屏東縣第64屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：我搬~我搬~我搬搬搬

關 鍵 詞：<u>　搬移規律　</u>、<u>　　遞迴式　　</u>

編號： A1004

我搬~我搬~我搬搬搬

壹、研究動機

我們從歷屆科展作品中發現，河內塔是一個很受歡迎、歷久不衰的數學名題。從日常生活中找得到類似概念的延伸，例如建築高樓得靠堆疊搬移鋼構、鄰近的國際港也看得到高架搬移貨櫃高樓，因此我們想把單純的遊戲仔細研究探究明白其中規律。

貳、研究問題

一、找出四柱單棟最少搬移次數解。

二、探討四柱雙棟完成交換最少次數的規律與最少移動次數解。

三、比較四柱不規則雙棟搬移模式中最少移動次數和影響搬移次數的原因。

參、研究材料與設備

一、A4、B4 紀錄紙張、筆記本記錄過程 。

二、兩色以上的連方塊積木用來組合各種寬度樓層。

三、電腦設備用來攝影拍照搬移過程。

肆、研究歷程

一、文獻探討

我們找到屏東縣第 60 屆數學科「世界高塔」作品書，發現幾個文獻有幾個問題值得仔細探究。該作品提出 4 柱單塔的規律，我們發現盤層搬移規律很有趣，似乎呈現數個區塊，區塊之間層層增加，規律非常明顯，卻沒有清楚的分析。其次，我們從網路資料查找到 4 柱單塔最少步數解已經在 2006 年由法國數學家證明出來，但是我們無法從「世界高塔」中看出結論，這是我們覺得需要進一步研究的理由。

1. 三柱、四柱雙塔「規則移動」與「不規則移動」的方法及規律交替出現，但是我們從檢查不規則雙塔發現，其實三柱雙塔不管是規則和不規則，都是回答最少步數的關鍵，所以我們重新處理搬移研究需要的重要資料，希望能從搬移規律找出通式解。
2. 搬移模式 A–B–A 需要足夠的證據說明模式截切點來說明搬移模式確實可以找出最少移動次數。
3. 根據世界高塔的整理表，我們發現四柱單塔有很明顯的遞增規律，但是我們也發現遞增規律和層數有關係，根據實作結果，我們解出四柱單塔的規律，這是我們和世界高塔不一樣的地方。

4. 我們發現四格雙塔交換規律是清楚的，需要從左右棟分別計算入手，也好奇有沒有更清晰的規則或計算方法，希望能找到解決最短路徑的便捷方法。

二、遊戲規則探討

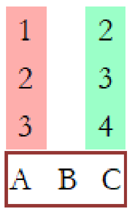
我們找了歷年相關文獻，發現河內塔有多種玩法，有從早期單柱一棟、兩柱交換到多柱交換，基本規則為搬移遵循由上而下由小而大的玩法，也就是上盤不會在下盤的下方；關於搬移次數，有探討最少，也有探討最多搬移次數的相關研究。

一、名詞解釋

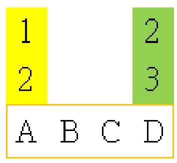
(一)棟柱數：棟柱數簡稱柱數或棟數，以 n-P 表示，以 A4 紙張作為底盤畫三、四、五…個長方形作為移動標的位置。從左至右分別標示格名稱 A、B、C、D、E，表示第 1 棟柱、第 2 棟柱、第 3 棟柱和第 4 棟柱。

(二)樓層寬

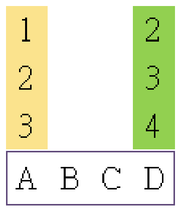
1. 樓層寬相當於傳統河內塔的盤數，依樓層寬或盤數依序由小而大從上排到下。
2. 雙棟規則樓層：Peg-A，由上至下分別為①②③④…n，相對柱標 Peg-D 分別標註 1,2,3,4…, n+1。
3. 雙棟不規則樓層 irr2TnF：
   (1) 位於 A 格上標註 Peg-A，由上至下分別為①②③④…n，或標為…$L_1, L_2, L_3 \cdots L_n$ 。
   (2) 位於 D 格上標註 Peg-D，由上至下分別為 2,3,4…n+1$R_2, R_3, R_4 \cdots R_{n+1}$。操作紀錄時為了仔細區辨樓層與不同棟柱交換，我們也會以不同顏色標註取代左右棟柱，例如 G 指綠色柱、R 指紅色柱。



不規則三格/柱
雙塔交換



不規則四格/柱
雙塔交換



不規則四格/柱
3 層/盤雙塔交換

(三)上盤(Top)：分解樓層上半部。

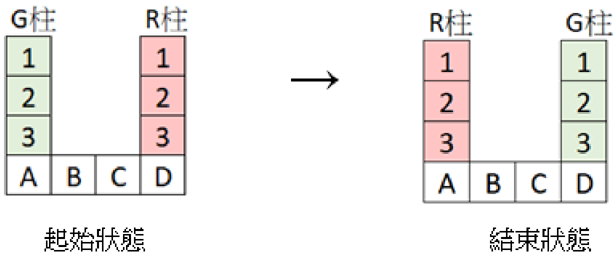
1. 上層(Upper)：底盤上部以利移動的最上層。
2. 底層(Lower)：底盤下部以利移動的最上層。
3. 堆疊層(stack-up)：底盤上部(或「上盤」)還原到底層(或「底盤」)之上堆疊的樓層。

(四)底盤(Down)：分解樓層下半部。

二、移動規則說明

(一)單棟搬移：A 棟在空格 I 上，由上而下由小到大依序排列。以空格 IV 為目標格，一次移動一層樓，目標是將 A 棟完整搬到空格 IV。

(二)雙棟交換:4 棟(柱)高塔中任意選擇兩塔作為交換標的,規則同單棟搬移，一次遷移 1 棟、1 層樓或 1 盤至其它位置,且盤序必須由上而下由小至大依序排列。從起始狀態開始搬移，直到兩棟完全交換，如下圖。

