屏東縣第64屆國中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：Presidenial Candidates

關 鍵 詞：簡單圖、圖合成、歐拉路徑

編號： A1008

Presidential Candidates

摘要

偶然間翻閱數學書籍找到一個有趣棋類遊戲，在美國 1908 年總統大選期間流行的遊戲，用來猜測多位候選人中誰會當選的遊戲。根據我們的研究結果得到 288 張合成結果，進一步分析可以得到的最大圈地範圍、最長路徑和歐拉路徑的關係。

壹、研究動機

我們從數學書籍找到一個有趣棋類遊戲叫做”**Presidential Candidates”**。這個遊戲原本是 1908 年美國總統大選期間流行的遊戲，用來猜測多位候選人中誰會當選。根據「一次只能走 1 步國王走法或跳過任一相鄰候選人，跳過、移除全部其他候選人就勝出」的遊戲規則，最後當選人的是 William H. Taft，也就是遊戲棋盤中的代號 T。我們決定研究題目時恰逢總統大選，有機會觀察到從連署到總統選舉結束，在深入探究路徑規律之餘讓選舉期間緊繃氣氛添　加一點樂趣。

貳、研究目的

一、找出遊戲規律及最大佔地範圍。

二、研究不同連方塊型態所導引出來的路徑、連通特性。

三、研究可合成最大範圍起始點、終點及最大佔地範圍。

參、研究材料與設備

一、五連方和5 × 5範圍內的八連方選圖。

二、紀錄資料之 A4 紙張、筆記與電腦。

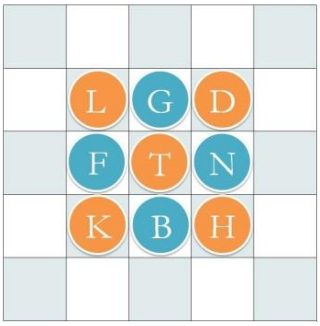
三、微軟 Excel 程式、Geogebra 及 Graphonline 繪圖程式。

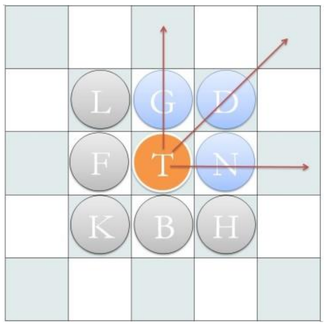
肆、研究歷程

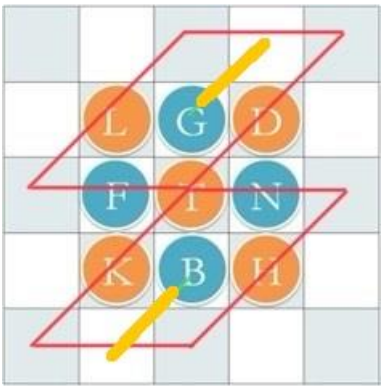
一、文獻分析

(一)遊戲規則

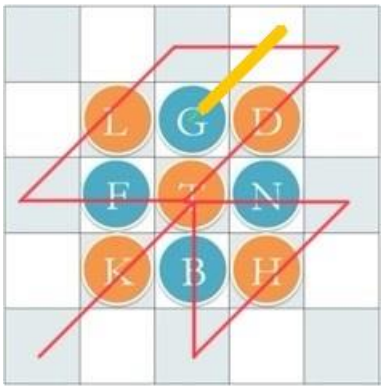
根據「一次只能走 1 步國王走法(King’s Move(s), KM)或跳過任一相鄰候選人，跳過移除全部其他候選人就勝出」原始規則還要回到中間(Petkovic, 1996)，本研究將能到達棋盤邊界(border)的結果納入，以回應本次總統候選人各有其發源地的趣味性。我們利用最少步數走法找出可能當選的候選人，把步數化為圖後觀察圖特徵。







走法 1：回到中間的最少步數



走法 2：走到邊界的最少步數

(二)圖合成：我們從沒有數字的數學（徐力行，2003）這本書裡面發現兩張圖圖各自犧牲數點之後合成的方法，我們調整為將兩個勢力範圍合併後觀察圖特徵的最長路徑與最大佔地範圍的關係。

(三)名詞定義

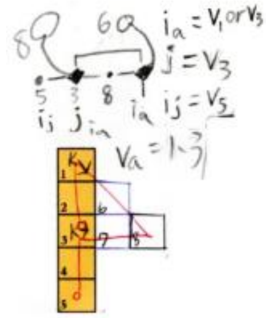
我們利用兩種連方塊作為棋盤基礎發展出具有合成性質的路徑圖$C=(V,E)$。

1. A 表示佔地範圍，佔地範圍是指任一棋子能走完取代其他子的最大範圍，以A_{max}表示最大佔地範圍。
2. V_f 表示分岔點，具有銜接性質則標示銜接點，以V_a表示，用於合成兩張完圖。
3. C 表示圖合成，以C_d表示直接合成，C_r則表示反向合成。
4. V_n^c表示環圖，其中 n 表示環點數。
5. L_{max}最長路徑，用來表示佔地範圍(Area)中任意兩點可連通最長無環路徑。

二、圖形條件

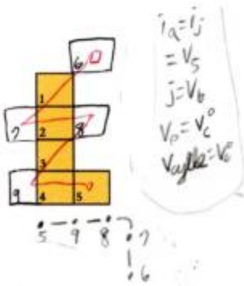
本研究合成標的是將八連方符合5×5範圍與五連方合併找出最長路徑，八連方符合規則的圖形有2×4一種、2×5十種、3×3三種，圖形變化較多的則有3×4有 46 種、3×5有 65 種、4×5有 61 種，以及4×4有 46 種，排除掉無法合成的圖，得到 232 種合成結果。

