

視力不好的喜鵲媽媽帶著五份食物回來，她餵食的方法相當有趣：首先她選一隻小鳥餵食，假設這隻小鳥的座號是 k ，下一隻被餵食的鳥是由這隻鳥開始，順時針接著沿圓周數的第 k 隻鳥，然後看這隻鳥的編號是多少(比如說是 r)，再由這隻鳥開始沿著圓周數的第 r 隻鳥就是下一隻被餵食的鳥，以此類推。但是如果餵食到斑鳩，食量大的斑鳩會馬上把所有食物吃光。

因此，如果一開始喜鵲媽媽選到0號斑鳩，那這樣所有的小喜鵲都要餓肚子。如果一開始喜鵲媽媽選了2號小鳥餵食，則會有兩隻小喜鵲吃到食物，餵食順序是

2 → 4 → 2 → 4 → 2

- 1.喜鵲媽媽要從幾號小鳥開始餵，會讓最多小喜鵲吃到食物?
- 2.承上題，吃最多份的小喜鵲吃了幾份食物?
- 3.你能不能幫五隻小喜鵲的位置排一個順序，使的喜鵲媽媽從某一隻開始餵食時，會讓五隻小喜鵲都吃到食物，但小斑鳩沒吃到?

我們覺得這個題目很有趣，不知道喜鵲媽媽這樣的餵食法，小喜鵲們究竟吃到多少份食物？如果自然界中的喜鵲媽媽都是這樣餵食(此問題僅是假設)，斑鳩媽媽把蛋產在喜鵲窩時，小斑鳩能吃到多少份食物？應該選擇怎樣的鳥窩較有利於小斑鳩？於是決定以此題目出發進行科展探討。

二、研究目的

首先我們先分析原來的題目，第1、2題小喜鵲的編號即為其位置，而第3題小喜鵲可任意調整位置。討論後，將原題稍微調整如下目的(一)、(二)，再延伸探討若從小斑鳩來看，能有多高的機率吃到食物以及吃到食物的期望值。另外，若斑鳩媽媽能選擇鳥巢，則應挑選鳥巢中小喜鵲數 n 為多少對小斑鳩最有利。

- (一)當小喜鵲的位置不能變動(座號即其位置)，喜鵲媽媽從不同座號的小喜鵲開始餵食，小喜鵲的進食情形。要從幾號開始餵，會讓最多小喜鵲吃到食物？吃最多份的小喜鵲吃了幾份食物？

- (二)將五隻小喜鵲的位置排順序，使得喜鵲媽媽從某一隻開始餵食時，讓五隻小喜鵲都吃到，但小斑鳩吃不到。
- (三)當小喜鵲的位置不能變動(座號即其位置)，小喜鵲數在五隻以內時，小斑鳩吃到食物的機率與食物份數的期望值。
- (四)若小喜鵲的位置不能變動(座號即其位置)，小喜鵲數(n)為多少時能使小斑鳩有較高機率吃到食物。

三、文獻探討

經過初步推論及資料查詢，我們發現這個題目與以下數學觀念有關：

- (一) 排列組合：運用基本計數原理，樹狀圖及窮舉法(參考高中數學第二冊南一版第三章，p112)
- (二) 機率：若樣本空間S有n個元素，每個元素出現的機會均等，則事件A發生的機率p為A的元素個數與S元素個數的比值。(高中數學第二冊南一版112年，第三章，p156)
- (三) 期望值：若事件 A_i 發生的機率為 p_i ($i=1、2、3\cdots、n$)，其中 $p_1+p_2+p_3\cdots+p_n=1$ ，且發生事件 A_i 時對應一個時數值 m_i ，則期望值為 $m_1p_1+m_2p_2+\cdots+m_np_n$ (高中數學第二冊南一版112年，第三章，p166)
- (四) 等比級數：公比r的等比數列前n項和為(高中數學第二冊南一版112年，第一章，p26)

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1r + \cdots + a_1r^{n-1} = \frac{a_1(r^{n-1}-1)}{r-1}$$