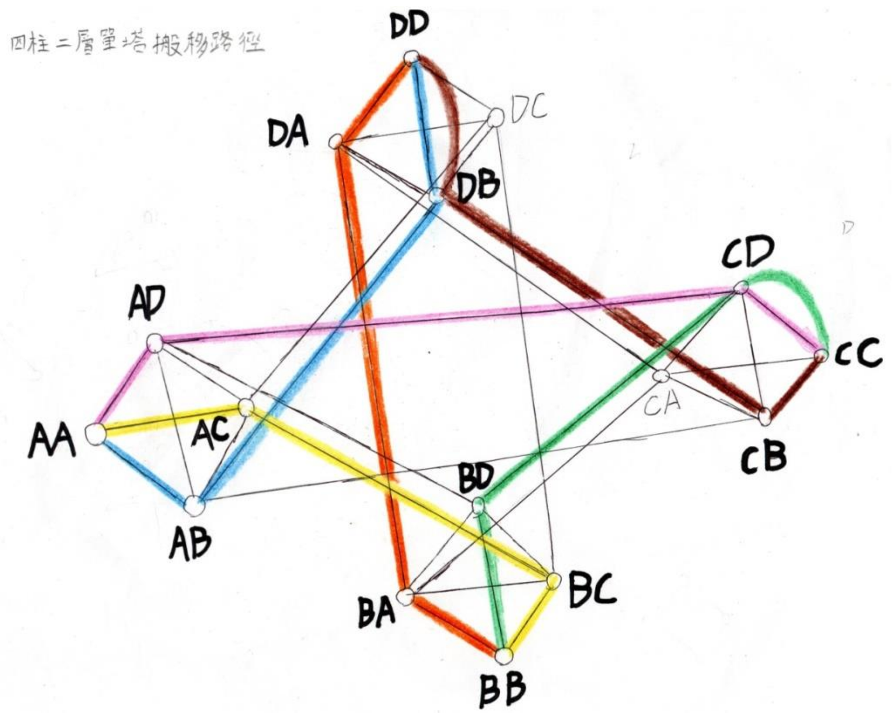


三、最短移動路徑

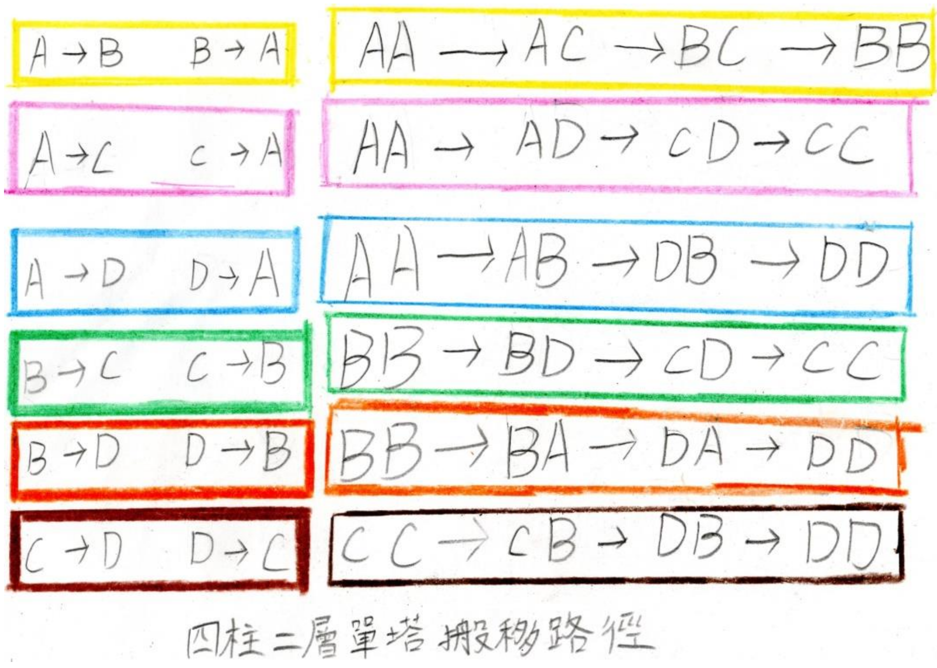
我們檢查「世界高塔」後發現圖解歷程較少，原來的表列資料不容易判斷選擇路徑是否正確,檢查之後發現有幾處不符合最短路徑的走法,因此決把將過程繪製出來，將搬移過程視覺化邀請讀者一起檢視歷程。