(一)五連方路徑分析



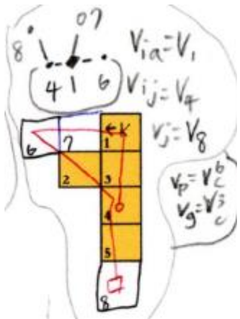
I 型 KM=2

$V_f=1,\ V_3^c=1$



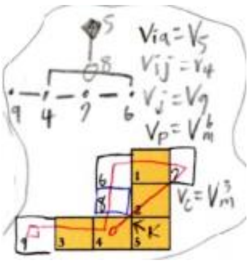
L 型 一筆畫

$V_f=0,\ V_n^c=0$



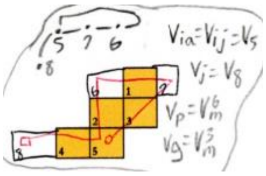
Y 型 KM=1

$V_f=1, V_3^c=1$



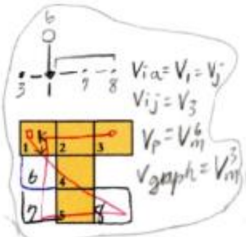
V 型 KM=1

$V_f=1, V_3^c=1$



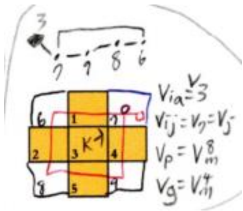
W 型 一筆畫

$V_f=1, V_3^c=1$



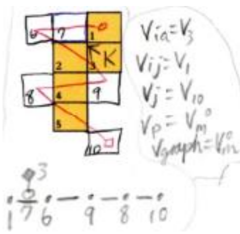
T 型 KM=1

$V_f=1, V_3^c=1$



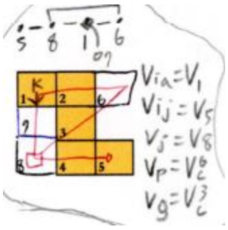
X 型 KM=1

$V_f=0, V_4^c=1$



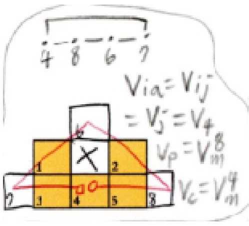
N 型 KM=1

$V_f=0,\ V_n^c=0$



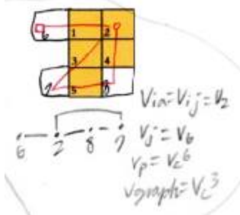
Z 型 KM=1

$V_f=1, V_3^c=1$



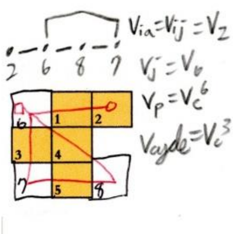
U 型 一筆畫

$V_f=0,\ V_4^c=1$

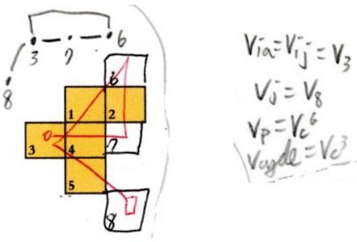


P 型 一筆畫

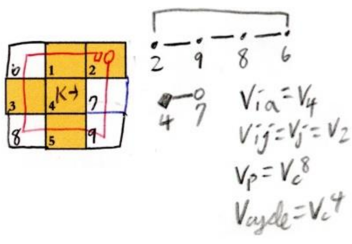
$V_f=1,\ V_3^c=1$



F 型 一筆畫



F 型 一筆畫

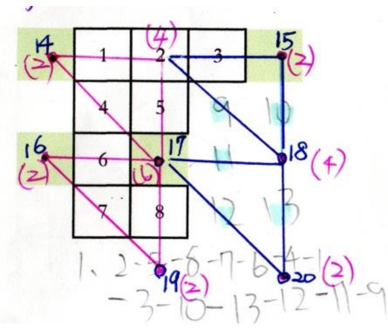


F 型 KM=1

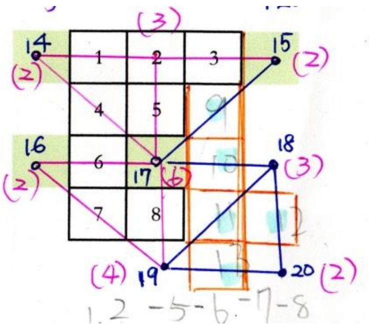
【討論】F 型三種情形：以連方塊構造析出 F 型，左圖是八連方中最常出現的狀況，$V_f = 1$ V_3^c =1。中圖與左圖同構，由於棋盤/方塊構造在路徑完成後所佔的地域左圖佔3×3，右圖卻佔了3×5，限縮了八連方可發展的空間。