四、名詞定義

$[X_1X_2X_3X_4X_5]$ ：鳥巢中依位置排列的小喜鵲座號順序。

#abcde#：依喜鵲媽媽選取規則出現的小喜鵲座碼順序

n：鳥巢中的小喜鵲數

x：小斑鳩在鳥巢中吃到食物的次序

i：喜鵲媽媽開始餵時的小鳥座號

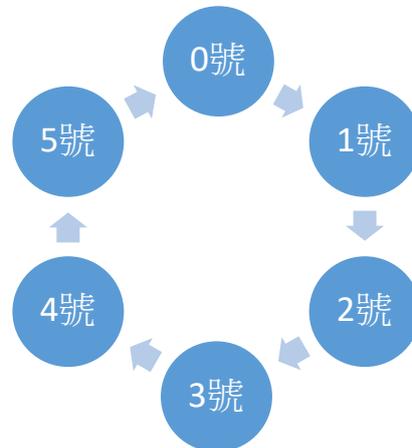
貳、研究設備及器材

計算紙、筆、立可帶、筆記型電腦

參、研究過程或方法

研究一、小喜鵲的位置不能變動(座號即其位置)，喜鵲媽媽從不同座號的小喜鵲開始餵食，小喜鵲的進食情況。

我們將小喜鵲及斑鳩的位置及編號關係以圖像呈現如下：

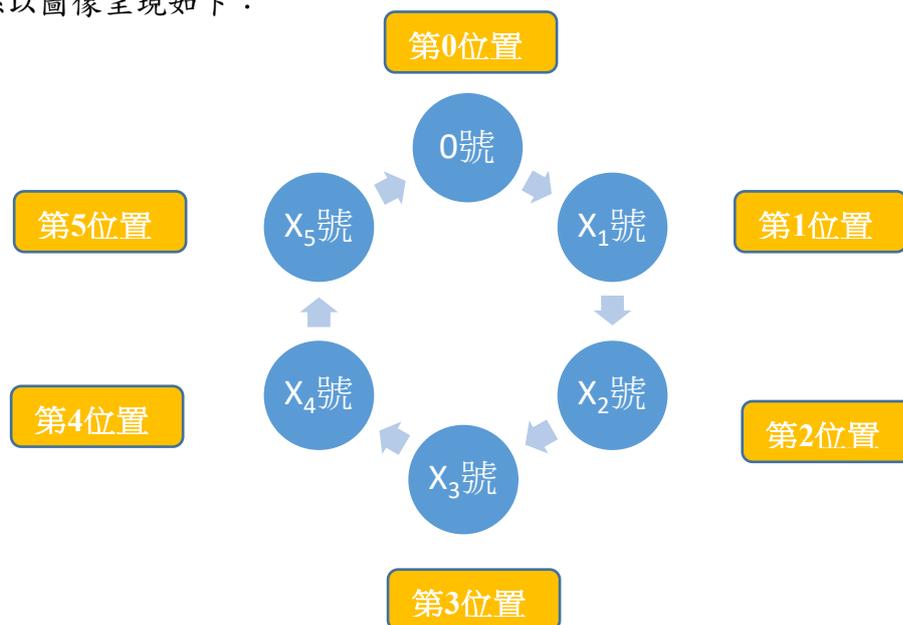


喜鵲媽媽從第0位置開始，依照餵食規則，紀錄吃到食物的小喜鵲及小斑鳩。

接著從第1、2、3、4、5位置，依規則直接推論餵食情形，並判斷從幾號小喜鵲開始餵食，可以最多小喜鵲吃到食物，以及吃最多份的小喜鵲吃了幾份食物。

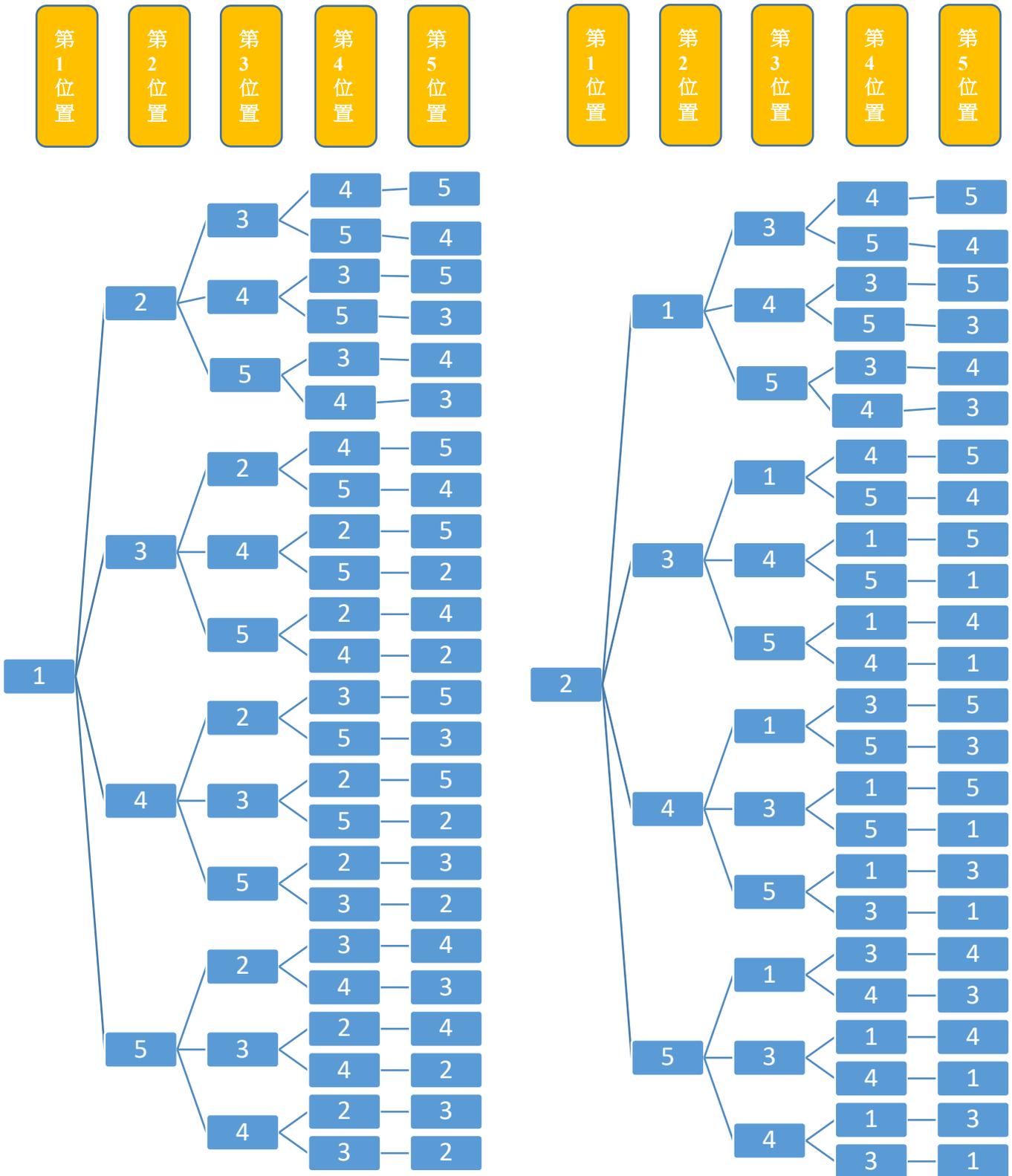
研究二、將五隻小喜鵲的位置排順序，使得喜鵲媽媽從某一隻開始餵食時，讓五隻小喜鵲都吃到，但小斑鳩吃不到。