【四柱單塔移動】當層數$L = 2$時，我們將矩形為四個頂點作為四柱代表，足以標示全部移動路徑如圖示。

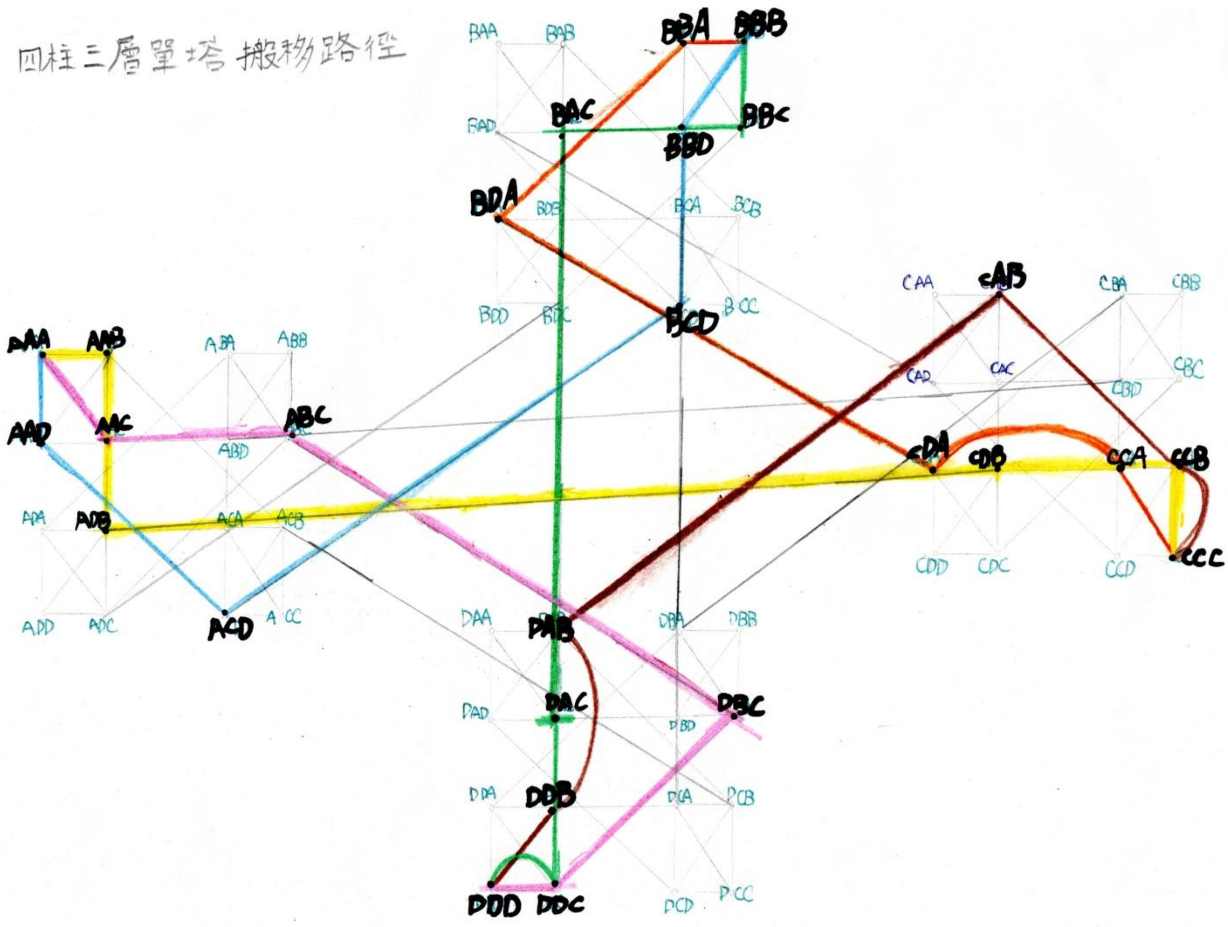
當層數為$L = 2$時的全部移動路徑



我們以正四面體 4 個頂點當作 A,B,C,D 柱，移動順序有 A⇔B、A⇔C、A⇔D、B ⇔ C、B ⇔ D、C⇔ D等 6 種



當層數為$L = 3$時的全部移動路徑



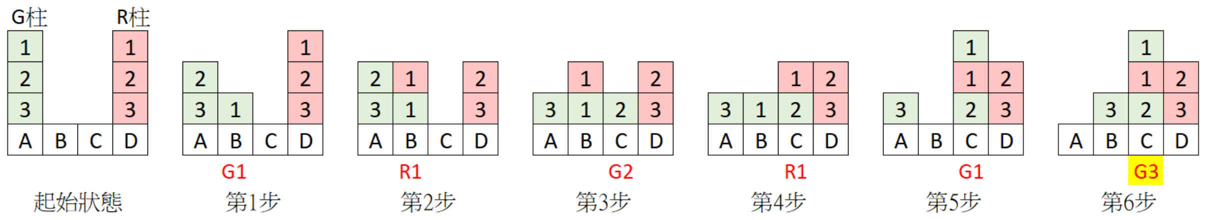
【發現】任選 A 至 D 柱當作起始柱，開始移動之後可以選擇 A、B 兩柱交換，將整棟搬移到 B 棟，搬移過程中每一個狀態就會如同上圖呈現從 AAA 到 AAD(L1 到 D 柱)，AAD 到 ACD(L1 在 D 柱、L2 在 C 柱)，依著路徑移動。