【小結】我們發現 X 型必須先有國王的移動才能跳棋子圈地，KM=1，由於不符合「相同候選人不能連動」的規則，不予討論。

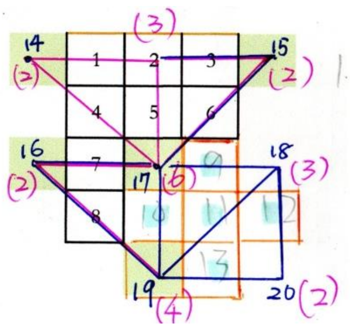
(二)圖合成的兩種方法—直接合成和反向合成



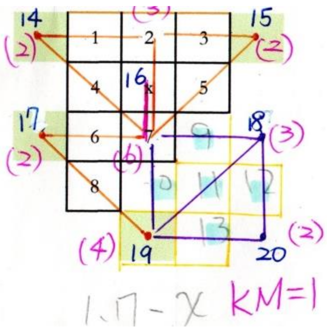
34-1 直接合成 $A_{max} = 20$



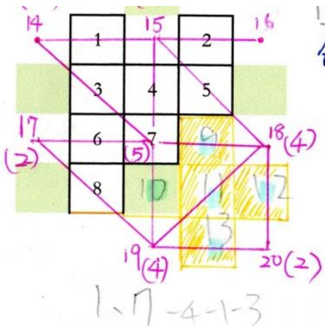
34-2 直接合成 $A_{max} = 20$



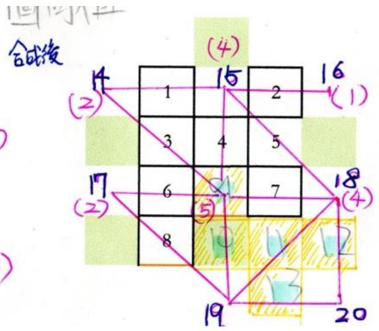
34-3 直接合成 $A_{max} = 20$



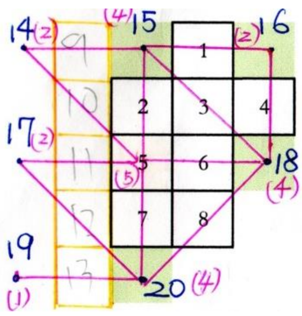
34-4 直接合成 $A_{max} = 20$



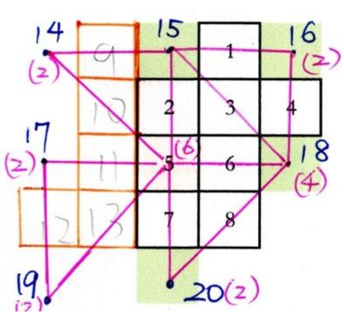
34-5 直接合成 $A_{max} = 20$



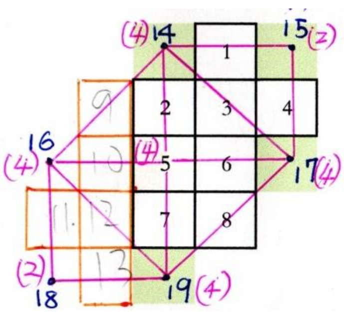
34-6 反向合成 $A_{max} = 20$



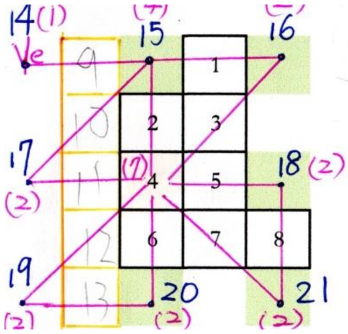
34-7 直接合成 $A_{max} = 20$



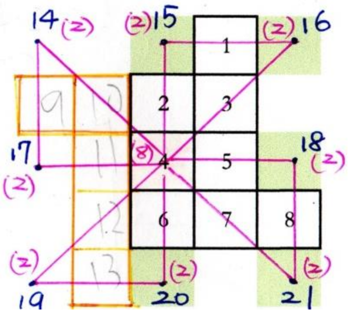
34-8 直接合成 $A_{max} = 20$



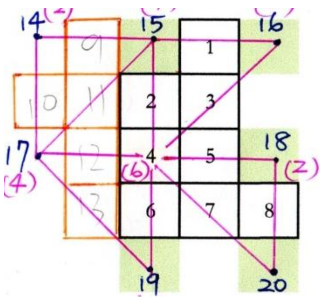
34-9 直接合成 $A_{max} = 19$



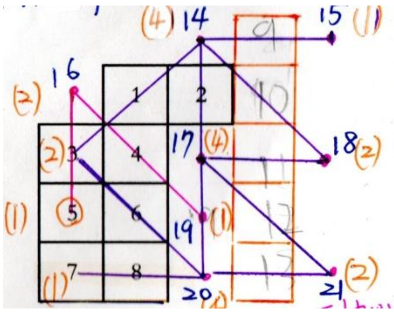
34-10 直接合成 $A_{max} = 21$



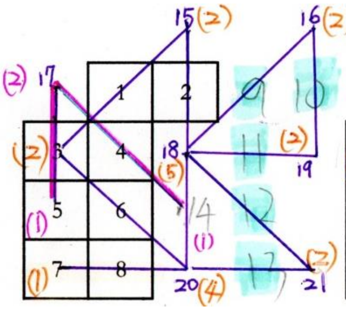
34-11 直接合成 $A_{max} = 21$



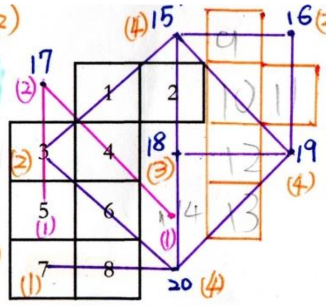
34-12 直接合成 $A_{max} = 20$



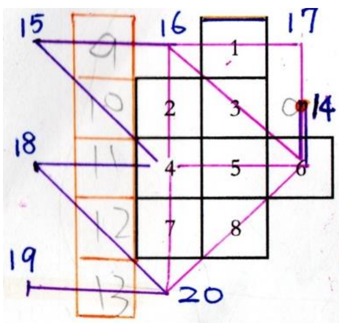
34-13 直接合成 $A_{max} = 21$



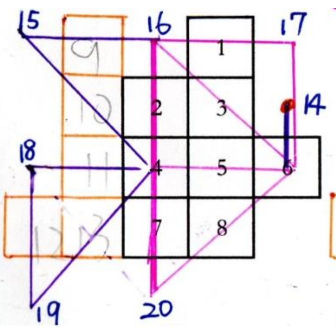
34-14 直接合成 $A_{max} = 21$



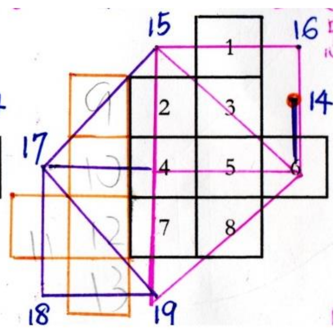
34-15 直接合成 $A_{max} = 20$



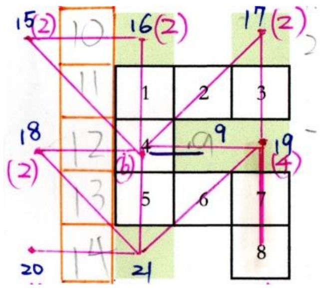
34-16 直接合成 $A_{max} = 20$



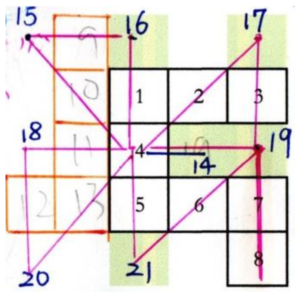
34-17 直接合成 $A_{max} = 20$



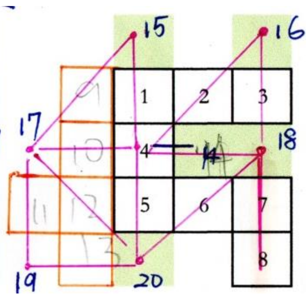