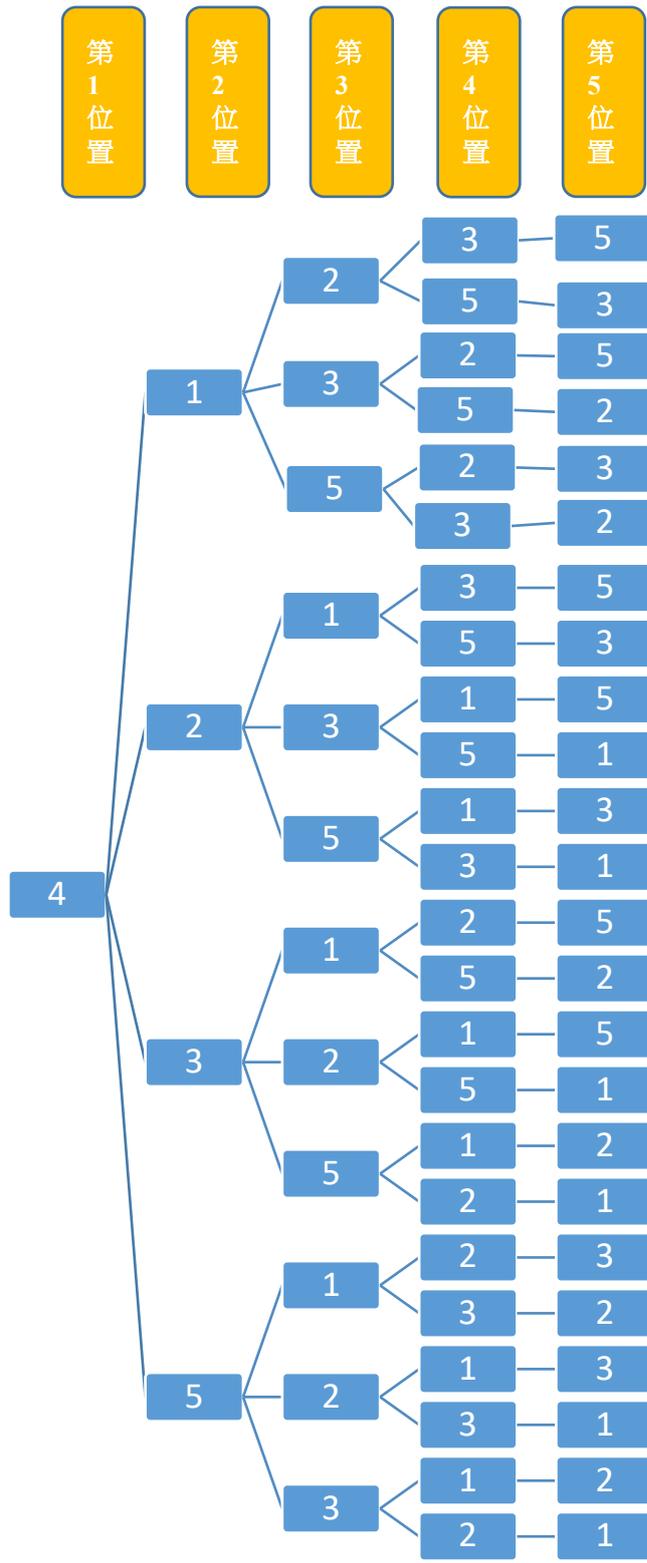
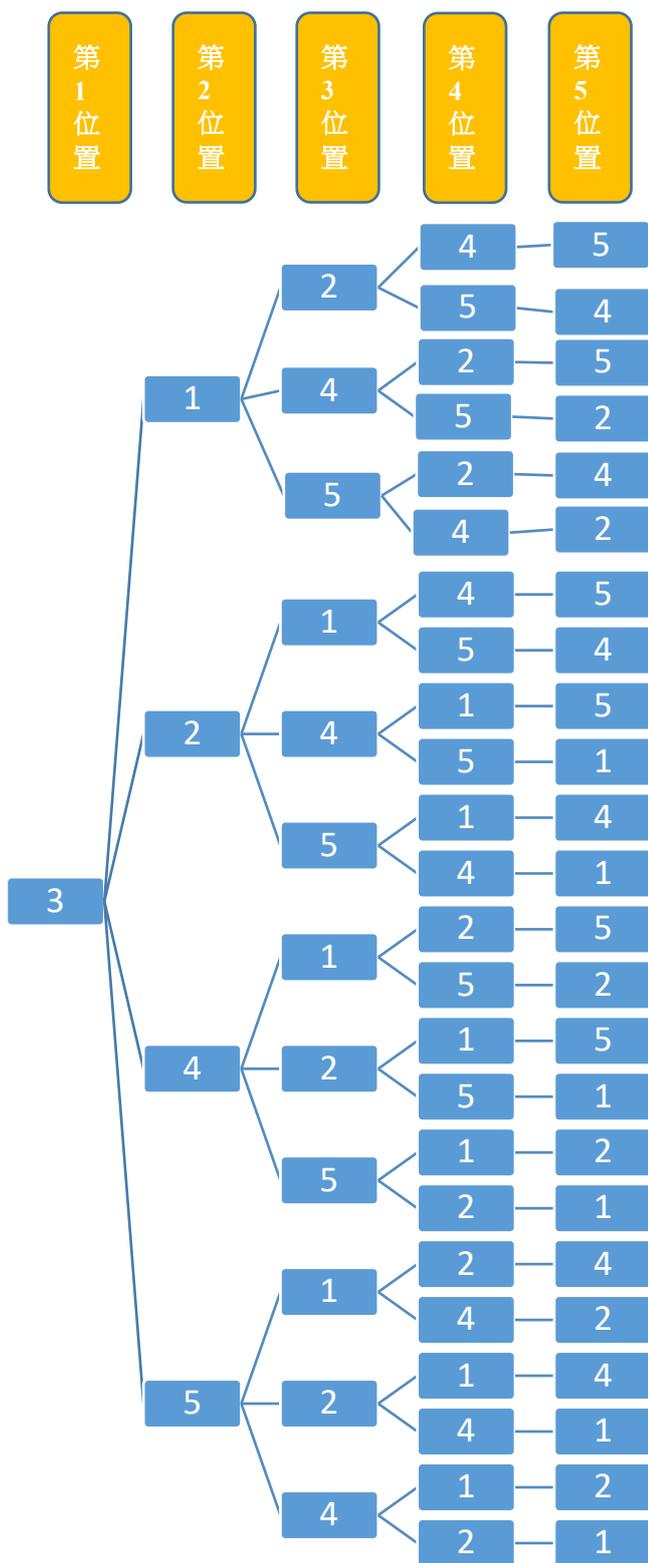
(一)研究二中，小喜鵲的編號與位置不一定相同，我們將小喜鵲及斑鳩的位置及編號關係以圖像呈現如下：



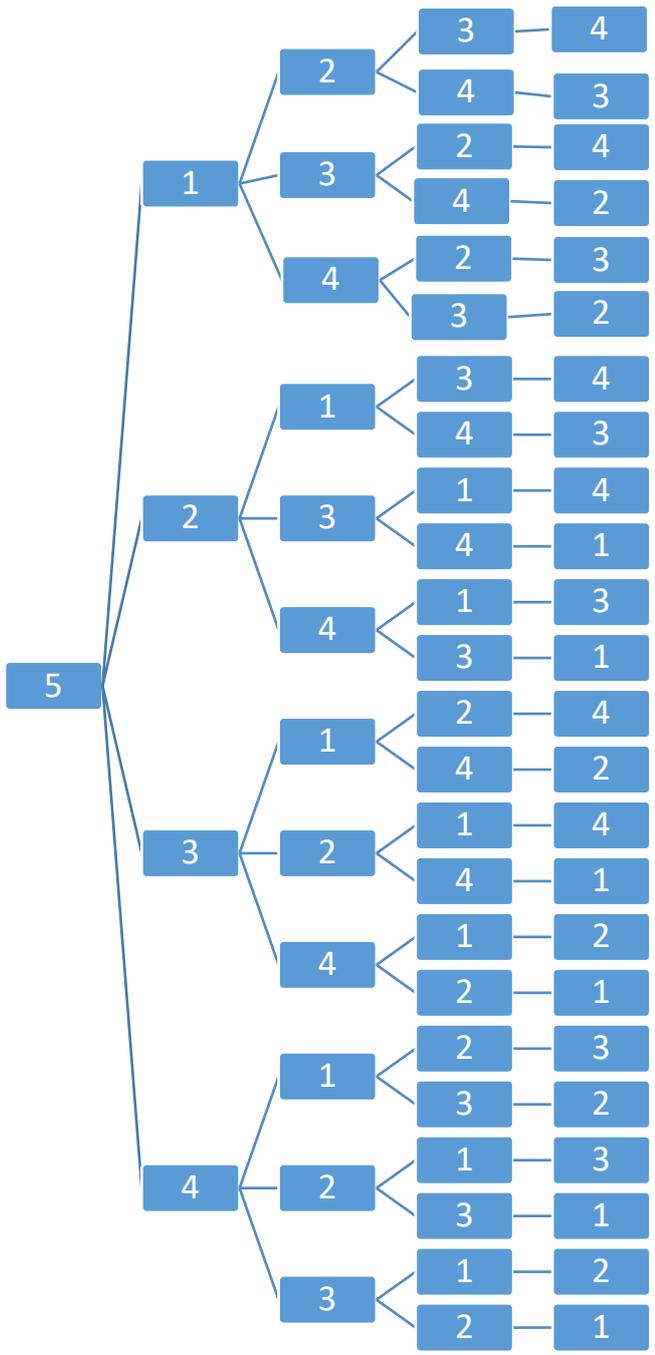
(二)我們試著以排列組合的概念依序排出5隻小喜鵲在5個位置的可能排列情形。首先我們先