【發現】模式 A

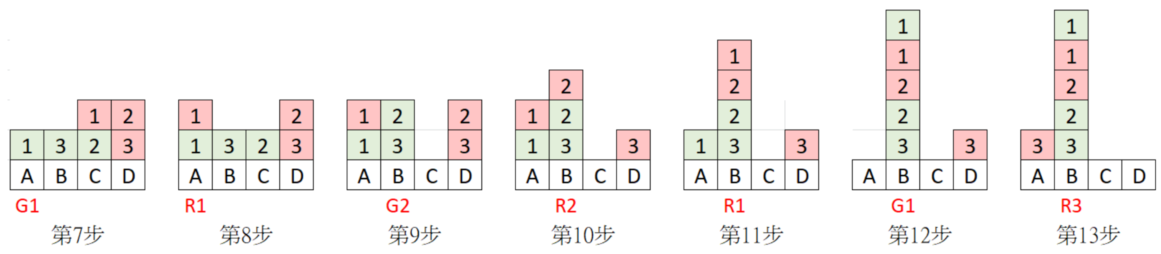
目標柱與交換柱會循著下列順序完成交換：

底盤讓位→目標柱底盤交換→交換柱底盤交換→回復堆疊

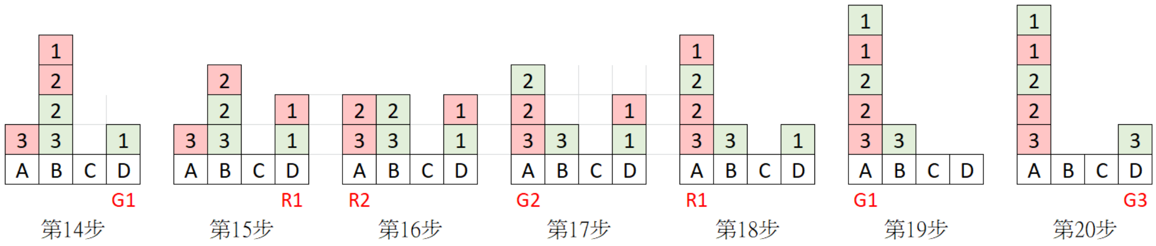
step	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Peg D					G1									G1	R1					G3			G2		G1
Peg C			G2	R1																					
Peg B	G1	R1				G3			G2	R2	R1	G1									G1	R1			
Peg A							G1	R1					R3			R2	G2	R1	G1					R1	



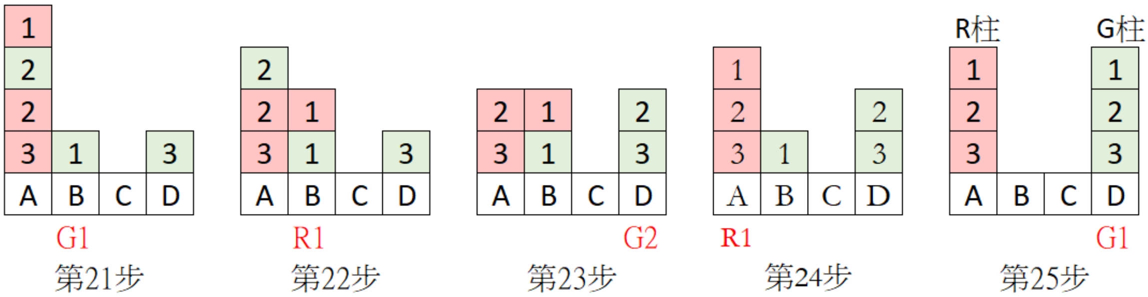
底盤讓位



目標柱底盤交換



交換柱底盤讓位



回復堆疊

棟柱樓層名稱	第 1 階段	第 2 階段	第 3 階段	第 4 階段	移動步數統計
G1	2	2	2	2	8
G2	1	1	1	1	4
G3	1	0	1	0	2
R1	2	2	2	2	8
R2	0	1	1	0	2
R3	0	1	0	0	1
總和	6	7	7	5	25
步數拆分	4+1+1	4+1+1+1	4+1+1+1	4+1	
狀態名稱	底盤讓位	底盤交換	底盤交換	回復堆疊	

伍、研究結果與討論

在搬移過程中，我們發現不論規則或不規則雙塔組合，四柱中藏著三柱「密技」，雙塔中藏著單塔最短路徑搬移技巧，因此以下依序按照 3 柱單塔(標註 3P1T)、4 柱單塔(標註 4P1T)、3 柱不規則雙塔(標註 3P2T-irr)和 4 柱不規則雙塔(標註 4P2T-irr)分別討論。

一、針對柱棟單塔移動次數的發現

我們發現區間遞增可以從$\sum_{i=1}^{n} N$ 推出步數與層數的關係如下表

區間		4 棟單柱塔樓層與移動步數關係					
1	1	$L=1$	a_1				
		算式整理	$1\times 2^{1-1}=1\times 2^0=1$				
2	3	$L=2$,	a_2	a_3			
		移動次數區間	$1\times 2^{2-2}$	$2\times 2^{2-2}$			
		算式整理	$1\times 2^0+2\times 2^0=1\times 1+2\times 1=3$				
		$L=3$	$3-1$	3			
		移動次數區間	$1\times 2^{2-1}$	$2\times 2^{2-1}$			
		算式整理	$1\times 2^1+2\times 2^{2-1}=1\times 2+2\times 2=5$				
3	6	對應項次	a_4	a_5	a_6		
		$L4\leqq L\leqq 6$	$6-2$	$6-1$	6		
		移動次數區間	$1\times 2^{3-1}$	$2\times 2^{3-1}$	$3\times 2^{3-1}$		
算式整理			$5+2^2$				
				$5+2\times 2^2$			
					$5+2\times 2^2$		
4	10	對應項次	a_7	a_8	a_9	a_{10}	
		$7\leqq L\leqq L10$	$10-3$	$10-2$	$10-1$	10	
		移動次數區間	$1\times 2^{4-1}$	$2\times 2^{4-1}$	$3\times 2^{4-1}$	$4\times 2^{4-1}$	
5	15	對應項次	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}

	L 11≦L≦L 15	15−4	15-3	15-2	15-1	15
	移動次數區間	$1\times2^{5-1}$	$2\times2^{5-1}$	$3\times2^{5-1}$	$4\times2^{5-1}$	$5\times2^{5-1}$

第 6 區：L 16≦L≦L 21

對應項次	16	17	18	19	20	21
項次變化	$21-5$	$21-4$	$21-3$	$21-2$	$21-1$	21
步數區間	$1\times2^{6-1}$	$2\times2^{6-1}$	$3\times2^{6-1}$	$4\times2^{6-1}$	$5\times2^{6-1}$	$6\times2^{6-1}$