34-18 直接合成 $A_{max} = 19$



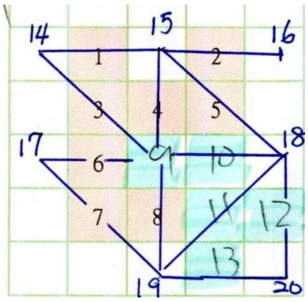
34-19 直接合成 $A_{max} = 21$



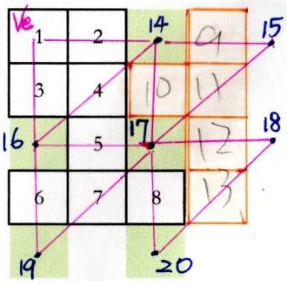
34-20 直接合成 $A_{max} = 21$



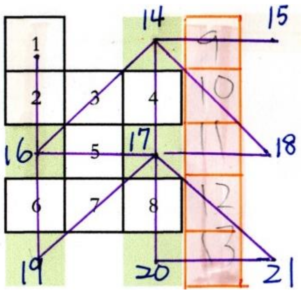
34-21 直接合成 $A_{max} = 20$



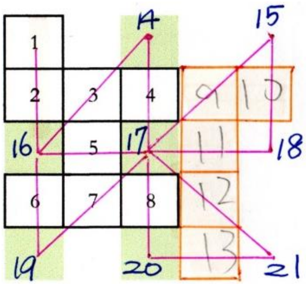
34-22 反向合成 $A_{max} = 20$



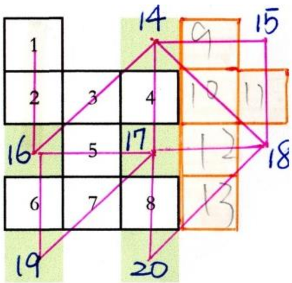
34-23 直接合成 $A_{max} = 20$



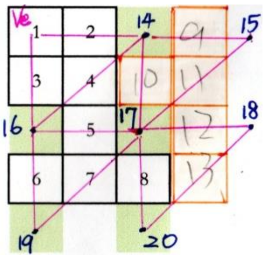
34-24 直接合成 $A_{max} = 19$



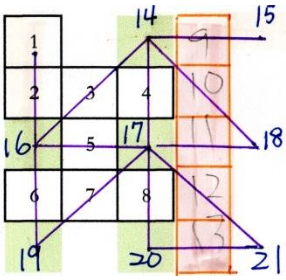
34-25 直接合成 $A_{max} = 19$



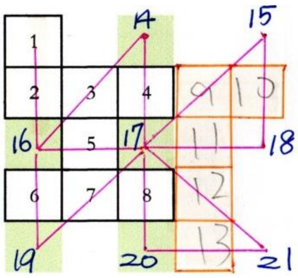
34-26 直接合成 $A_{max} = 20$



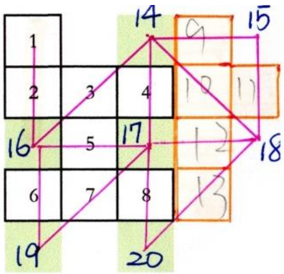
34-27 反向合成 $A_{max} = 20$



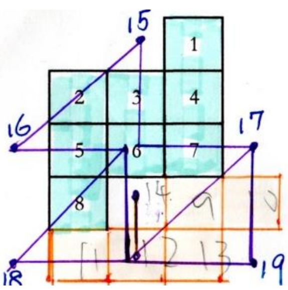
34-28 直接合成 $A_{max} = 21$



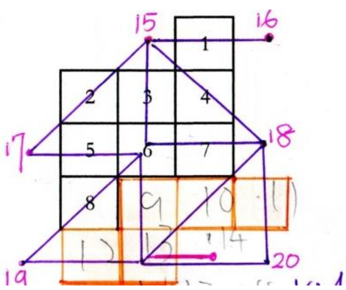
34-29 直接合成 $A_{max} = 21$



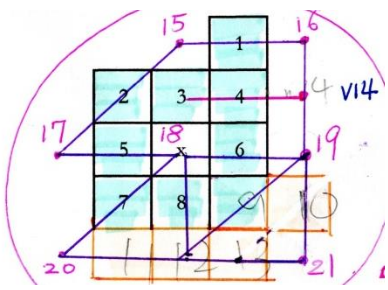
34-30 直接合成 $A_{max} = 20$



34-31 直接合成 $A_{max} = 19$



34-32 直接合成 $A_{max} = 20$



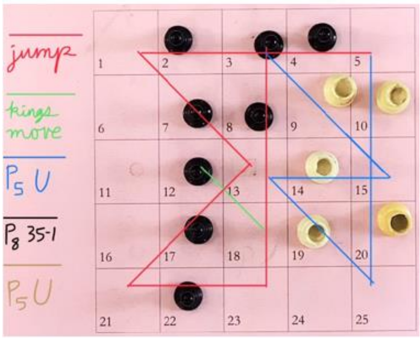
34-33 直接合成 $A_{max} = 21$

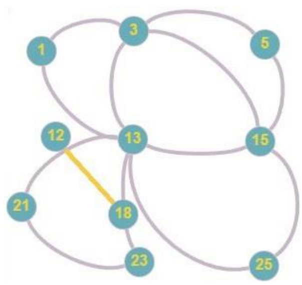
【小結】八連方與五連方有效合成後，$Oct34$的 33 種結果佔地範圍如下：

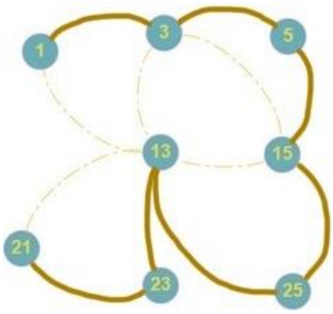
$$19 \le A_{max} \le 21$$

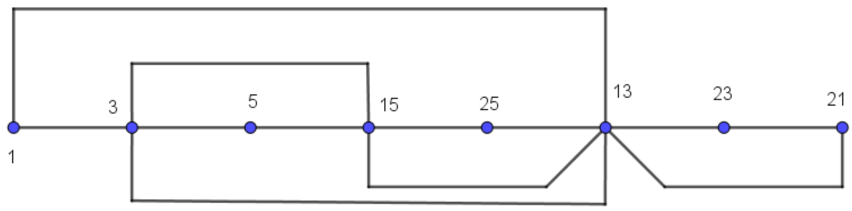
(二)圖合成的第三種方法—讓國王路徑擴充領地

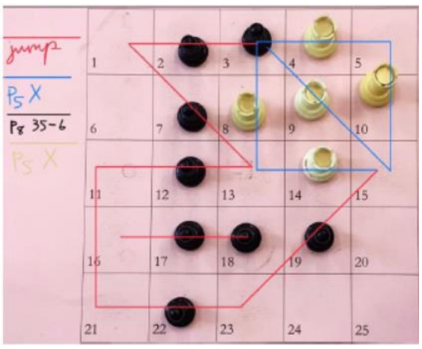
以八連方編號 Oct35 圖為例(全部 143 張)，我們發現在國王移動的 1 步縱、橫、斜走可能有至少兩種狀況，包含被跳子躍過納入領地或者擴充額外增加佔地數。