試算：五隻小喜鵲在五個位置可能有的排序方法，如下：



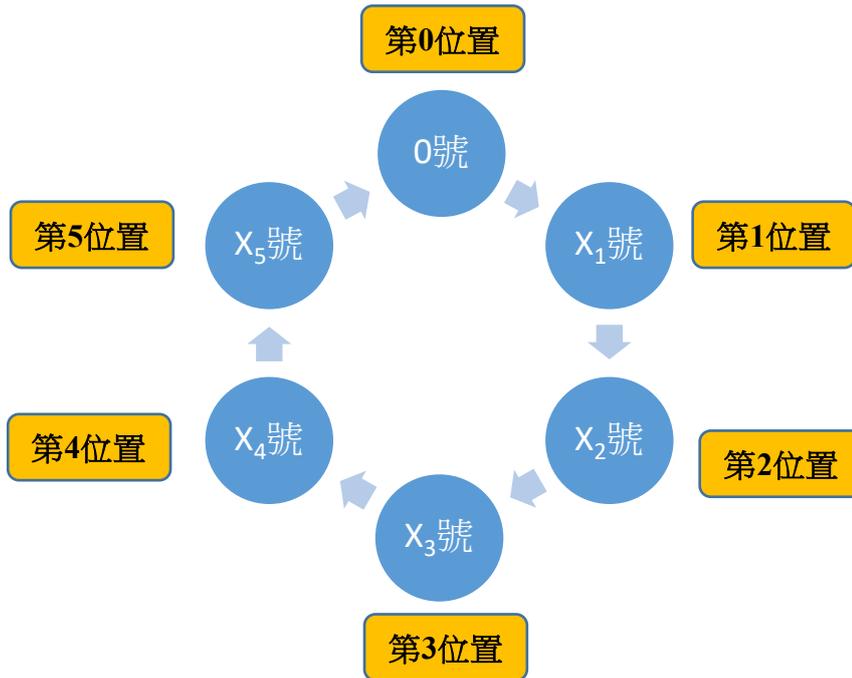


第1位置 第2位置 第3位置 第4位置 第5位置

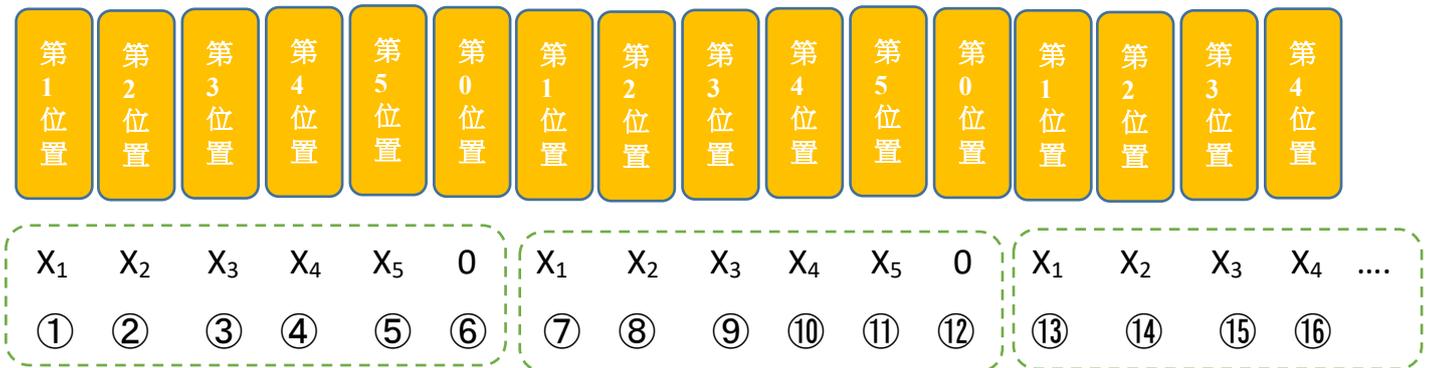


共有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 種可能組合，還可由5個位置開始餵食，所以共有 $5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 5! = 720$ 種可能的情形。
 搭配鳥媽媽的規則，試出符合的座號排序。

(三)另一種將可能的小喜鵲座號組合找出的方法。



首先，將上圖展開變成直線週期循環數列(週期為6)，如下圖，並標示新的號碼



並且定義： $[X_1X_2X_3X_4X_5]$ 為鳥巢中依位置排列的小喜鵲座號順序。

#abcde#為依喜鵲媽媽選取規則出現的小喜鵲座碼順

序(非依位置排列的順序)

1. 假設一開始選擇②，為 a 號($a = X_2$)，就須再往後數 a 個位置後到達 b 號，再往後數 b 個位置到達 c 號，但是若 $a+b=6$ ，則 c 所在位置為⑧，會與②相同，也就是 c 和 a 會同號，因此我們得知 $a + b \neq 6$ 必成立，同理， $b + c \neq 6$ ， $c + d \neq 6$ 。同理，連續三數相加亦不可為 6 及 12 (即 1 號、2 號、3 號小喜鵲不可相鄰)。且 $2 + a + b + c \neq 12 + 2$ ，否則 d 又會到 a 號位置，同理 $a + b + c + d \neq 12$ ，即 $e \neq 3$ 。

規則一、在#abcde#中，連續兩數相加不能等於6，連續三數相加亦不可為6（1、2、3號不可相鄰）及12（3、4、5號不可相鄰），但e不算在內。e≠3。

2. 假設一開始選擇②，為a號， $2+a \neq 6$ ，否則會接著餵給小斑鳩。

規則二、起始位置+a≠6。

3. 假設一開始選擇②，為a號， $2+a+b \neq 6$ 、 $2+a+b+c \neq 12$ 、 $2+a+b+c+d \neq 12$ 或18，否則會接著餵給小斑鳩（因直線序列上，⑥、⑫等6的倍數位置皆為小斑鳩位置）。

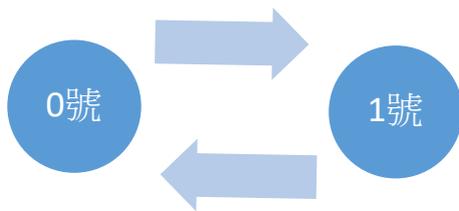
規則三、 $a+b \neq 6$ —起始位置， $a+b+c \neq 12$ —起始位置， $a+b+c+d \neq 12$ —起始位置
 $a+b+c+d \neq 18$ —起始位置

（四）分別討論五個起始位置，再利用以上三個規則，推算出#abcde#序列，並用鳥媽媽的餵食規則再次確認。

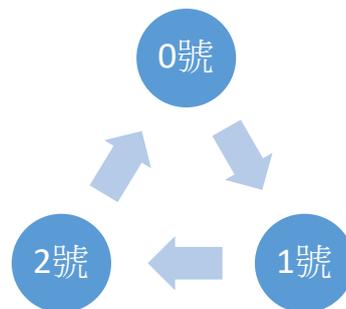
研究三、小喜鵲的位置不能變動(座號即其位置)，小喜鵲數在五隻以內時，小斑鳩進食的機率與期望值。