第 7 區：L 22≦L≦L 28

對應項次	22	23	24	25	26	27	28
項次變化	28−6	28−5	28−4	8−3	28−2	28−1	28
步數區間	$1\times2^{7-1}$	$2\times2^{7-1}$	$3\times2^{7-1}$	$4\times2^{7-1}$	$5\times2^{7-1}$	$6\times2^{7-1}$	$7\times2^{7-1}$

第 8 區：L 29≦L≦L 36

對應項次	29	30	31	32	33	34	35	36
項次變化	36−7	36−6	36−5	36−4	36−3	36−2	36−1	36
步數區間	$1\times2^{8-1}$	$2\times2^{8-1}$	$3\times2^{8-1}$	$4\times2^{8-1}$	$5\times2^{8-1}$	$6\times2^{8-1}$	$7\times2^{8-1}$	$8\times2^{8-1}$

第 9 區：L 37≦L≦L 45

對應項次	37	38	39	40	41	42	43	44
項次變化	$45-8$	$45-7$	$45-6$	$45-5$	$45-4$	$45-3$	$45-2$	$45-1$
步數區間	$1\times2^{9-1}$	$2\times2^{9-1}$	$3\times2^{9-1}$	$4\times2^{9-1}$	$5\times2^{9-1}$	$6\times2^{9-1}$	$7\times2^{9-1}$	$8\times2^{9-1}$

【第 45 層樓】落在第 9 區，總移動次數會是前 8 區的次數總和，再加上第 9 區的最後一項數值，即 $9\times2^{9-1}$

第 10 區：L 46≦L≦L 55

對應項次	46	47	48	49	50	51	52	53	54
項次變化	$55-9$	$55-8$	$55-7$	$55-6$	$55-5$	$55-4$	$55-3$	$55-2$	$55-1$
步數區間	$1\times2^{10-1}$	$2\times2^{10-1}$	$3\times2^{10-1}$	$4\times2^{10-1}$	$5\times2^{10-1}$	$6\times2^{10-1}$	$7\times2^{10-1}$	$8\times2^{10-1}$	$9\times2^{10-1}$

【第 55 層樓】落在第 10 區，總移動次數會是前 9 區的次數總和，再加上第 10 區得到最後一項數值，即 $10\times2^{10-1}$

第 11 區：L 56≦L≦L 66

項次變化	66−10	66−9	66−8	66−7	66−6	66−5
步數區間	1×2^{10}	2×2^{10}	3×2^{10}	4×2^{10}	5×2^{10}	6×2^{10}
項次變化	66−4	66−3	66−2	66−1	66	
步數區間	$7\times 2^{11-1}$	$8\times 2^{11-1}$	$9\times 2^{11-1}$	$10\times 2^{11-1}$	$11\times 2^{11-1}$	

第 12 區：L 67≦L≦L 78

項次變化	78−11	78−10	78−9	78−8	78−7	78−6
步數區間	1×2^{11}	2×2^{11}	3×2^{11}	4×2^{11}	5×2^{11}	6×2^{11}
項次變化	78−5	78−4	78−3	78−2	78−1	78
步數區間	7×2^{11}	8×2^{11}	9×2^{11}	10×2^{11}	11×2^{11}	12×2^{11}

第 13 區：L79≦L≦L91

項次變化	91−12	91−11	91−10	91−9	91−8	91−7
步數區間	1×2^{12}	2×2^{12}	3×2^{12}	4×2^{12}	5×2^{12}	6×2^{12}
項次變化	91−6	91−5	91−4	91−3	91−2	91−1
步數區間	7×2^{12}	8×2^{12}	9×2^{12}	10×2^{12}	11×2^{12}	12×2^{12}

【第 91 層樓】移動次數是前 12 區的加總加上第 13 區的最後一項數值，即13×2^{12}。

第 14 區：92≦L≦105

項次變化	105−13	105−12	105−11	105−10	105−9	105−8
步數區間	1×2^{13}	2×2^{13}	3×2^{13}	4×2^{13}	5×2^{13}	6×2^{13}
項次變化	105−7	105−6	105−5	105−4	105−3	105−2
步數區間	7×2^{13}	8×2^{13}	9×2^{13}	10×2^{13}	11×2^{13}	12×2^{13}
項次變化	105−1	105				
步數區間	13×2^{13}	14×2^{13}				

第 15 區：$106 \leqq L \leqq 120$

項次變化	120−14	120−13	120−12	120−11	120−10	120−9
步數區間	1×2^{14}	2×2^{14}	3×2^{14}	4×2^{14}	5×2^{14}	6×2^{14}
項次變化	120−8	120−7	120−6	120−5	120−4	120−3
步數區間	7×2^{14}	8×2^{14}	9×2^{14}	10×2^{14}	11×2^{14}	12×2^{14}
項次變化	120−2	120−1				
步數區間	13×2^{14}	14×2^{14}				

本區最後一層：第 120 層樓，L_{120}移動步數會是前 14 區的結果加總加上第 15 區的最後一項數值，即15×2^{14}。

第 16 區：$121 \leqq L \leqq 136$

項次變化	136−15	136−14	136−13	136−12	136−11	136−10
步數區間	1×2^{15}	2×2^{15}	3×2^{15}	4×2^{15}	5×2^{15}	6×2^{15}
項次變化	136−9	136−8	136−7	136−6	136−5	136−4
步數區間	7×2^{15}	8×2^{15}	9×2^{15}	10×2^{15}	11×2^{15}	12×2^{15}
項次變化	136−3	136−2	136−1	136		
步數區間	13×2^{15}	14×2^{15}	15×2^{15}	16×2^{15}		