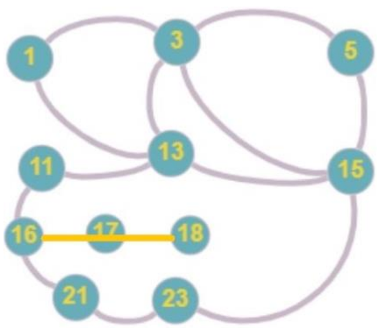


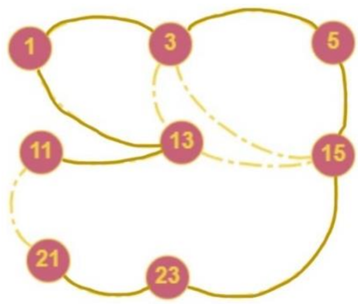


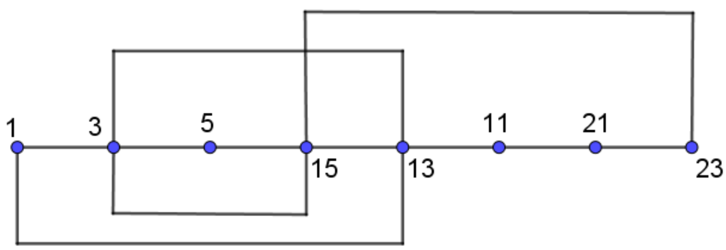


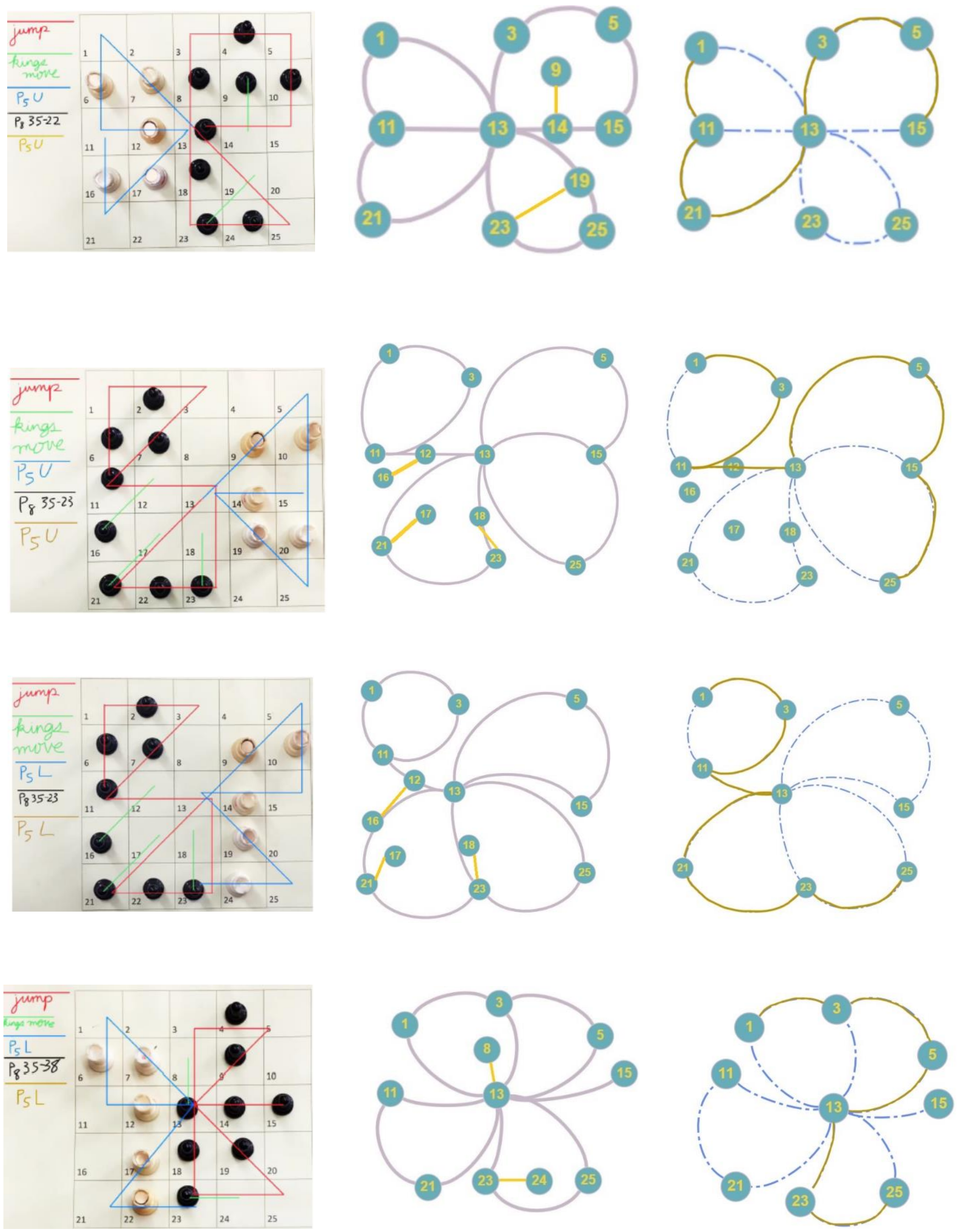


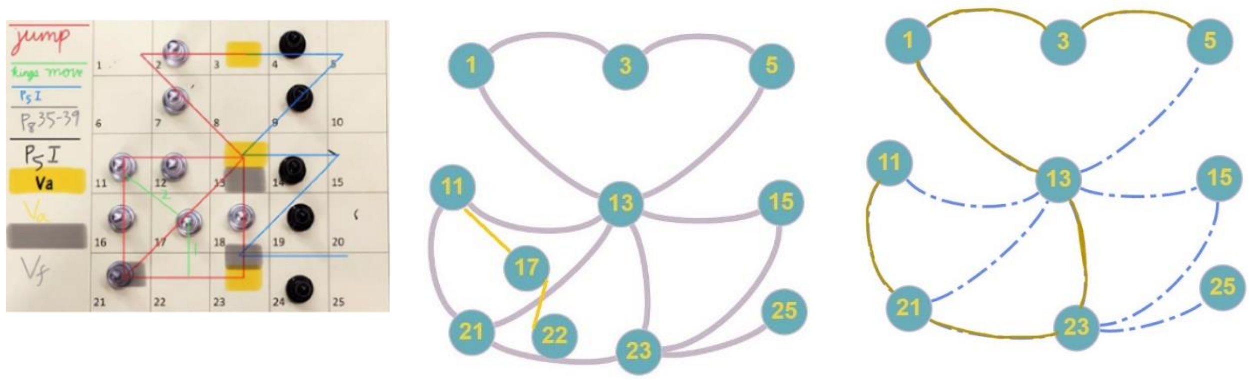


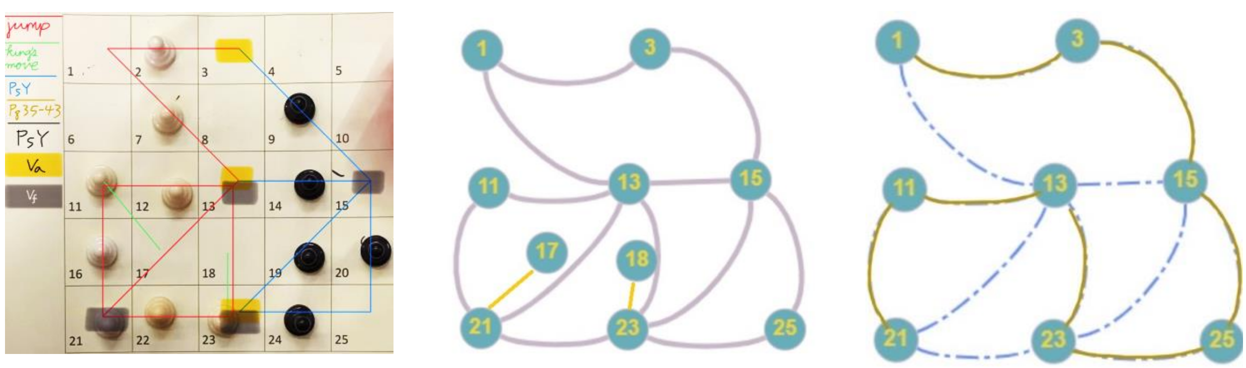


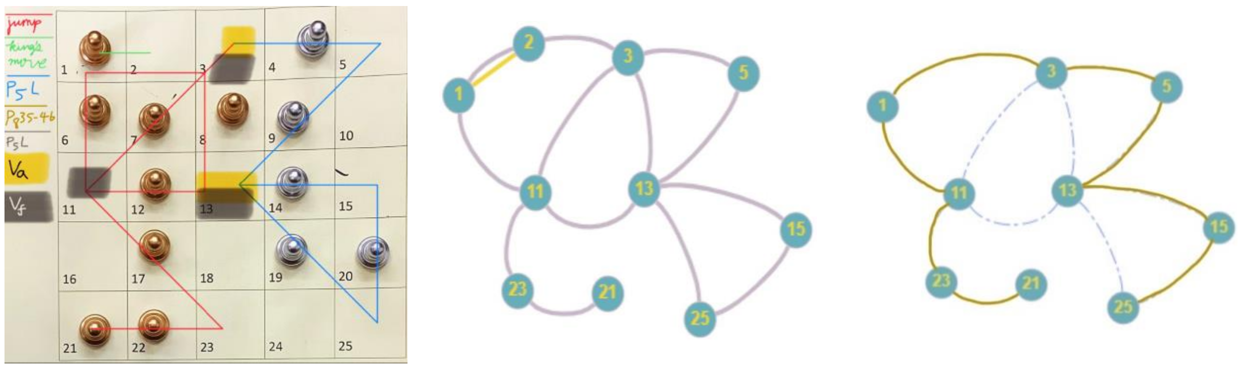


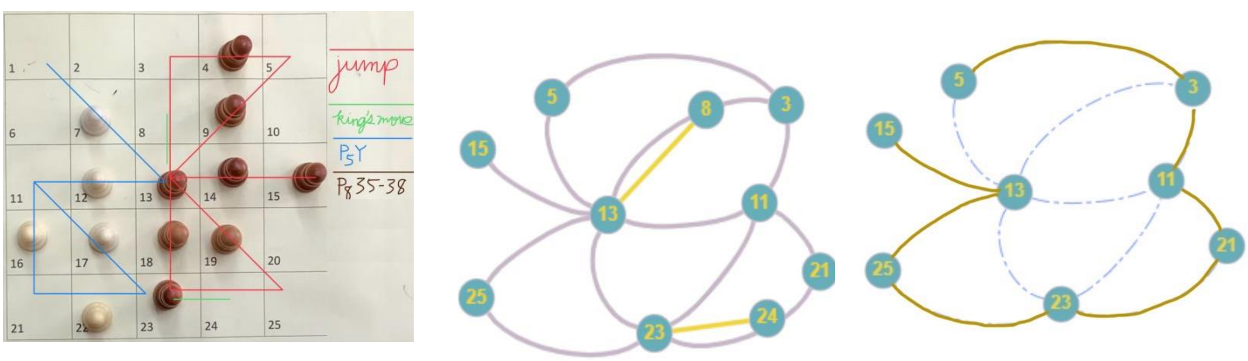



jump
kings move
P5 U
P8 35-22
P5 U
jump
kings move
P5 U
P8 35-23
P5 U
jump
kings move
P5 L
P8 35-23
P5 L
jump
kings move
P5 L
P8 35-38
P5 L


jump
king's move
P5I
P8 35-39
P5I
Va
Vf


jump
king's move
P5Y
P8 35-43
P5Y
Va
Vf

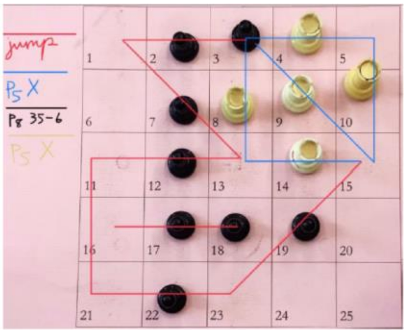

jump
king's move
P5L
P8 35-46
P5L
Va
Vf

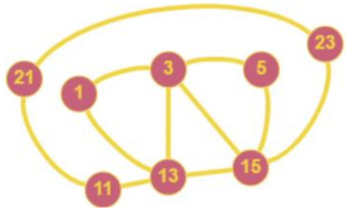

jump
king's move
P5Y
P8 35-38

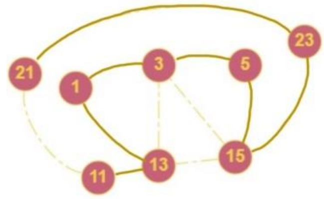
伍、研究結果與討論

一、多重路徑組合

從原始八連方構造變化較多有3 × 4有 46 種、3 × 5有 65 種、4 × 5有 61 種以及4 × 4有機會合成的圖形，計有 218 張圖。以下以 35 為例。