我們想了解，若以小斑鳩來看，小喜鵲數五隻以下情形，在不同小喜鵲數的鳥窩中，小斑鳩進食的機率及期望值，因小喜鵲數較少，我們採用由圖形直接計算的方式。

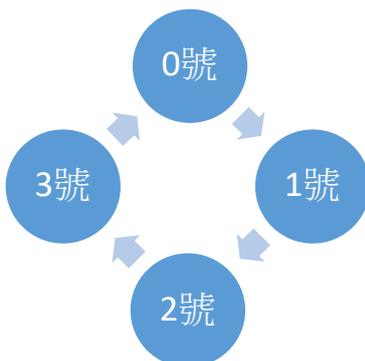
(一)小喜鵲數為1隻，小鳥進食的圖形



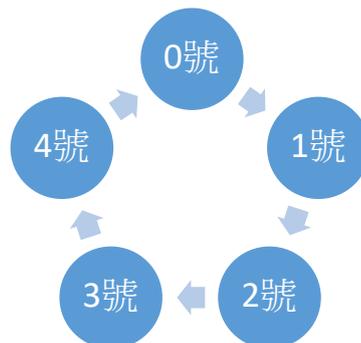
(二)小喜鵲數為2隻，小鳥進食的圖形



(三)小喜鵲數為3隻，小鳥進食的圖形

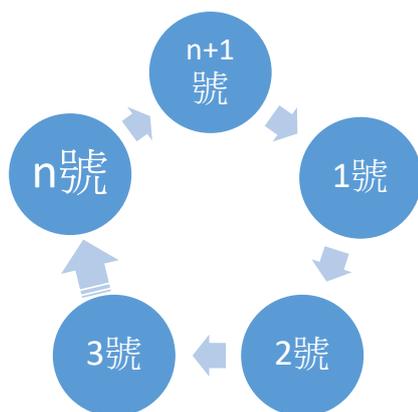


(四)小喜鵲數為4隻，小鳥進食的圖形

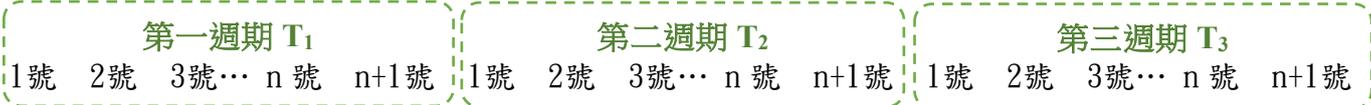


研究四、若小喜鵲的位置不能變動(座號即其位置)，小喜鵲數(n)為多少時能使小斑鳩有較高機率吃到食物。

經過研究三的討論，我們想知道小喜鵲數為奇數時是否小斑鳩吃到食物的機率較高？因此我們採用類似研究二的研究方法，將下圖展開成直線週期循環數列



說明：
此時 n+1號即為0號



假設鳥媽媽第一隻選的是 i 號，若下一隻仍在第一週期，則下一隻的座號為 $2i$ 號，但若下一隻在第二週期，則下一隻的座號為 $2i-(n+1)$ ，而若要小斑鳩吃到食物，則最後需落在 $n+1$ 號。依此原則進行以下推論：

1. 若小斑鳩為鳥巢中第一隻吃到食物的小鳥
2. 若小斑鳩為鳥巢中第二隻吃到食物的小鳥
3. 若小斑鳩為鳥巢中第三隻吃到食物的小鳥
4. 若小斑鳩為鳥巢中第四隻吃到食物的小鳥
5. 若小斑鳩為鳥巢中第五隻吃到食物的小鳥
6. 若小斑鳩為鳥巢中第 x 隻吃到食物的小鳥

肆、研究結果及討論

一、小喜鵲的位置不能變動(按座號坐位置)，喜鵲媽媽從不同座號的小喜鵲開始餵食，小喜鵲的進食情況。

(一)研究結果

開始餵食的小鳥座號	餵食過程	吃到食物的小鳥座號	吃到的食物份數
0號	0	0	5
1號	1 → 2 → 4 → 2 → 4	1	1
		2	2
		4	2
2號	2 → 4 → 2 → 4 → 2	2	3
		4	2
3號	3 → 0	3	1
		0	4
4號	4 → 2 → 4 → 2 → 4	2	2
		4	3
5號	5 → 4 → 2 → 4 → 2	2	2
		4	2
		5	1

(二) 分析與討論

1. 若鳥媽媽 1號及5號開始餵食，能讓最多小喜鵲吃到食物。
2. 當從2號開始餵食，2號小喜鵲可吃到最多份食物--3份，以及從 4號開始餵食，4號喜鵲可以吃到最多份食物--3份。

二、將五隻小喜鵲的位置排順序，使得喜鵲媽媽從某一隻開始餵食時，讓五隻小喜

鵲都吃到，但小斑鳩吃不到。

(一) 研究結果

利用以下三個規則，判斷出可能的號碼排序：

規則一、在#abcde#中，連續兩數相加不能等於6，連續三數相加亦不可為6（1、2、3號不可相鄰）及12（3、4、5號不可相鄰），但e不算在內， $e \neq 3$ 。

規則二、起始位置 $a \neq 6$

規則三、 $a + b \neq 6$ - 起始位置， $a + b + c \neq 12$ - 起始位置， $a + b + c + d \neq 12$ - 起始位置。 $a + b + c + d \neq 18$ - 起始位置。

1. 從第1位置開始，討論可能的排列#abcde#

以下結果依據規則一、二、三，再加上排列組合概念推論出：

$a \neq 5$ ， $a + b \neq 5$ ， $a + b + c \neq 11$ ， $e \neq 3、4$ 。

連續兩數相加不能等於6及1、2、3不可相鄰和3、4、5號不可相鄰。

(1) 若 $1 + a + b = 4$ ，#ab#可能為#12#，無符合數列。

#ab#可能為#21#，此數列可能為#21435#

(2) 若 $1 + a + b = 5$ ，#ab#可能為#13#，此數列可能為

#ab#可能為#31#，此數列可能為#31452#

(3) 若 $1 + a + b = 8$ ，#ab#可能為#34#，此數列可能為#34125#

#ab#可能為#43#，此數列可能為#43251#

#ab#可能為#25#，無符合數列。

(4) 若 $1 + a + b = 9$ ，#ab#可能為#35#，無符合數列。

(5) 若 $1 + a + b = 10$ ，#ab#可能為#45#，無符合數列。

(6) 由鳥媽媽的規則驗證由第一位置開始，上面四個序列#21435#、#31452#、#34125#、#43251# 皆符合，五個位置座號排序為[23145]、[32514]、[31245]、[42153]。