第 17 區：$137 \leqq L \leqq 153$

依項次變化	153−16	153−15	153−14	153−13	153−12	153−11
步數區間	1×2^{16}	2×2^{16}	3×2^{16}	4×2^{16}	5×2^{16}	6×2^{16}
依項次變化	153−10	153−9	153−8	153−7	153−6	153−5
步數區間	7×2^{16}	8×2^{16}	9×2^{16}	10×2^{16}	11×2^{16}	12×2^{16}
依項次變化	153−4	153−3	153−2	153−1	153	
步數區間	13×2^{16}	14×2^{16}	15×2^{16}	16×2^{16}	17×2^{16}	

第 18 區：154≦L≦171

依項次變化	171−17	171−16	171−15	171−14	171−13	171−12
步數區間	1×2^{17}	2×2^{17}	3×2^{17}	4×2^{17}	5×2^{17}	6×2^{17}
依項次變化	171−11	171−10	171−9	171−8	171−7	171−6
步數區間	7×2^{17}	8×2^{17}	9×2^{17}	10×2^{17}	11×2^{17}	12×2^{17}
依項次變化	171−5	171−4	171-3	171-2	171-1	171
步數區間	13×2^{17}	14×2^{17}	15×2^{17}	16×2^{17}	17×2^{17}	18×2^{17}

第 19 區：172≦L≦190

依項次變化	190−18	190−17	190−16	190−15	190−14	190−13
步數區間	1×2^{18}	2×2^{18}	3×2^{18}	4×2^{18}	5×2^{18}	6×2^{18}
依項次變化	190−12	190−11	190−10	190−9	190−8	190−7
步數區間	7×2^{18}	8×2^{18}	9×2^{18}	10×2^{18}	11×2^{18}	12×2^{18}
依項次變化	190−6	190−5	190−4	190−3	190−2	190−1
步數區間	13×2^{18}	14×2^{18}	15×2^{18}	16×2^{18}	17×2^{18}	18×2^{18}
依項次變化	190					
步數區間	19×2^{18}					

第 20 區：191≦n≦210

依項次變化	210−19	210−18	210−17	210−16	210−15	210−14
步數區間	1×2^{19}	2×2^{19}	3×2^{19}	4×2^{19}	5×2^{19}	6×2^{19}
依項次變化	210−13	210−12	210−11	210−10	210−9	210−8
步數區間	7×2^{19}	8×2^{19}	9×2^{19}	10×2^{19}	11×2^{19}	12×2^{19}
依項次變化	210−7	210−6	210−5	210−4	210−3	210−2
步數區間	13×2^{19}	14×2^{19}	15×2^{19}	16×2^{19}	17×2^{19}	18×2^{19}

依項次變化	210−1	210
步數區間	19× 2^{19}	20× 2^{19}

【發現】先得到樓層數的區間，將樓層數代入推估區間

$1+2+3+4+\cdots=\frac{n(n+1)}{2}$，例如 120 層樓高的單塔如果要移動到另外一柱，所需要

的步數會是根據推估的區間數，求得 n=15，以此推估搬移次數如下：

$$\boldsymbol{L_{120}}=15\times 2^{15-1}+(15-1)\times 2^{15-2}+(15-2)\times 2^{15-3}+(15-3)\times 2^{15-4}+$$

$$(15-4)\times 2^{15-5}+(15-5)\times 2^{15-6}+(15-6)\times 2^{15-7}+$$

$$(15-7)\times 2^{15-8}+(15-8)\times 2^{15-9}+(15-9)\times 2^{15-10}+$$

$$(15-10)\times 2^{15-11}+(15-11)\times 2^{15-12}+(15-12)\times 2^{15-13}+$$

$$(15-13)\times 2^{15-14}+(15-14)\times 2^{15-15}$$

整理得到 120 層單柱移動總次數：

$$\boldsymbol{L_{120}}=1\times 2^{0}+2\times 2^{1}+3\times 2^{2}+4\times 2^{3}+5\times 2^{4}+6\times 2^{5}+7\times 2^{6}+8\times 2^{7}+$$

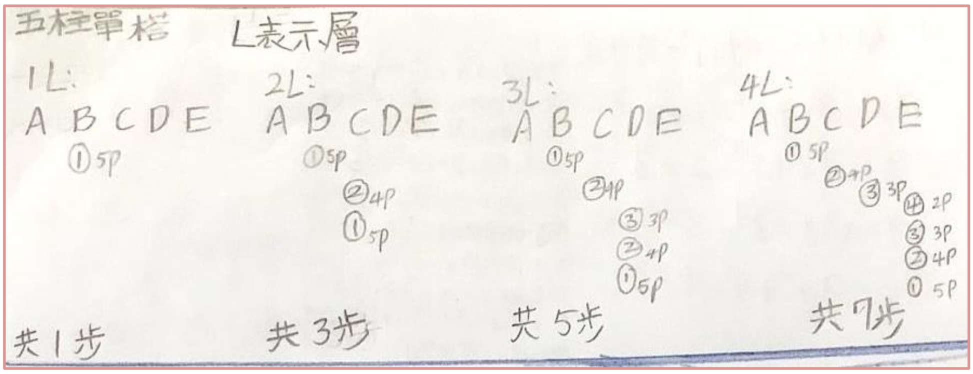
$$9\times 2^{8}+10\times 2^{9}+11\times 2^{10}+12\times 2^{11}+13\times 2^{12}+14\times 2^{13}+15\times 2^{14}$$