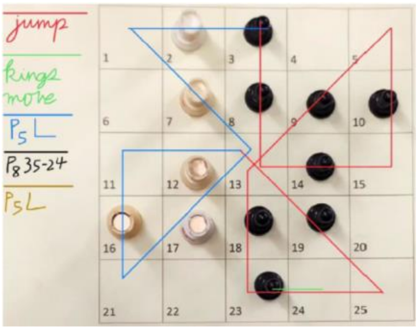


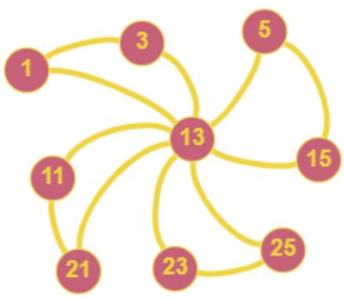


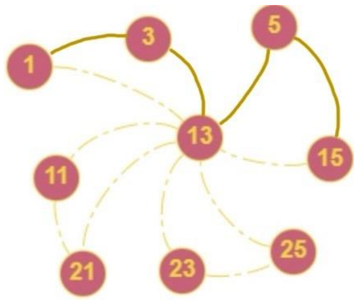


歐拉圈：1⟹3⟹13⟹15⟹3⟹5⟹15⟹23⟹21⟹11⟹13⟹1

最長路徑：21⟹23⟹15⟹5⟹3⟹1⟹13⟹11

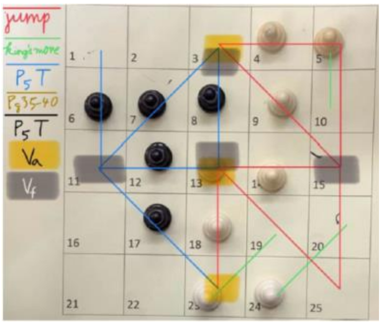


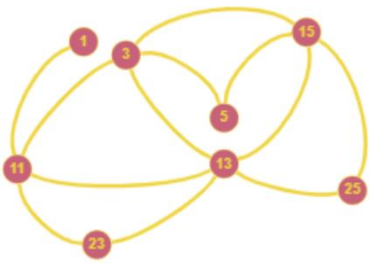


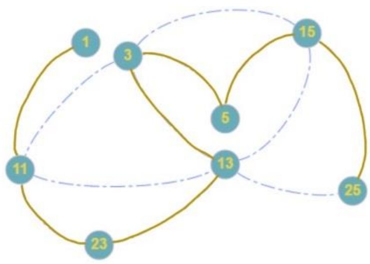


歐拉圈：1⟹13⟹11⟹21⟹13⟹23⟹25⟹13⟹15⟹5⟹13⟹3⟹1

最長路徑：1⟹3⟹13⟹5⟹15

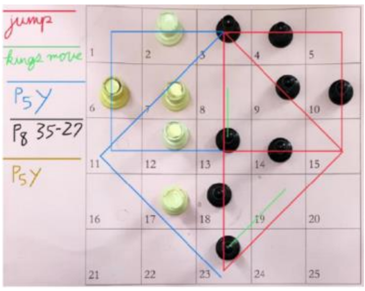


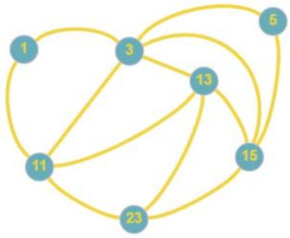


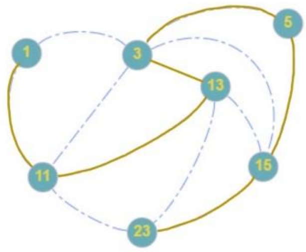


歐拉路徑：13⟹25⟹15⟹5⟹3⟹15⟹13⟹3⟹11⟹23⟹13⟹11⟹1

最長路徑：1⟹11⟹23⟹13⟹3⟹5⟹15⟹25







歐拉圈：23⟹15⟹5⟹3⟹1⟹11⟹23⟹13⟹3⟹15⟹13⟹11⟹13

最長路徑：1⟹11⟹13⟹3⟹5⟹15⟹23

【小結】35-6+X、35-24+L、35-27+Y 三張圖，由於沒有奇數點，所以有歐拉圈；35-40+T 有 2 個奇數點，所以有歐拉路徑但沒有歐拉圈。我們發現，一張圖有歐拉圈代表起點和終點相同，表示一個棋子在跳過所有棋子後會回到出發點；而歐拉路徑代表起點和終點不同，表示一個棋子在跳過所有棋子後不會回到出發點。這個發現可以呼應原遊戲設計候選人回到自己發源地的玩法(原遊戲 W. H. Taft 回到美國中西部 Ohio 州)。

以 Oct35-27+P_5Y 為例分析其圖特徵，我們找到環圖數量相當多，要找到任意兩點間最長路徑頗為挑戰，環的複雜度增加尋找最長路徑的困難度。35-27+Y 計有 V_3^c =6 , V_4^c =7, V_5^c =10, V_6^c =8, $V_7^c = 2$，全部 33 個環如表列

V_3^c	第 1 組	第 2 組	第 3 組	第 4 組	第 5 組	第 6 組
	(1,3,11)	(3,5,15)	(3,11,13)	(3,13,15)	(11,13,23)	(13,15,23)

$V_4^c = 7$

第 1 組	第 2 組	第 3 組	第 4 組	第 5 組	第 6 組	第 7 組
(1,3,13,11)	(3,5,15,13)	(3,11,13,15)	(23,11,13,15)	(3,13,23,15)	(3,13,23,11)	(3,15,23,11)

V_5^c	第 1 組	第 2 組	第 3 組	第 4 組	第 5 組
	(1,3,15,13,11)	(3,5,15,13,11)	(1,3,13,23,11)	(5,3,13,23,15)	(3,11,13,23,15)

V_5^c	第 6 組	第 7 組	第 8 組	第 9 組	第 10 組
	(3,15,13,23,11)	(3,13,11,23,15)	(3,13,15,23,11)	(3,5,15,23,11)	(1,3,15,23,11)

大環由諸多小環構成，實際影響佔地範圍從大範圍點環可以看得出來

V_6^c	第 1 組	第 2 組	第 3 組	第 4 組
	(1,3,5,15,13,11)	(3,5,15,13,23,11)	(3,1,11,13,23,15)	(3,5,15,23,11,13)

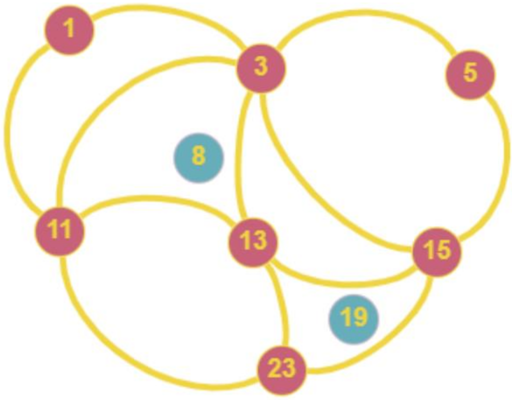
(續)

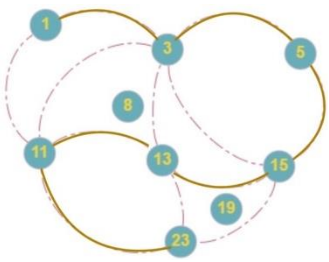
	第 5 組	第 6 組	第 7 組	第 8 組
V_6^c	(3,1,11,23,15,13)	(3,5,15,23,13,11)	(3,1,11,23,13,15)	(1,3,5,15,23,11)

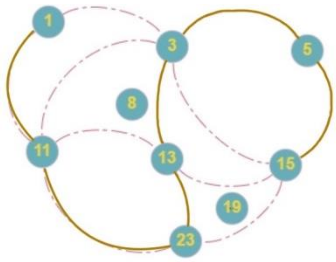
V_7^c =(1,3,5,15,13,23,11)和(5,3,1,11,13,23,15)

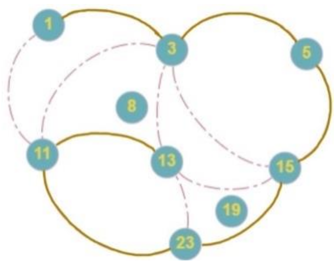
二、關於歐拉路徑的發現

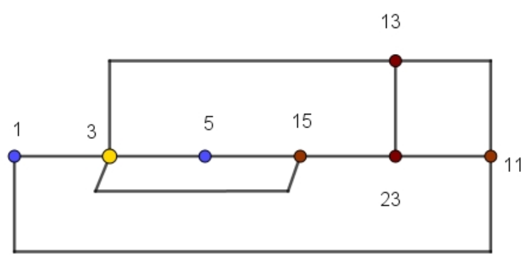
我們發現點環很重要，但不是唯一判斷準則，需要從度序列判斷和環有關係的最長路徑，。











歐拉路徑的判斷—連續而不重複的經過每一條邊

$23 \Rightarrow 15 \Rightarrow 5 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 11 \Rightarrow 23 \Rightarrow 13 \Rightarrow 11 \Rightarrow 3 \Rightarrow 13 \Rightarrow 15 \Rightarrow 3$