2. 從第2位置開始，討論可能的排列#abcde#

以下結果依據規則一、二、三，再加上排列組合概念推論出：

$a \neq 4$ ， $a + b \neq 4$ ， $a + b + c \neq 10$ ， $e \neq 3、5$ 。

連續兩數相加不能等於6及1、2、3不可相鄰和3、4、5號不可相鄰。

(1) 若 $2 + a + b = 4$ ，#ab#可能為#12#，此數列可能為#12534#。

#ab#可能為#21#，無符合數列。

(2) 若 $2 + a + b = 7$ ，#ab#可能為#23#，無符合數列。

#ab#可能為#32#，無符合數列。

(3) 若 $2 + a + b = 9$ ，#ab#可能為#34#，無符合數列。

#ab#可能為#25#，無符合數列。

#ab#可能為#52#，無符合數列。

(4) 若 $2 + a + b = 10$ ，#ab#可能為#35#，無符合數列。

#ab#可能為#53#，此數列可能為#53142#。

(5) 若 $2 + a + b = 11$ ，#ab#可能為#54#，無符合數列。

(6) 由鳥媽媽的規則驗證由第二位置開始，上面序列#12534#、#53142# 皆符合，

五個位置座號排序為[41235]、[35214]。

3. 從第3位置開始，討論可能的排列#abcde#

以下結果依據規則一、二、三，再加上排列組合概念推論出：

$a \neq 3$ ， $a + b \neq 3$ ， $a + b + c \neq 9$ ， $e \neq 3$ 。

連續兩數相加不能等於6及1、2、3不可相鄰和3、4、5號不可相鄰。

(1) 若 $3 + a + b = 7$ ，#ab#可能為#13#，無符合數列。

(2) 若 $3 + a + b = 8$ ，#ab#可能為#14#，此數列可能為#14325#。

#ab#可能為#41#，此數列可能為#41352#。

#ab#可能為#23#，無符合數列。

(3) 若 $3 + a + b = 10$ ，#ab#可能為#25#，此數列可能為#25314#。

#ab#可能為#52#，此數列可能為#52341#。

#ab#可能為#43#，無符合數列。

(4) 若 $3 + a + b = 11$ ，#ab#可能為#53#，無符合數列。

(5) 由鳥媽媽的規則驗證由第三位置開始，上面序列#14325#、#41352#、#25314#、

#52341#皆符合，五個位置座號排序為[53142]、[13425]、[14235]、[42531]。

4. 從第4位置開始，討論可能的排列#abcde#

以下結果依據規則一、二、三，再加上排列組合概念推論出：

$$a \neq 2, \quad a + b + c \neq 8, \quad e \neq 3、1。$$

連續兩數相加不能等於6及1、2、3不可相鄰和3、4、5號不可相鄰。

- (1) 若 $4 + a + b = 7$ ，#ab#可能為#12#，無符合數列。
- (2) 若 $4 + a + b = 8$ ，#ab#可能為#13#，此數列可能為#13524#。
#ab#可能為#31#，無符合數列。
- (3) 若 $4 + a + b = 9$ ，#ab#可能為#14#，無符合數列。
#ab#可能為#41#，無符合數列。
#ab#可能為#32#，無符合數列。
- (4) 若 $4 + a + b = 11$ ，#ab#可能為#52#，無符合數列。
#ab#可能為#34#，無符合數列。
#ab#可能為#43#，無符合數列。
- (5) 若 $4 + a + b = 13$ ，#ab#可能為#45#，無符合數列。
#ab#可能為#54#，此數列可能為#54132#。
- (6) 由鳥媽媽的規則驗證由第四位置開始，上面序列#13524#、#54132# 皆符合，
五個位置座號排序為[13452]、[25413]。

5. 從第5位置開始，討論可能的排列#abcde#

以下結果依據規則一、二、三，再加上排列組合概念推論出：

$$a \neq 1, \quad a + b + c \neq 7, \quad e \neq 3、2。$$

連續兩數相加不能等於6及1、2、3不可相鄰和3、4、5號不可相鄰。

- (1) 若 $5 + a + b = 8$ ，#ab#可能為#2#，無符合數列。
- (2) 若 $5 + a + b = 9$ ，#ab#可能為#31#，無符合數列。
- (3) 若 $5 + a + b = 10$ ，#ab#可能為#41#，無符合數列。
#ab#可能為#23#，此數列可能為#23415#。
#ab#可能為#32#，此數列可能為#32541#。
- (4) 若 $5 + a + b = 13$ ，#ab#可能為#35#，此數列可能為#35214#。
#ab#可能為#53#，無符合數列。

(5)若 $5 + a + b = 14$ ，#ab#可能為#45#，此數列可能為#45231#。

#ab#可能為#54#，無符合數列。

(6)由鳥媽媽的規則驗證由第五位置開始，上面序列#23415#、#32541#、#35214#、#45231#皆符合，五個位置座號排序為[31542]、[12453]、[25143]、[12534]。

(二) 分析與討論

由研究結果，若鳥媽媽從第1位置，位置座號排序為[23145]、[32514]、[31245]、[42153]；第二位置開始，位置座號排序為[41235]、[35214]；第三位置開始，位置座號排序為[53142]、[13425]、[14235]、[42531]；第四位置開始，位置座號排序為[13452]、[25413]；第五位置開始，位置座號排序為[31542]、[12453]、[25143]、[12534]；以上共有16種可能讓每隻小喜鵲吃到食物，小斑鳩吃不到。

三、小喜鵲的位置不能變動(座號即其位置)，小喜鵲數在五隻以內時，小斑鳩吃到食物的機率與食物份數的期望值。

(一)研究結果

1. 鳥巢中有1隻小喜鵲和1隻小斑鳩，鳥媽媽帶回食物份數1份

從0號開始餵食，小斑鳩吃到1份。

從1號開始餵食，小斑鳩吃到0份。

小斑鳩吃到食物的機率為 $\frac{1}{2}$ ，吃到食物份數期望值為 $\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

2. 鳥巢中有有2隻小喜鵲和1隻小斑鳩，鳥媽媽帶回食物份數2份

從0號開始餵食，小斑鳩吃到2份。

從1號開始餵食，吃到食物的號碼為1、2號。小斑鳩吃到0份。

從2號開始餵食，吃到食物的號碼為2、1號。小斑鳩吃到0份。

小斑鳩吃到食物的機率為 $\frac{1}{3}$ ，吃到食物份數期望值為 $\frac{2}{3} + 0 + 0 = \frac{2}{3}$

3. 鳥巢中有有3隻小喜鵲和1隻小斑鳩，鳥媽媽帶回食物份數3份

從0號開始餵食，小斑鳩吃到3份。

從1號開始餵食，吃到食物的號碼為1、2、0號。小斑鳩吃到1份。

從2號開始餵食，吃到食物的號碼為2、0號。小斑鳩吃到2份。

從3號開始餵食，吃到食物的號碼為3、2、0號。小斑鳩吃到1份。

小斑鳩吃到食物的機率為 $\frac{3}{4}$ ，吃到食物份數期望值為 $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

4. 鳥巢中有有4隻小喜鵲和1隻小斑鳩，鳥媽媽帶回食物份數4份

從0號開始餵食，小斑鳩吃到4份。

從1號開始餵食，吃到食物的號碼為1、2、4、3號。小斑鳩吃到0份。

從2號開始餵食，吃到食物的號碼為2、4、3、1號。小斑鳩吃到0份。

從3號開始餵食，吃到食物的號碼為3、1、2、4號。小斑鳩吃到0份。

從4號開始餵食，吃到食物的號碼為4、3、1、2號。小斑鳩吃到0份。

小斑鳩吃到食物的機率為 $\frac{1}{5}$ ，吃到食物份數期望值為 $\frac{4}{5} + 0 + 0 + 0 + 0 = \frac{4}{5}$ 。