在四柱單塔搬移時，我們發現規律與 2 的次數有關，進一步在 5 柱單塔也發現類似的結果。

二、比較不同柱數單棟搬移次數差異

我們猜想單棟搬移在更多柱數可移動情形下，可能有相同的搬移模式，可供移動空間更多，步數會更少且與四柱一樣會有多層單柱依循少層單柱數的搬移規律，呈現遞迴現象。

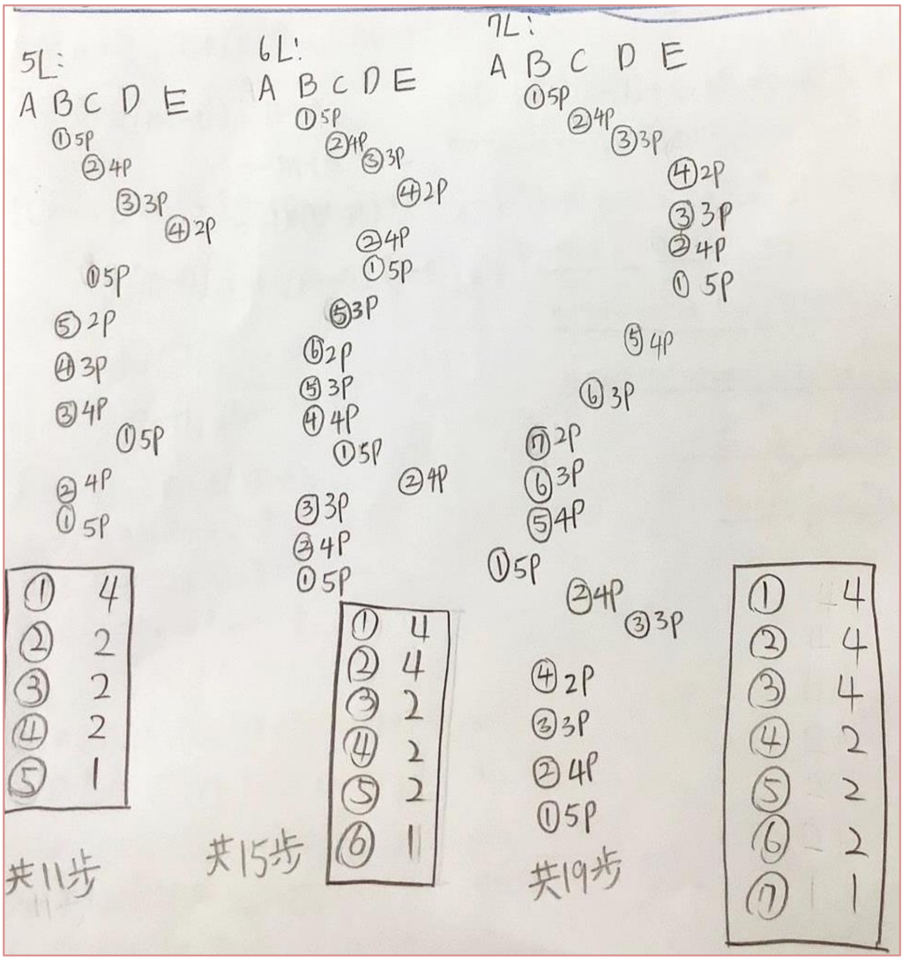
【五柱單塔】



五柱單塔移動次數列表與分析

層數	移動次數	項數	項次與項數關係	
1	1	1	2^0	1×2^0
2	3	2	$2^1 + 2^0$	$1 \times 2^0 + 1 \times 2^1$
3	5	3	$2^1 + 2^1 + 2^0$	$1 \times 2^0 + 2 \times 2^1$
4	7	4	$2^1 + 2^1 + 2^1 + 2^0$	$1 \times 2^0 + 3 \times 2^1$

層數	移動次數	項數	項次與項數關係分析	
5	11	5	$2^2 + 2^1 + 2^1 + 2^1 + 2^0$	$1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 1 \times 2^2$
6	15	6	$2^2 + 2^2 + 2^1 + 2^1 + 2^1 + 2^0$	$1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 2 \times 2^2$
7	19	7	$2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^1 + 2^1 + 2^1 + 2^0$	$1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 3 \times 2^2$



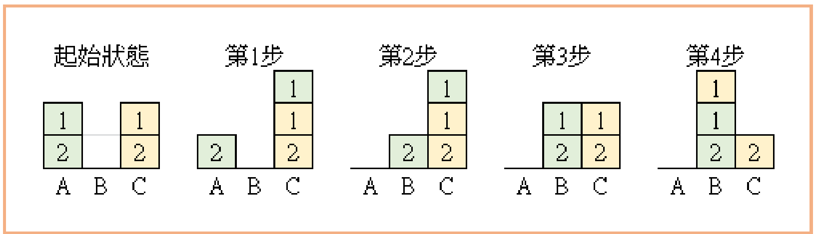
【發現】多了一柱可移動，五柱單塔的步數較四柱更少，也出現明顯遞迴關係。

三、影響搬移步數的可能原因

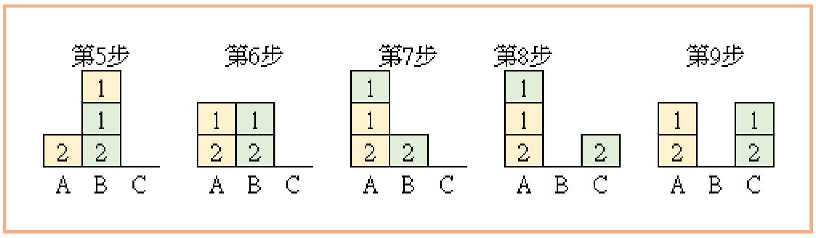
(一) 三柱雙塔

我們在操作四柱雙塔時發現三柱雙塔移動狀態非常重要，因此確認兩層移動結果

【2 層移動】移動次數有 9 步



$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ ① 1



2　1　①　②　①

L =3

【先移動柱】左棟總移動步數 G= $14 = 2 + 4 + 8 = 2^1 + 2^2 + 2^3$

【後移動柱】右棟總移動步數 R= $11 = 1 + 2 + 8 = 2^0 + 2^1 + 2^3$

【移動交換步數與層盤數的關係】

$$G = 14 = 2 + 4 + 8 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = (2^{3-2} + 2^{3-1}) + 2^3$$

$$R = 11 = 1 + 2 + 8 = 2^0 + 2^1 + 2^3 = (2^{3-3} + 2^{3-2}) + 2^3$$

【發現】最少移動次數與樓層數有關。
我們發現在雙塔交換時，層數若為$2k+1$且$k>0$，第 1 步必須移動到空柱才能得到最少步數；層數若為$2k$，則第 1 步必須移動到對方柱的頭上才能得到最少移動次數。