$(v_1, v_3, v_5, v_{11}, v_{13}, v_{15}, v_{23})$ =(2, 5, 2, 4, 4, 4, 3) ，DS= $2k+1, k \geq 0$, 由於圖的奇數點的數量=2，至少會出現歐拉路徑；若 DS≠ $2k+1$則會出現歐拉圈。

三、最大佔地範圍A_{max}的區間

(一)、$19 \leq A_{34max}$ ≤21

1. $A_{34min} = 19$

我們發現，$A_{34max} = 19$的圖(34-9, 34-18, 34-24, 34-25)皆為$V_3^c = 6$的全環圖且若包含 KM，則 KM 必須要和一條邊重疊以減少佔地。

2. A_{34max} =21

我們發現，$A_{34max} = 21$的圖(34-10, 34-11, 34-13, 34-14, 34-19, 34-20, 34-28, 34-29, 34-33)皆不是全環圖且 V_3^c皆為 4。$V_3^c \neq 4$的特例為 34-13, 14,及 34-33。34-13, 14 的V_3^c=2，V_4^c=1，佔地應為 20；不過兩張圖都包含兩個 jump，因此佔地被第一個 jump 影響而增加 1，使佔地成為 21。第一個 jump 由於未構成環，因此無法從V_m^c中觀察到，顯示環不是判斷佔地的唯一方式。34-33 的V_3^c=3，V_5^c=1，包含兩個 jump，A_{34max} =22。若第一個 jump 和V_5^c的一條邊重疊，為避免佔地被重複計算，佔地要減 1，則A_{34max} =21。

(二)、$19 \leq A_{35max}$ ≤22

1. $A_{35min} = 19$

我們發現，$= 19$的圖(35-27+Y_1, 2)皆為$V_3^c = 6$的全環圖，且若包含 KM，則 KM 必須要和 1 條邊重疊以減少佔地。

2. A_{35max} =22

我們發現，符合$A_{35max} = 22$(35-3+X_2, 35-11+X, 35-22+L_1, 2, 35-22+U, 35-23+L_1, 2, 35-23+U, 35-40+I, 35-40+L_1, 35-41+ I, 35-41+U)皆不是全環圖， $V_3^c = 4$。

其中，有 35-22+L_1, 2, 35-22+U, 35-23+L_1, 35-40+I。35-22+L_1, 2, 35-22+U 為全環圖，$f = 2$，在環與環交會點，佔地相對少。如果有 1 個V_3^c換成V_4^c且 KM$= 1$，佔地增加。

V_4^c−V_3^c多的A_{35max}和全環圖$A_{35max} < 22$多的佔地恰好相同，兩者抵銷，因此 35-22+L_1, 2, 35-22+U 的A_{35max} =22。

35-23+L_1 和 35-40+I 的情況相似：35-23+L_1 和 35-40+I 並非全環圖而是全環圖加 1 條邊，同樣有 1 個V_3^c替換成 1 個V_4^c，但此V_4^c中間並沒有 KM 增加佔地，兩者依然抵銷，因此 35-23+L_1 和 35-40+I 的佔地為 22。

$O_{CT}34$ $C = (V, E)$

圖編號	34-1	34-2	34-3	34-4	34-5	34-6	34-7
度序列	（8， 12）	（8， 12）	（8， 12）	（8， 12）	（8， 12）	（8， 12）	（8， 12）

圖編號	34-8	34-9	34-10	34-11	34-12	34-13	34-14
度序列	（8， 12）	（7， 12）	（9， 12）	（9， 12）	（8， 12）	（11， 12）	（12， 12）

圖編號	34-15	34-16	34-17	34-18	34-19	34-20	4-21
度序列	（10， 12）	（8， 12）	（8, 12）	（7， 12）	（8, 12）	（9, 12）	（8, 12）

圖編號	34-22	34-23	34-24	34-25	34-26	34-27	34-28
度序列	（8, 12）	（8, 12）	（7， 12）	（7， 12）	（8， 12）	（8， 12）	（9， 12）

圖編號	34-29	34-30	34-31	34-32	34-33
度序列	（9， 13）	（8， 12）	（7， 10）	（8， 12）	（10， 12）

$O_{CT}34$ 各分圖分析度序列奇偶點

圖編碼	度序列											移動次數	佔地範圍
34-1	2	4	2	2	6	4	2	2				1	20
34-2	2	3	2	2	6	3	4	2				1	20
34-3	2	3	2	2	6	3	4	2				1	20
34-4	2	3	2	2	6	3	4	2				1	20
34-5	2	4	1	2	5	4	4	2				1	20
34-6	2	4	1	2	5	4	4	2				1	20
34-7	2	4	2	2	5	4	1	4				1	20
34-8	2	4	2	2	6	4	2	2				1	20
34-9	4	2	4	4	4	2	4					1	19
34-10	1	4	2	2	**7**	2	2	2	2			1	21
34-11	2	2	2	2	**8**	2	2	2	2			1	21
34-12	2	4	2	4	6	2	2	2				1	20
34-13	4	1	2	4	2	1	4	2	1	2	1	2	21

(續)

34-14	2	2	2	5	2	1	4	2	1	2	1	2	21
34-15	4	2	2	3	4	1	4	1	2	1		2	20
34-16	2	2	2	2	6	4	1	4	1			2	20
34-17	2	4	2	2	6	4	2	2				2	20
34-18	4	2	4	4	4	2	4					2	19
34-19	2	2	2	2	6	4	1	4				2	21
34-20	2	2	2	2	7	4	2	2	1			2	21
34-21	2	2	4	5	4	2	4	1				2	20
34-22	2	4	1	2	5	4	4	2				1	20
34-23	2	3	2	3	6	4	2	2				1	20
34-24	4	2	4	4	4	2	4					1	19
34-25	2	5	2	4	4	4	3					1	19
34-26	2	3	2	2	6	4	2	3				1	20
34-27	2	4	2	4	6	2	2	2				1	20
34-28	1	4	1	4	6	2	2	2	2			1	21
34-29	1	2	2	4	7	2	2	2	2			1	21
34-30	1	4	2	4	5	4	2	2				1	20
34-31	4	2	5	4	2	4	2					2	19
34-32	4	1	2	5	4	2	4	2				2	20
34-33	2	2	2	4	4	2	2	2				2	21

【第二種情形】

我們發現原始遊戲中採用的 1 步不限方向，正是西洋棋中的「國王的移動」(KM)，對於佔地數是有影響的，因此我們試著推導出包含 KM 與 Jump 總移動次數對於佔地範圍的結果。

O_{ct}35 各分圖分岔點判圖特徵

圖編號	點名稱	V_fork	V_f數量
35-1+P_5U	1, 3, 5, 13, 15, 21, 23, 25	3, 13, 15	3
35-1+P_5Y	1, 3, 5, 13, 15, 21, 23, 25	3, 13, 15, 23	4
35-2+P_5X	1, 3, 11, 13, 15, 21, 23, 25	3, 13, 15, 23	4
35-3+P_5X(1)	1, 3, 5, 13, 15, 21, 23, 25	3, 13, 15, 23	4
35-3+P_5X(2)	1, 3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	13, 15, 23	3
35-5+P_5U	3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	3, 13, 15	3
35-5+P_5Y	3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	3, 13, 23	3
35-6+P_5X	1, 3, 5, 11, 13, 15, 16, 18, 21, 23	3, 13, 15	3
35-11+P_5X	1, 3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	3, 13, 15, 23	4
35-15+P_5X	3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	3, 13, 15, 23	4
35-18+P_5U	3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	3, 13, 15	3
35-18+P_5Y	3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	3, 13, 15, 23	4
35-21+P_5U	3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	3, 13, 15	3
35-21+P_5Y	3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	3, 13, 15, 23	4
35-22+P_5L(1)	1, 3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	13, 23	2
35-22+P_5L(2)	1, 3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	3, 13	2
35-22+P_5U	1, 3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	11, 13	2
35-23+P_5L(1)	1, 3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	3, 11, 13	3
35-23+P_5L(2)	1, 3, 5, 11, 13, 15, 21, 23, 25	11, 13, 23	3