5. 鳥巢中有5隻小喜鵲和1隻小斑鳩，鳥媽媽帶回食物份數5份

直接使用研究(一)的結果，如下

從0號開始餵食，小斑鳩吃到5份。

從1號開始餵食，吃到食物的號碼為1、2、4、2、4號。小斑鳩吃到0份。

從2號開始餵食，吃到食物的號碼為2、4、2、4、2號。小斑鳩吃到0份。

從3號開始餵食，吃到食物的號碼為3、0號。小斑鳩吃到4份。

從4號開始餵食，吃到食物的號碼為4、2、4、2、4號。小斑鳩吃到0份。

從5號開始餵食，吃到食物的號碼為5、4、2、4、2號。小斑鳩吃到0份。

小斑鳩吃到食物的機率為 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ，吃到食物份數期望值為 $\frac{5}{6} + 0 + 0 + \frac{4}{6} + 0 + 0 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ 。

6. 綜合整理如下：

小喜鵲數目	1	2	3	4	5
小斑鳩吃到食物 的機率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
小斑鳩吃到食物 份數的期望值	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{2}$

(二) 分析與討論

1. 在做這個研究前，我們原本預期小喜鵲中的數目越多，吃到食物的機率及期望值應該會越低，因為鳥媽媽從每一隻小鳥開始餵食的機率相同，而小鳥越多能吃到食物的機率及期望值應該越低。但在我們推算後卻發現小喜鵲數為3及5時小斑鳩吃到食物的機率較高、食物份數期望值較多。
2. 研究中我們也發現，機率及期望值較低的是小喜鵲數為2、4。
3. 在小喜鵲數小於5時，若斑鳩媽媽希望小斑鳩能有較高機率吃到食物，則選擇將小斑鳩產於奇數隻小喜鵲的巢中較好，特別是3隻小喜鵲的鳥巢。

四、若小喜鵲的位置不能變動(座號即其位置)，小喜鵲數(n)為多少時能使小斑鳩有較高機率吃到食物。

(一)研究結果

1. 若小斑鳩為鳥巢中第1隻吃到食物的小鳥
 則 $i=n+1$ 即喜鵲媽媽直接餵給小斑鳩，任何 n 皆成立

2. 若小斑鳩為鳥巢中第2隻吃到食物的小鳥 $n \geq 2$

則 $2i=n+1$ 若 $i=1$ 則 $n=1$ 不合

$i=2$ 則 $n=3$

$i=3$ 則 $n=5$

⋮

推得 n 為奇數時，小斑鳩有機會第二隻吃到食物。

3. 若小斑鳩為鳥巢中第3隻吃到食物的小鳥 $n \geq 3$

此時小斑鳩可能在第一週期或第二週期吃到食物，分兩種類型討論：

(1)在第一週期吃到食物，則 $i+i+2i=n+1$

$\Rightarrow 4i=n+1$ 若 $i=1$ 則 $n=3$

$i=2$ 則 $n=7$

$i=3$ 則 $n=11$

⋮

(2)在第二週期吃到食物，則第2隻吃到食物的小喜鵲座號為 $i+i-(n+1)=2i-(n+1)$

小斑鳩為第3隻吃到食物的小鳥 $2i-(n+1)+ 2i-(n+1)=4i-2(n+1)= (n+1)$

$\Rightarrow 4i=3(n+1)$ 若 $i=3$ 則 $n=3$

$i=6$ 則 $n=7$

$i=9$ 則 $n=11$

⋮

(3)推得 n 為3、7、11...時，小斑鳩有機會第三隻吃到食物。

4. 若小斑鳩為鳥巢中第4隻吃到食物的小鳥 $n \geq 4$

由排列組合概念，此時吃到食物的小鳥隻數分布類型可能為

	第一週期	第二週期	第三週期
第1類型	4隻		
第2類型	1隻	3隻	
第3類型	2隻	2隻	
第4類型	1隻	1隻	2隻

(1) 第一類型： $i+i+2i+4i=n+1 \Rightarrow 8i=n+1$ 若 $i=1$ 則 $n=7$

$i=2$ 則 $n=15$

$i=3$ 則 $n=23$

⋮

(2) 第二類型 第2隻吃到食物的小喜鵲座號為 $i+i-(n+1)=2i-(n+1)$

第3隻吃到食物的小喜鵲座號為 $2i-(n+1)+2i-(n+1)=4i-2(n+1)$

小斑鳩為第4隻吃到食物的小鳥 $4i-2(n+1)+4i-2(n+1)=8i-4(n+1)=n+1$

$\Rightarrow 8i=5(n+1)$ 若 $i=5$ 則 $n=7$

$i=10$ 則 $n=15$

$i=15$ 則 $n=23$

⋮

(3) 第三類型 第2隻吃到食物的小喜鵲座號為 $i+i=$

第3隻吃到食物的小喜鵲座號為 $i+i+2i-(n+1)=4i-(n+1)$

小斑鳩為第4隻吃到食物的小鳥 $4i-(n+1)+4i-(n+1)=8i-2(n+1)=n+1$

$\Rightarrow 8i=3(n+1)$ 若 $i=3$ 則 $n=7$

$i=6$ 則 $n=15$

$i=9$ 則 $n=23$

⋮

(4) 第四類型 第2隻吃到食物的小喜鵲座號為 $i+i-(n+1)=2i-(n+1)$

第3隻吃到食物的小喜鵲座號為 $2i-(n+1)+2i-(n+1)-(n+1)=4i-3(n+1)$

小斑鳩為第4隻吃到食物的小鳥 $4i-3(n+1)+4i-3(n+1)=8i-6(n+1)=n+1$

$\Rightarrow 8i=7(n+1)$ 若 $i=7$ 則 $n=7$

$i=14$ 則 $n=15$

$i=21$ 則 $n=23$

⋮

(5)由四種類型的推導，發現無論是哪一類型求得的 n 都相同。

(6) 推得 n 為 7、15、23...時，小斑鳩有機會第四隻吃到食物。

5. 若小斑鳩為鳥巢中第五隻吃到食物的小鳥 $n \geq 5$

由排列組合概念，此時吃到食物的小鳥隻數分布類型可能為

	第一週期	第二週期	第三週期	第四週期
第1類型	5隻			
第2類型	1隻	4隻		
第3類型	1隻	1隻	3隻	
第4類型	1隻	1隻	1隻	2隻
第5類型	2隻	1隻	2隻	
第6類型	2隻	3隻		
第7類型	3隻	2隻		