【三柱雙塔】3 層總交換步數是 25 步，結果得到分析如下：

左棟 3 層

樓層	第 1 階段	第 2 階段	第 3 階段	第 4 階段	步數分析	
G1	2	2	2	2	8	$= 2^3$
G2	1	1	1	1	4	$= 2^2$
G3	1	0	1	0	2	$= 2^1$

右棟 3 層

樓層	第 1 階段	第 2 階段	第 3 階段	第 4 階段	步數分析	
R1	2	2	2	2	8	2^3
R2	0	1	1	0	2	2^1
R3	0	1	0	0	1	2^0

四柱雙塔交換可以分為先移動和後移動方法，都可以分析出遞迴規律：

1 層	左①	$2=2^1$		
	右$\boxed{1}$	$1=2^0$		
2 層	左①	$2=2^1$	左②	$2=2^1$
	右$\boxed{1}$	$2=2^1$	右$\boxed{2}$	$1=2^0$
3 層	左①	$2=2^1$	左②	$4=2^2$
	右$\boxed{1}$	$2=2^1$	右$\boxed{2}$	$2=2^1$
	左③	$2=2^1$		
	右$\boxed{3}$	$1=2^0$		得到 $2^0+4\times 2^1+1\times 2^2$
4 層	左①	$4=2^1$	左②	$2=2^2$
	右$\boxed{1}$	$4=2^1$	右$\boxed{2}$	$2=2^1$
	左③	$4=2^1$	左④	$2=2^1$
	右$\boxed{3}$	$2=2^1$	右$\boxed{4}$	$1=2^0$
5 層	左①	$6=2^1+2^2$	左②	$4=2^2$
	右$\boxed{1}$	$4=2^2$	右$\boxed{2}$	$4=2^2$
	左③	$2=2^2$	左④	$4=2^2$
	右$\boxed{3}$	$2=2^1$	右$\boxed{4}$	$2=2^1$
	左⑤	$2=2^1$		
	右$\boxed{5}$	$1=2^1$		

6 層 (第一種)	左1	$6=2^1+2^2$	左2	$4=2^2$
	右$\boxed{1}$	$4=2^2$	右$\boxed{2}$	$4=2^2$
	左3	$2=2^2$	左4	$8=2^3$
	右$\boxed{3}$	$2=2^1$	右$\boxed{4}$	$8=2^3$
	左5	$4=2^2$	左6	$2=2^1$
	右$\boxed{5}$	$2=2^1$	右$\boxed{6}$	$1=2^1$
6 層 (第二種)	左1	$8=2^3$	左2	$4=2^2$
	右$\boxed{1}$	$8=2^3$	右$\boxed{2}$	$4=2^2$
	左3	$6=2^1+2^2$	左4	$2=2^2$
	右$\boxed{3}$	$4=2^2$	右$\boxed{4}$	$2=2^1$
	左5	$4=2^2$	左6	$2=2^1$
	右$\boxed{5}$	$2=2^1$	右$\boxed{6}$	$1=2^1$
7 層	左1	$8=2^3$	左2	$4=2^2$
	右$\boxed{1}$	$8=2^3$	右$\boxed{2}$	$4=2^2$
	左3	$6=2^1+2^2$	左4	$2=2^2$
	右$\boxed{3}$	$4=2^2$	右$\boxed{4}$	$2=2^1$
	左5	$8=2^3$	左6	$4=2^2$
	右$\boxed{5}$	$8=2^3$	右$\boxed{6}$	$2=2^1$
	左7	$2=2^1$		
	右$\boxed{7}$	$1=2^1$		

陸、研究結論

本研究得到結論如下：

一、在雙塔交換時，層數若為$2k+1$且$k>0$，第 1 步必須移動到空柱才能得到最少步數；層數若為$2k$，則第 1 步必須移動到對方柱的頭上才能得到最少移動次數。

二、目標柱與交換柱會循著「**底盤讓位→目標柱底盤交換→交換柱底盤交換→回復堆疊**」順序完成交換。

三、四柱河內塔或類似搬移遊戲的規律，單柱或單塔總移動次數必須先得到總樓層數或總盤數的區間值，將樓層數代入推估區間$1+2+3+4+\cdots=\frac{n(n+1)}{2}$，求得 L 值後，推估搬移次數

$$n\times 2^{n-1}+(n-1)\times 2^{n-2}+(n-2)\times 2^{12}+(n-3)\times 2^{(n-4)}+\cdots+11\times 2^{10}10\times 2^{9}+$$

$$9\times 2^{8}+8\times 2^{7}+7\times 2^{6}+6\times 2^{5}+5\times 2^{4}+4\times 2^{3}+3\times 2^{2}+2\times 2^{1}+1\times 2^{0}$$

柒、參考文獻

一、 屏東縣第 60 屆中小學科學展覽會參展作品：世界高塔。https://sci.ptc.edu.tw/Upfile/Works/1583140349_840587_58.pdf

二、林碧珍、蔡寶桂(2014)。數學魔術與遊戲設計。臺北市：書泉