圖編號	度序列	L_{max}/歐拉圈(路徑)	A_{max}
35-1 P_5U	(2, 4, 2, 6, 4, 2, 2, 2)	1⟹3⟹5⟹15⟹25⟹13⟹23⟹21	21
	存在歐拉圈	1⟹13⟹21⟹23⟹13⟹3⟹15⟹13 ⟹25⟹15⟹5⟹3⟹1	

圖編號	度序列	L_{max}/歐拉圈(路徑)	A_{max}
35-1 P_5Y	(2, 3, 2, 6, 3, 2, 4, 2)	21⟹23⟹25⟹15⟹13⟹1⟹3⟹5	20
	有歐拉路徑	3⟹5⟹13⟹15⟹25⟹23⟹21⟹13 ⟹1⟹3⟹13⟹23⟹15	
35-2 P_5X	(2, 3, 2, 6, 4, 2, 3, 2)	11⟹21⟹13⟹23⟹25⟹15⟹3⟹1	20
	有歐拉路徑	3⟹15⟹25⟹23⟹15⟹13⟹1⟹3 ⟹13⟹11⟹21⟹13⟹23	
35-3 P_5X(1)	(2, 3, 2, 6, 3, 2, 4, 2)	21⟹23⟹25⟹15⟹13⟹1⟹3⟹5	21
	有歐拉路徑	3⟹5⟹13⟹21⟹23⟹25⟹15⟹1 3⟹1⟹3⟹13⟹23⟹15	
35-3 P_5X(2)	(2, 1, 2, 2, 6, 3, 2, 4, 2)	21⟹23⟹25⟹15⟹13⟹1⟹11	22
	有歐拉路徑	3⟹5⟹13⟹15⟹25⟹23⟹13⟹ 1⟹11⟹13⟹21⟹23⟹15	

圖編號	度序列	L_{max}/歐拉圈(路徑)	A_{max}
35-5 P_5U	(4, 2, 2, 6, 4, 2, 2, 2)	11⟹3⟹5⟹15⟹25⟹13⟹23⟹21	21
	存在歐拉圈	3⟹5⟹15⟹3⟹11⟹13⟹21⟹23⟹ 13⟹15⟹23⟹13⟹3	

圖編號	度序列	L_{max}/歐拉圈(路徑)	A_{max}
35-5 P_5Y	(3, 2, 2, 6, 3, 2, 4, 2)	21⟹23⟹25⟹15⟹13⟹11⟹3⟹5	21
	有歐拉路徑	3⟹5⟹13⟹15⟹25⟹23⟹21⟹13⟹1 1⟹3⟹13⟹23⟹15	

圖編號	度序列	L_{max}/歐拉圈(路徑)	A_{max}
35-6 P_5X	(2, 4, 2, 2, 4, 4, 1, 1, 2, 2)	21⟹23⟹1⟹5⟹3⟹1⟹13⟹11	21
	存在歐拉圈	3⟹1⟹13⟹3⟹15⟹23⟹21⟹11 ⟹13⟹15⟹5⟹3	

圖編號	度序列	L_{max}/歐拉圈(路徑)	A_{max}
35-11 P_5X	(2, 3, 2, 2, 4, 3, 2, 4, 2)	11⟹1⟹3⟹5⟹13⟹21⟹23⟹25⟹15	22
	有歐拉路徑	3⟹1⟹11⟹3⟹5⟹13⟹15⟹25⟹ 23⟹21⟹13⟹23⟹15	
35-15 P_5X	(3, 2, 2, 6, 3, 2, 4, 2)	21⟹23⟹25⟹15⟹13⟹11⟹3⟹5	20
	有歐拉路徑	3⟹5⟹13⟹15⟹25⟹23⟹21⟹13⟹ 11⟹3⟹13⟹23⟹15	

圖編號	度序列	L_{max}/歐拉圈(路徑)	A_{max}
35-18 P_5U	(4, 2, 2, 6, 4, 2, 2, 2)	11⟹3⟹5⟹15⟹25⟹13⟹23⟹21	20
	存在歐拉圈	3⟹5⟹15⟹3⟹11⟹13⟹21⟹23 ⟹13⟹15⟹23⟹13⟹3	

圖編號	度序列	L_{max}/歐拉圈(路徑)	A_{max}
35-18 P_5Y	(3, 2, 2, 6, 3, 2, 4, 2)	21⟹23⟹25⟹15⟹13⟹11⟹3⟹5	20
	有歐拉路徑	3⟹5⟹13⟹15⟹25⟹23⟹21⟹1 3⟹11⟹3⟹13⟹23⟹15	

圖編號	度序列	L_{max}/歐拉圈(路徑)	A_{max}
35-21 P_5U	(4, 2, 2, 6, 4, 2, 2, 2)	11⟹3⟹5⟹15⟹25⟹13⟹23⟹21	20
	存在歐拉圈	3⟹5⟹15⟹3⟹11⟹13⟹21⟹23⟹ 13⟹15⟹23⟹13⟹3	

（續）

圖編號	度序列	L_{max}/歐拉圈(路徑)	A_{max}
35-21 P_5Y	(3, 2, 2, 6, 3, 2, 4, 2)	21⟹23⟹25⟹15⟹13⟹11⟹3⟹5	20
	有歐拉路徑	3⟹5⟹13⟹15⟹25⟹23⟹21⟹13⟹11⟹3⟹13⟹23⟹15	
35-22 P_5L(1)	(2, 2, 2, 2, 7, 2, 2, 3, 2)	21⟹23⟹25⟹13⟹3⟹5⟹15	22
	有歐拉路徑	13⟹15⟹5⟹3⟹13⟹11⟹1⟹13⟹25⟹23⟹21⟹13⟹23	
35-22 P_5L(2)	(2, 3, 2, 2, 7, 2, 2, 2, 2)	1⟹3⟹5⟹15⟹13⟹23⟹25	22
	有歐拉路徑	13⟹23⟹25⟹13⟹1⟹3⟹5⟹15⟹13⟹11⟹21⟹13⟹3	
35-22 P_5U	(2, 2, 2, 3, 7, 2, 2, 2, 2)	1⟹11⟹21⟹13⟹3⟹5⟹15	22
	有歐拉路徑	13⟹23⟹25⟹13⟹1⟹11⟹21⟹13⟹3⟹5⟹15⟹13⟹11	
35-23 P_5L(1)	(2, 3, 2, 3, 6, 2, 2, 2, 2)	21⟹23⟹13⟹5⟹3⟹1⟹11	22
	有歐拉路徑	3⟹1⟹11⟹13⟹23⟹21⟹13⟹25⟹15⟹13⟹5⟹3⟹11	
35-23 P_5L(2)	(2, 2, 2, 3, 6, 2, 2, 3, 2)	3⟹1⟹11⟹13⟹25⟹23⟹21	22
	有歐拉路徑	23⟹21⟹13⟹25⟹23⟹13⟹15⟹5⟹13⟹11⟹1⟹3⟹11	

(多圖見現場展示資料)

$$19 \leq A_{max} \leq 22$$

陸、研究結論

一、圖特徵若包含 KM，則 KM 必須要和 1 條邊重疊以減少佔地。

二、佔地範圍區間

(一) $19 \leq A_{34max} \leq 21$

(二) $19 \leq A_{35max} \leq 22$

(三) $19 \leq A_{45max} \leq 21$

(四) $19 \leq A_{44max} \leq 21$

三、從歐拉路徑找出最長路徑的方法，即找出連續而不重複的經過每一條邊。

四、最長路徑依據環特徵$4 \leq L_{35max} \leq 8$。

柒、參考文獻

徐力行(2003)。沒有數字的數學。臺北市：天下文化。

張鎮華(2020)。演算法觀點的圖論。臺北市：臺大出版中心出版。

Petkovic, M. (1997). *Mathematics and Chess*. New York: Dover Publications.