(1)第一類型： $i+i+2i+4i+8i=n+1 \Rightarrow 16i=n+1$ 若 $i=1$ 則 $n=15$

$i=2$ 則 $n=31$

⋮

(2)第二類型 第2隻吃到食物的小喜鵲座號為 $i+i-(n+1)=2i-(n+1)$

第3隻吃到食物的小喜鵲座號為 $2i-(n+1)+ 2i-(n+1)= 4i-2(n+1)$

第4隻吃到食物的小喜鵲座號為 $4i-2(n+1)+ 4i-2(n+1)=8i-4(n+1)$

小斑鳩為第5隻吃到食物的小鳥 $8i-4(n+1)+ 8i-4(n+1)=16i-8(n+1)=n+1$

$\Rightarrow 16i=9(n+1)$ 若 $i=9$ 則 $n=15$

$i=18$ 則 $n=31$

⋮

(3)第三類型 第2隻吃到食物的小喜鵲座號為 $i+i-(n+1)=2i-(n+1)$

第3隻吃到食物的小喜鵲座號為 $2i-(n+1)+ 2i-(n+1)-(n+1)=4i-3(n+1)$

第4隻吃到食物的小喜鵲座號為 $4i-3(n+1)+ 4i-3(n+1)=8i-6(n+1)$

小斑鳩為第5隻吃到食物的小鳥 $8i-6(n+1)+ 8i-6(n+1)=16i-12(n+1)=n+1$

$\Rightarrow 16i=13(n+1)$ 若 $i=13$ 則 $n=15$

$i=26$ 則 $n=31$

⋮

(4) 第四類型 第2隻吃到食物的小喜鵲座號為 $i+i-(n+1)=2i-(n+1)$
 第3隻吃到食物的小喜鵲座號為 $2i-(n+1)+2i-(n+1)=4i-2(n+1)$
 第4隻吃到食物的小喜鵲座號為 $4i-2(n+1)+4i-2(n+1)-(n+1)=8i-5(n+1)$
 小斑鳩為第5隻吃到食物的小鳥 $8i-5(n+1)+8i-5(n+1)=16i-10(n+1)=n+1$
 $\Rightarrow 16i=11(n+1)$ 若 $i=11$ 則 $n=15$
 $i=22$ 則 $n=31$
 \vdots

(5) 第五類型 第2隻吃到食物的小喜鵲座號為 $i+i=2i$
 第3隻吃到食物的小喜鵲座號為 $2i+2i-(n+1)=4i-(n+1)$
 第4隻吃到食物的小喜鵲座號為 $4i-(n+1)+4i-(n+1)-(n+1)=8i-3(n+1)$
 小斑鳩為第5隻吃到食物的小鳥 $8i-3(n+1)+8i-3(n+1)=16i-6(n+1)=n+1$
 $\Rightarrow 16i=7(n+1)$ 若 $i=7$ 則 $n=15$
 $i=14$ 則 $n=31$
 \vdots

(6) 第六類型 第2隻吃到食物的小喜鵲座號為 $i+i=2i$
 第3隻吃到食物的小喜鵲座號為 $2i+2i-(n+1)=4i-(n+1)$
 第4隻吃到食物的小喜鵲座號為 $4i-(n+1)+4i-(n+1)=8i-2(n+1)$
 小斑鳩為第5隻吃到食物的小鳥 $8i-2(n+1)+8i-2(n+1)=16i-4(n+1)=n+1$
 $\Rightarrow 16i=5(n+1)$ 若 $i=5$ 則 $n=15$
 $i=10$ 則 $n=31$
 \vdots

(7) 第七類型 第2隻吃到食物的小喜鵲座號為 $i+i=2i$
 第3隻吃到食物的小喜鵲座號為 $2i+2i=4i$
 第4隻吃到食物的小喜鵲座號為 $4i+4i-(n+1)=8i-(n+1)$
 小斑鳩為第5隻吃到食物的小鳥 $8i-(n+1)+8i-(n+1)=16i-2(n+1)=n+1$
 $\Rightarrow 16i=3(n+1)$ 若 $i=3$ 則 $n=15$
 $i=6$ 則 $n=31$
 \vdots

(8)由四種類型的推導，發現無論是哪一類型求得的 n 都相同。

(9) 推得 n 為15、31...時，小斑鳩有機會第五隻吃到食物。

6. 由以上推論可得到：無論是哪一類型求得的 n 都相同，因此用第一類型來推論，即可簡易推出 n 值。若小斑鳩為鳥巢中第 x 隻吃到食物，則 x 與 n 的關係式為

$$i+i+2i+4i+8i+\cdots+2^{x-2}i = \left[1 + \frac{1(2^{x-1}-1)}{2-1}\right] i = 2^{x-1}i = n+1$$

由於 i 、 n 必為整數，可由上式推得能讓小斑鳩吃到食物的 n 值，即為巢中的小喜鵲數。

(二) 分析與討論

1. 經過計算，若簡單的分類，斑鳩媽媽選擇小喜鵲數是奇數的鳥巢會讓小斑鳩有較高的機率吃到食物。
2. 如果斑鳩媽媽選擇鳥巢中小喜鵲數為3隻、7隻、15隻、31隻...的鳥巢中，小斑鳩有非常高的機率吃到食物。
3. 驗證 $n=7$ ，鳥巢中有7隻小喜鵲和1隻小斑鳩，小斑鳩吃到食物的機率為1，無論喜鵲媽媽從哪一隻喜鵲開始餵食，小斑鳩都吃的到食物。
4. 經過本研究的推論，若要廣泛的知道鳥巢中多少小喜鵲數會讓小斑鳩有較高機率吃到食物，可使用關係式 $2^{x-1}i = n+1$

其中 x 為小斑鳩在巢中吃到食物的次序， i 為喜鵲媽媽挑選的座號， n 為巢中小喜鵲數。

伍、結論

- 一、當小喜鵲的位置不能變動，當小喜鵲數量在五隻，鳥媽媽從 1 號及 5 號開始餵食，能讓最多小喜鵲吃到食物，從 2 號開始餵食，2 號小喜鵲可吃到最多份食物--3 份，以及從 4 號開始餵食，4 號喜鵲可以吃到最多份食物--3 份。
- 二、將五隻小喜鵲的位置排順序，讓五隻小喜鵲都吃到，但小斑鳩吃不到，則喜鵲媽媽開始餵食的位置及順序排序為：從第 1 位置餵食，位置座號排序為 [23145]、[32514]、[31245]、[42153]；第二位置開始，位置座號排序為 [41235]、[35214]；第三位置開始，位置座號排序為 [53142]、[13425]、[14235]、[42531]；第四位置開始，位置座號排序為 [13452]、[25413]；第五位置開始，位置座號排序為 [31542]、[12453]、[25143]、[12534]。
- 三、當小喜鵲的位置不能變動，小斑鳩吃到食物的機率與食物份數的期望值，以鳥巢中有 3 隻小喜鵲和 1 隻小斑鳩的時候最高。
- 四、當小喜鵲的位置不能變動，若想知道小喜鵲數(n)為多少，小斑鳩有較高機率吃到食物，可以使用關係式： $2^{x-1}i = n+1$

其中 x 為小斑鳩在巢中吃到食物的次序，i 為喜鵲媽媽挑選的座號，n 為巢中小喜鵲數。
- 五、由上式，斑鳩媽媽選擇小喜鵲數為奇數較偶數有利於小斑鳩吃到食物，當小喜鵲數在 10 以內時，應挑選小喜鵲數為 3、7。

陸、參考文獻

1. 游森棚(2023)。森棚教官數學題_____鳩佔鵲巢，科學研習月刊，第62卷第二期。
2. 高中數學第二冊(112)，第三章，南一出版社。